

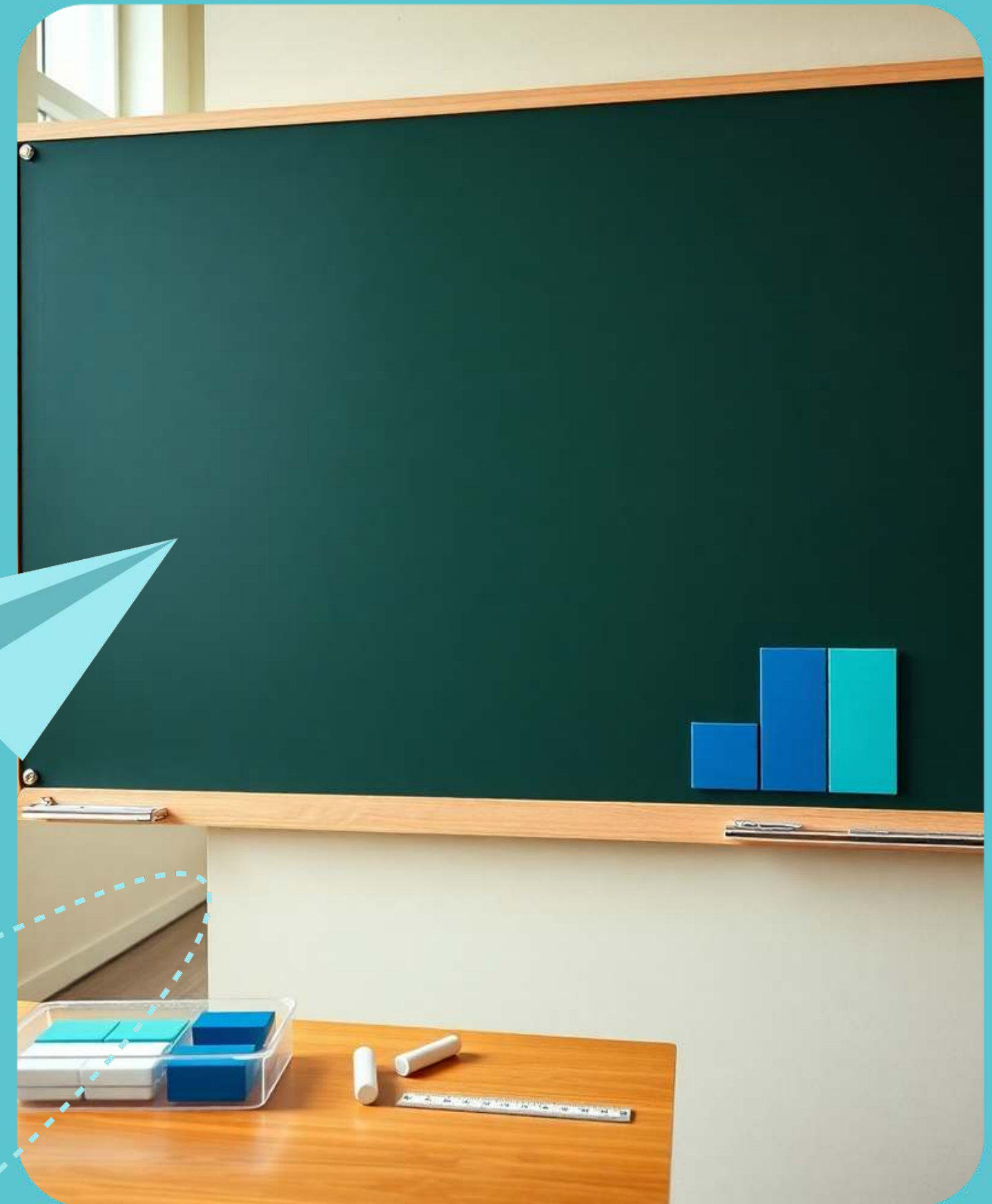
Исследование квадратного трёхчлена

Корни, дискриминант, вершина и знак: разберём всё по шагам.



Зачем нужен квадратный трёхчлен

Эта тема встречается в уравнениях, неравенствах и задачах из геометрии. Она показывает связь формул с графиком и помогает быстро понять, сколько действительных корней имеет выражение.



Что важно в общем виде



Старший коэффициент a

Число a отвечает за направление ветвей параболы. Если a положительно, график направлен вверх; если отрицательно — вниз. От него также зависит, насколько парабола «узкая».



Коэффициент b

Коэффициент b влияет на положение оси симметрии и вершины графика. Именно он вместе с a помогает определить, где парабола «сдвигается» по горизонтали.



Свободный член c

Число c показывает значение трёхчлена при $x=0$. Поэтому график всегда проходит через точку пересечения с осью Oy в координатах $(0; c)$.



Общий вид выражения

Квадратный трёхчлен записывают как ax^2+bx+c , где $a \neq 0$. Эта форма удобна для поиска корней, построения графика и исследования поведения функции на промежутках.



График квадратного трёхчлена как парабола

Форма графика

График квадратного трёхчлена всегда имеет вид параболы. По нему можно увидеть, как выражение меняется, где оно положительно, отрицательно или равно нулю.

Точки пересечения

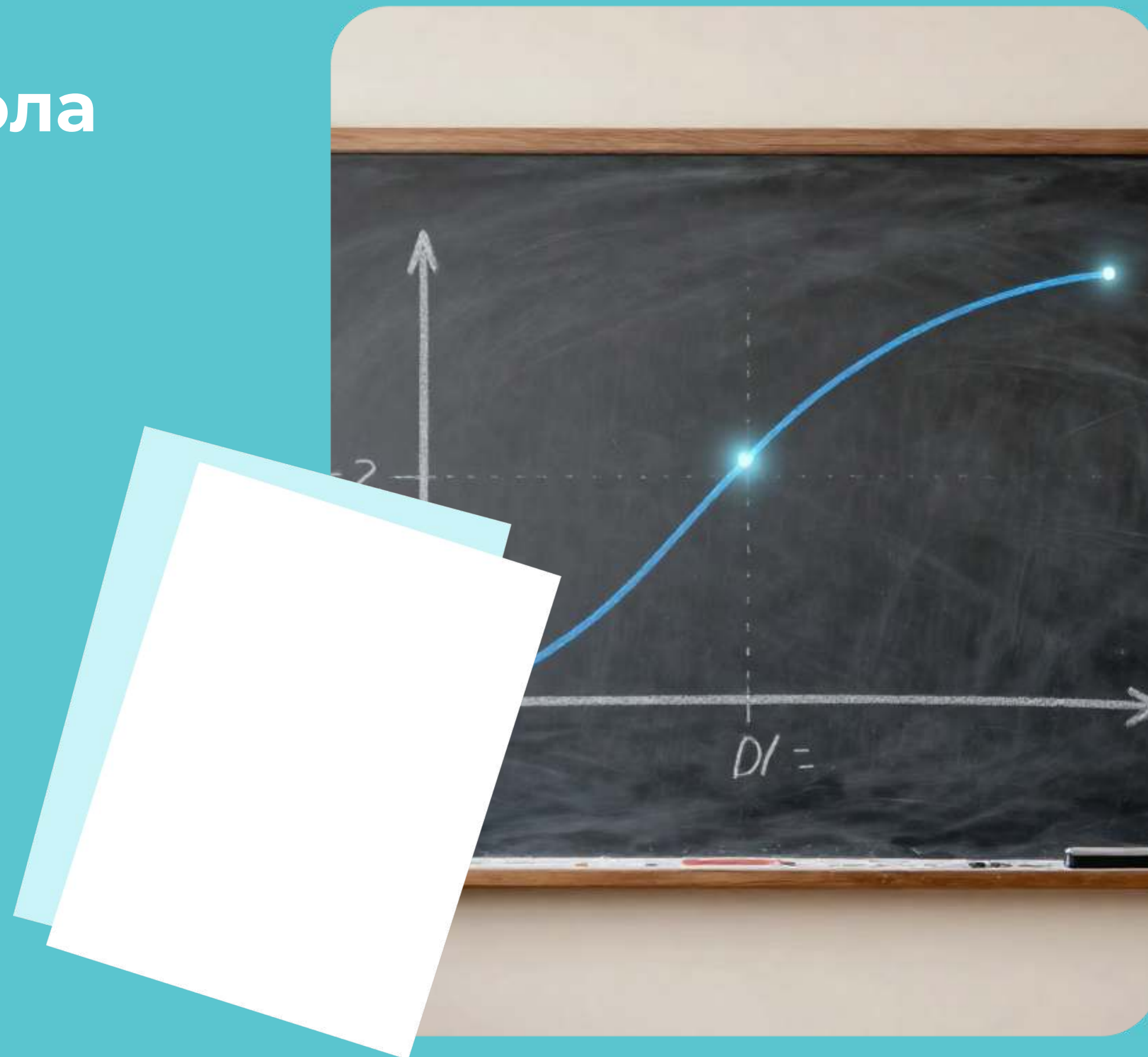
Парабола может пересекать ось Ox в двух точках, касаться её в одной точке или совсем не пересекать. Это связано с числом действительных корней.

Пример $y=x^2-4x+3$

У этого выражения вершина находится при $x=2$, а нули функции равны 1 и 3. Значит, график симметричен относительно прямой $x=2$.

Что отмечают на рисунке

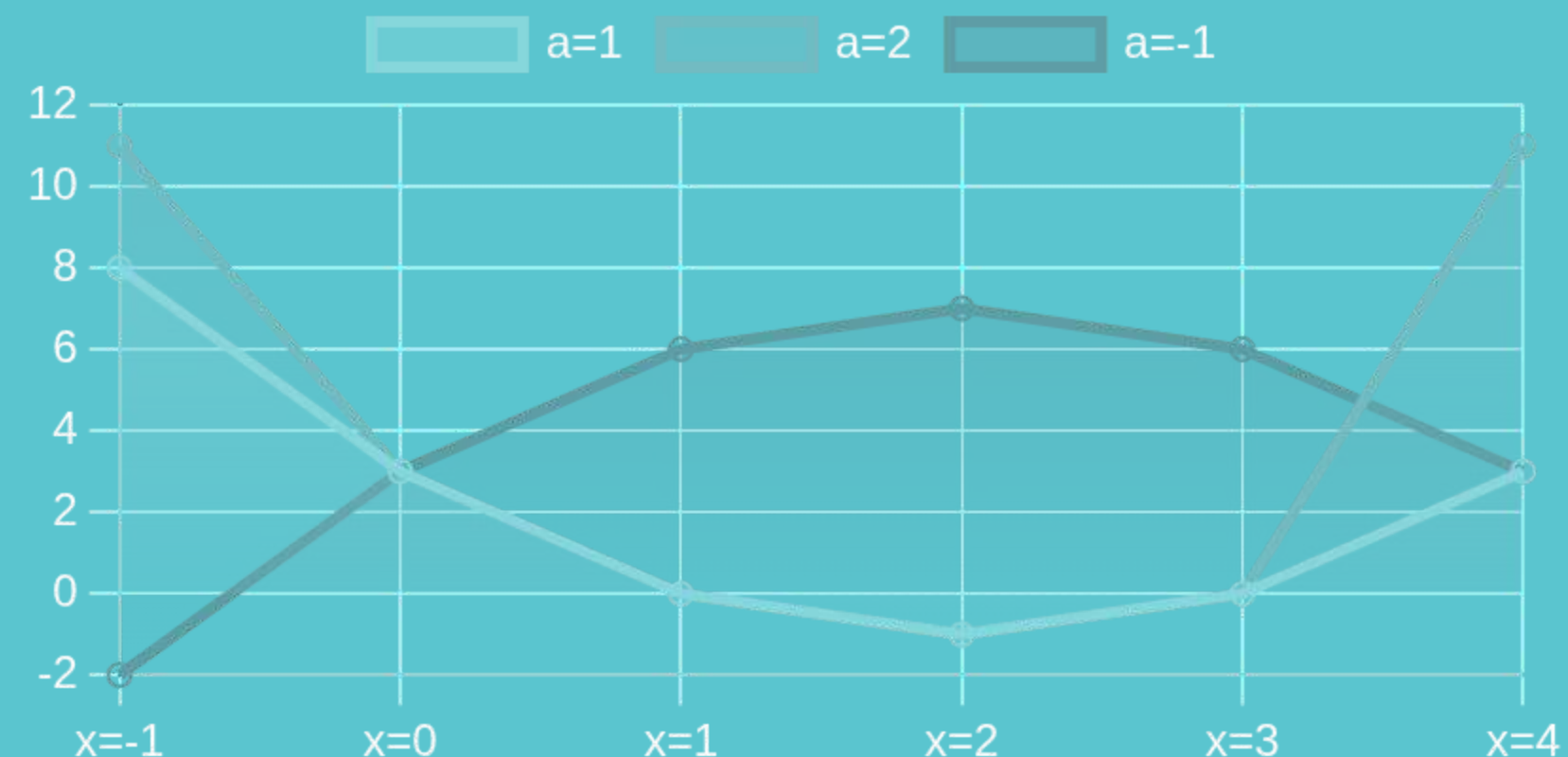
На схеме особенно важны вершина, ось симметрии и точки пересечения с осями координат. Именно они помогают быстро понять свойства трёхчлена.



Как коэффициент а меняет вид параболы

На графике показаны три функции с одинаковыми b и c . Их различие видно только по коэффициенту a , который меняет направление и крутизну параболы.

Чем больше $|a|$, тем уже парабола; при отрицательном a она открывается вниз. Точка пересечения с осью Oy остаётся одной и той же.



Построено по формулам $y=x^2-4x+3$, $y=2x^2-4x+3$ и $y=-x^2-4x+3$; вычисления по школьному курсу алгебры.



Нули квадратного трёхчлена

1. Что называют нулями

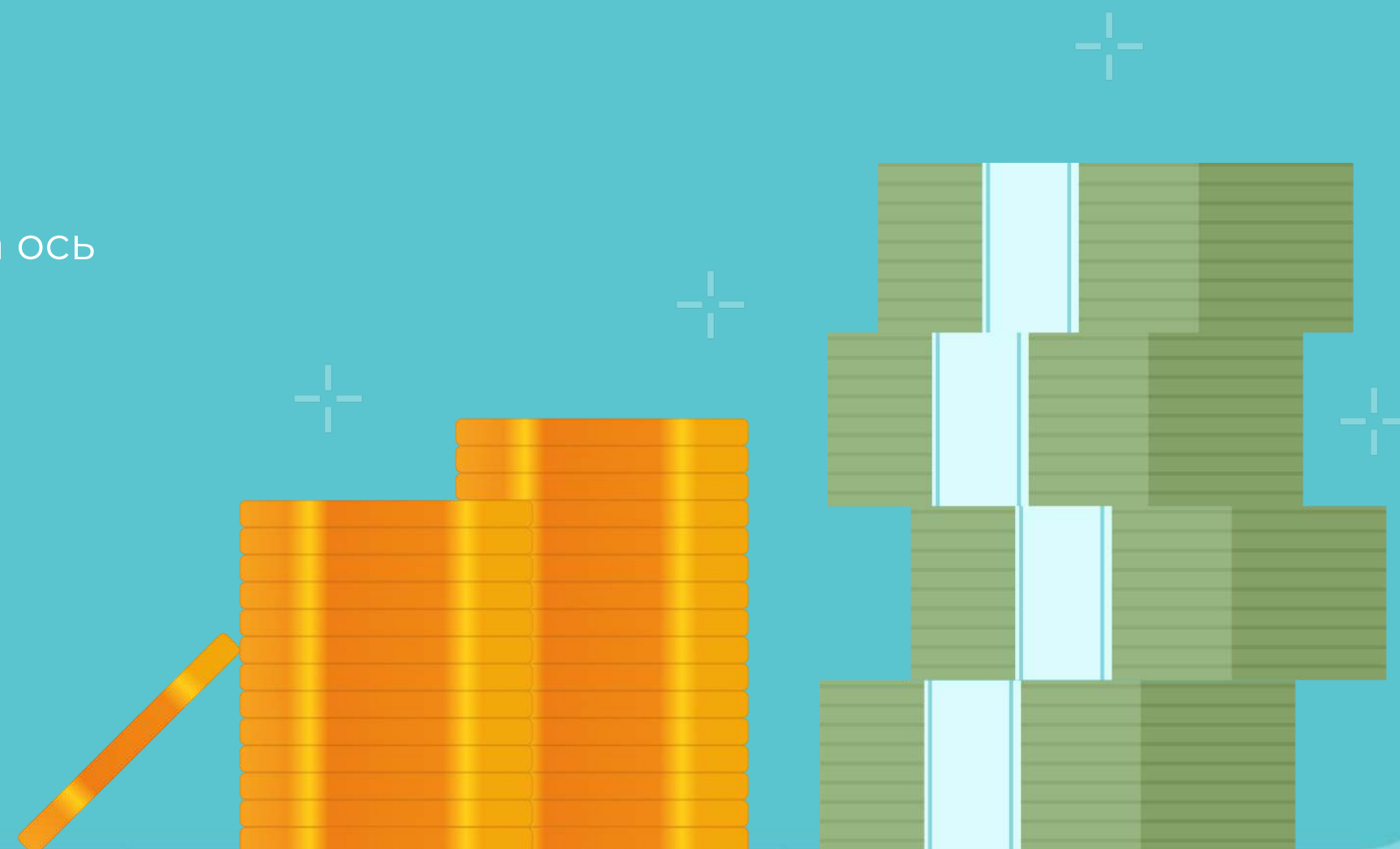
Нулями трёхчлена называют такие значения x , при которых выражение ax^2+bx+c становится равным нулю. Именно эти значения показывают точки пересечения графика с осью Ox .

2. Сколько их бывает

У квадратного трёхчлена может быть два, один или ни одного действительного нуля. Это зависит от дискриминанта и от того, пересекает ли парабола ось Ox .

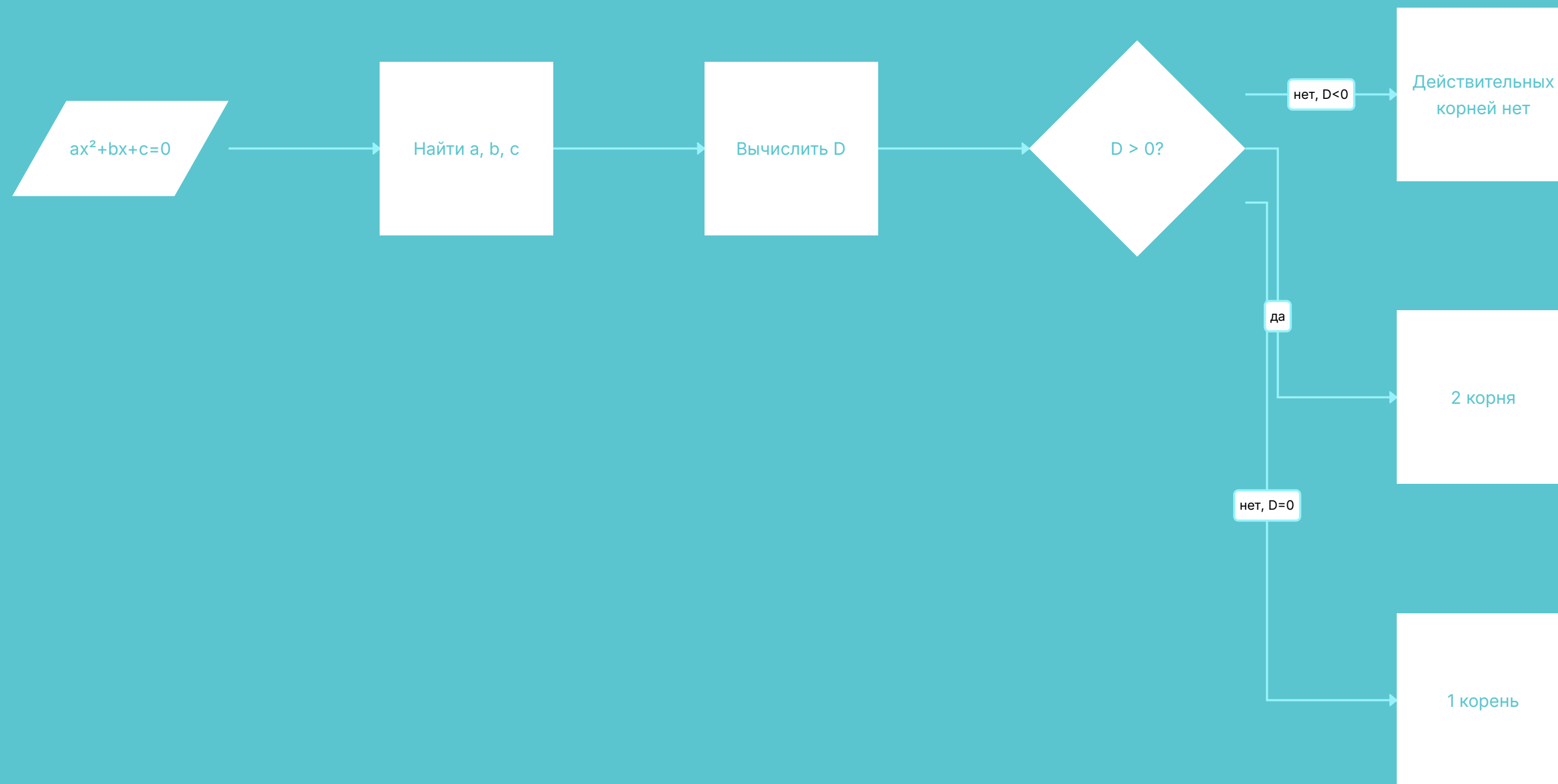
3. Как использовать нули

Если нули известны, трёхчлен удобно записать в виде произведения множителей. Например, x^2-5x+6 имеет нули 2 и 3, значит, его можно разложить.



Алгоритм решения квадратного уравнения

Последовательность действий по школьному курсу алгебры, 9 класс



Как дискриминант связан с корнями

Вычисление D

Сначала находят дискриминант по формуле $D=b^2-4ac$. Это число сразу показывает, сколько действительных корней может иметь квадратное уравнение.

Сравнение с нулём

Если $D>0$, корней два; если $D=0$, корень один, но он двойной; если $D<0$, действительных корней нет.

Связь с графиком

Когда $D=0$, парабола касается оси Ox в одной точке. Например, у x^2-4x+4 дискриминант равен нулю.



Примеры с разным дискриминантом



Трёхчлен	D	Корни
x^2-5x+6	1	2 и 3
x^2-4x+4	0	2
x^2+1	-4	нет

Формулы и примеры школьного курса алгебры.

Три примера показывают, как знак дискриминанта связан с числом корней и поведением графика.

Положительный D даёт два разных корня, нулевой — один двойной, отрицательный — отсутствие действительных корней.



Разложение квадратного трёхчлена на множители

1.

Общая запись

Если корни x_1 и x_2 уже найдены, квадратный трёхчлен можно записать как $a(x-x_1)(x-x_2)$. Такая форма делает выражение короче и нагляднее.

2.

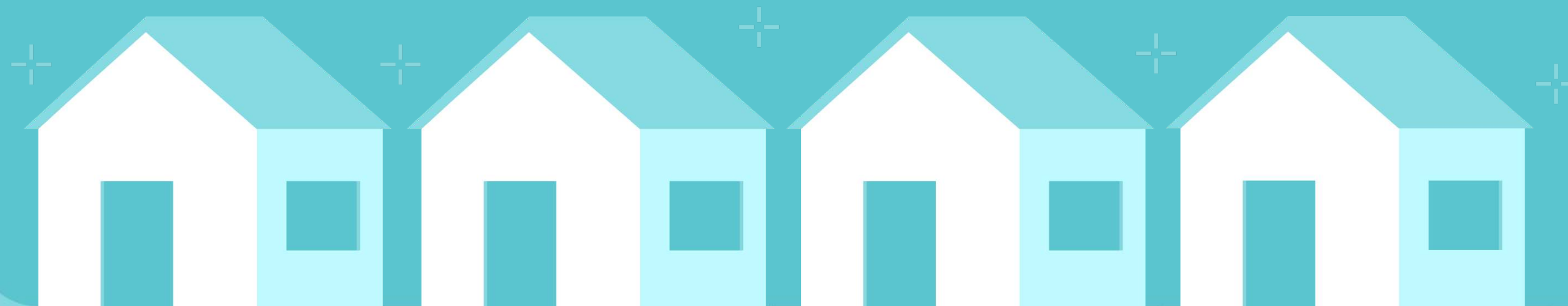
Пример разложения

Для x^2-5x+6 получаем $(x-2)(x-3)$. Проверка проста: при раскрытии скобок снова выходит исходный трёхчлен, значит, разложение выполнено верно.

3.

Зачем это нужно

Разложение помогает решать уравнения, упрощать выражения и быстро проверять вычисления. Особенно удобно использовать его, когда корни уже известны или легко находятся.



Подбор множителей при $a=1$



Когда старший коэффициент равен 1

Если трёхчлен имеет вид x^2+bx+c , его удобно раскладывать без длинных вычислений. Нужно найти два числа, которые в сумме дают b , а в произведении — c . Такой приём особенно полезен, когда числа заметны сразу и легко проверяются устно.



Пара чисел для примера

В выражении $x^2+7x+12$ подходят числа 3 и 4: их сумма равна 7, а произведение — 12. Поэтому трёхчлен можно записать как $(x+3)(x+4)$. На схеме удобно показать, как число 12 разбивается на пары множителей.



Проверка разложения

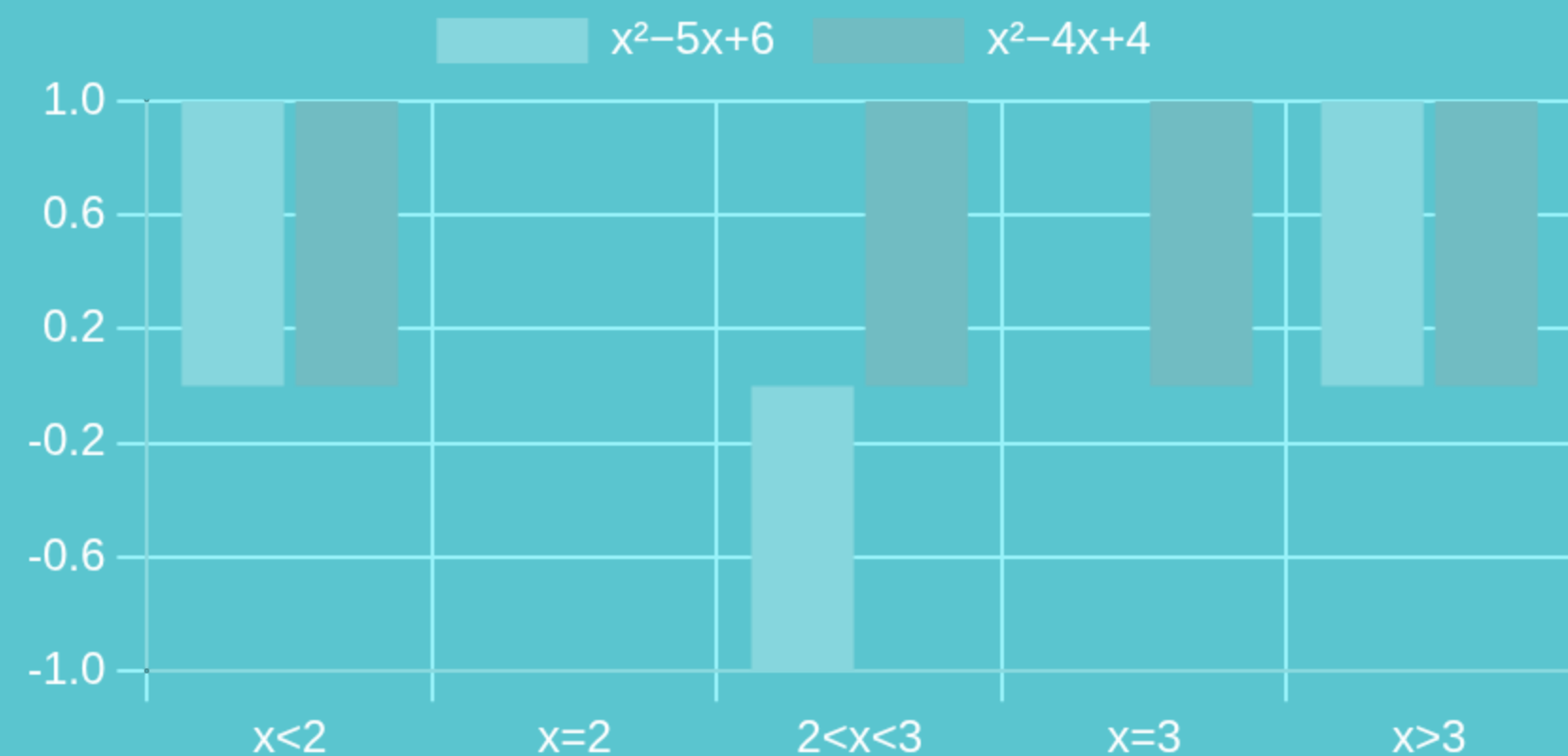
Подбор множителей помогает быстро получить корни и проверить ответ. После раскрытия скобок должно снова получиться исходное выражение. Если сумма или произведение не совпадают, значит, пара выбрана неверно и нужно подобрать другие числа.



Знак трёхчлена на промежутках

Сравнение показывает, как меняется знак после прохождения через корни и как поведение отличается у трёхчлена с двойным корнем.

У первого выражения знак меняется между корнями, у второго остаётся неотрицательным: это отражает касание параболы оси Ox .



Школьный курс алгебры, 9 класс



Вершина параболы и ось симметрии

Абсцисса вершины

Координату x вершины находят по формуле $x_0 = -b/(2a)$. Она сразу показывает, где парабола достигает своего наибольшего или наименьшего значения.

Ордината вершины

Значение y_0 можно получить подстановкой x_0 в исходное выражение. Ещё быстрее использовать формулу $y_0 = -D/(4a)$, если дискриминант уже вычислен.

Ось симметрии

Прямая $x = x_0$ делит параболу на две одинаковые части. Точки графика по разные стороны оси расположены зеркально, поэтому построение становится проще.

Пример для $y = x^2 - 4x + 3$

Для этого выражения $x_0 = 2$, а вершина имеет координаты $(2; -1)$. Это удобно проверить на графике: слева и справа от оси симметрии форма одинаковая.



Как коэффициенты изменяют график

1. Коэффициент a

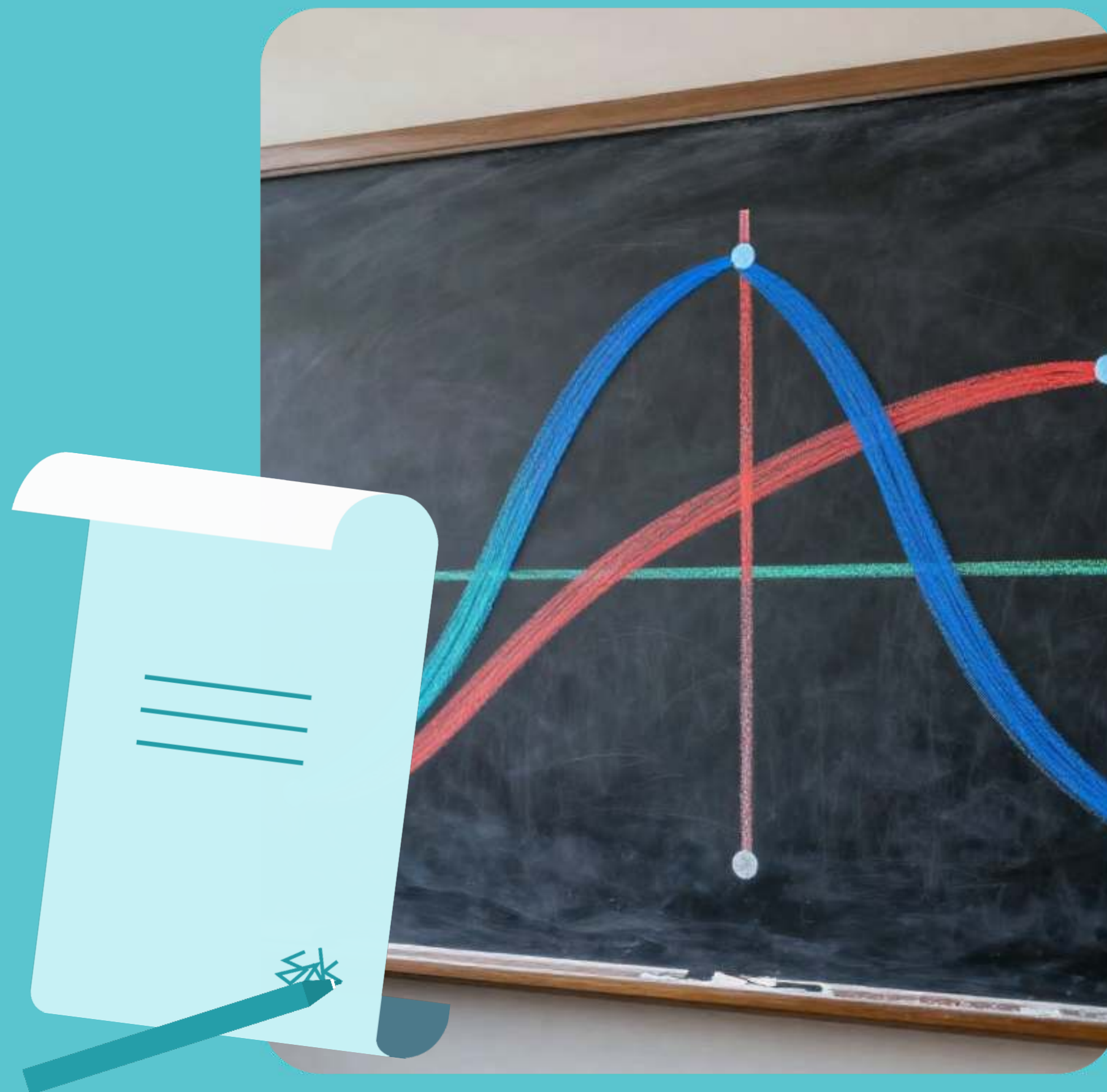
Знак a определяет направление ветвей: при положительном значении парабола направлена вверх, при отрицательном — вниз. Чем больше $|a|$, тем уже и круче становится график.

2. Коэффициент b

Коэффициент b смещает вершину по горизонтали и задаёт положение оси симметрии. Из-за него парабола может располагаться правее или левее начала координат.

3. Коэффициент c

Число c показывает, где график пересекает ось Oy . Если c увеличить на 2, вся парабола поднимется на 2 единицы; если уменьшить — опустится вниз.



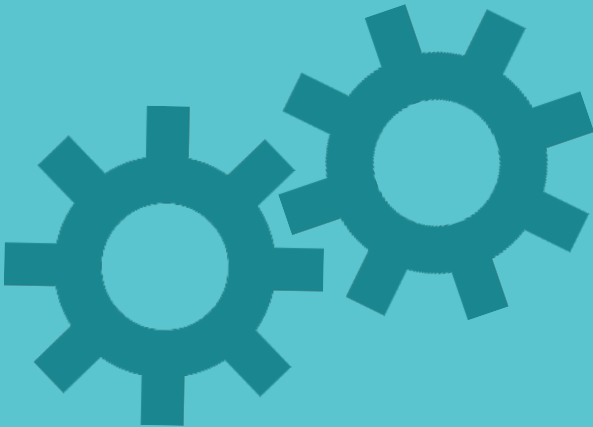
Основные формулы исследования квадратного трёхчлена

Формула	Назначение	Что находит	Роль
$D=b^2-4ac$	Корни	Число корней	Ключ к анализу
$x=(-b\pm\sqrt{D})/(2a)$	Корни	Значения x	Решение уравнения
$x_0=-b/(2a)$	Вершина	Ось симметрии	Положение графика

Таблица объединяет главные формулы и их назначение при исследовании квадратного трёхчлена.

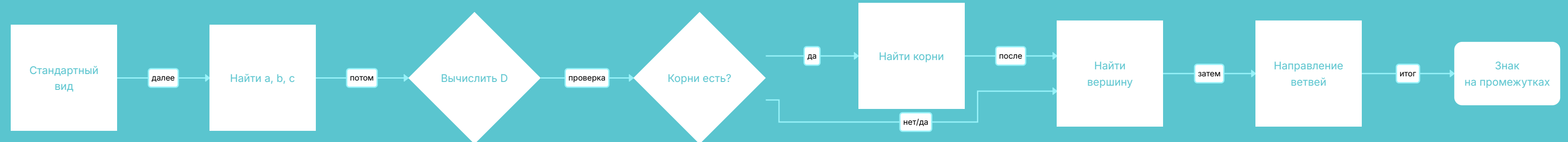
Формулы дополняют друг друга: дискриминант показывает тип корней, а координаты вершины помогают описать график и знак выражения.

Школьный курс алгебры, 9 класс



Порядок исследования квадратного трёхчлена

Последовательность действий по школьному алгоритму алгебры 9 класса



Типичные ошибки при исследовании



Неверный знак в D

Часто забывают, что дискриминант вычисляют по формуле $b^2 - 4ac$. Ошибка в знаке сразу меняет число корней, поэтому ответ получается неверным даже при правильных дальнейших шагах.



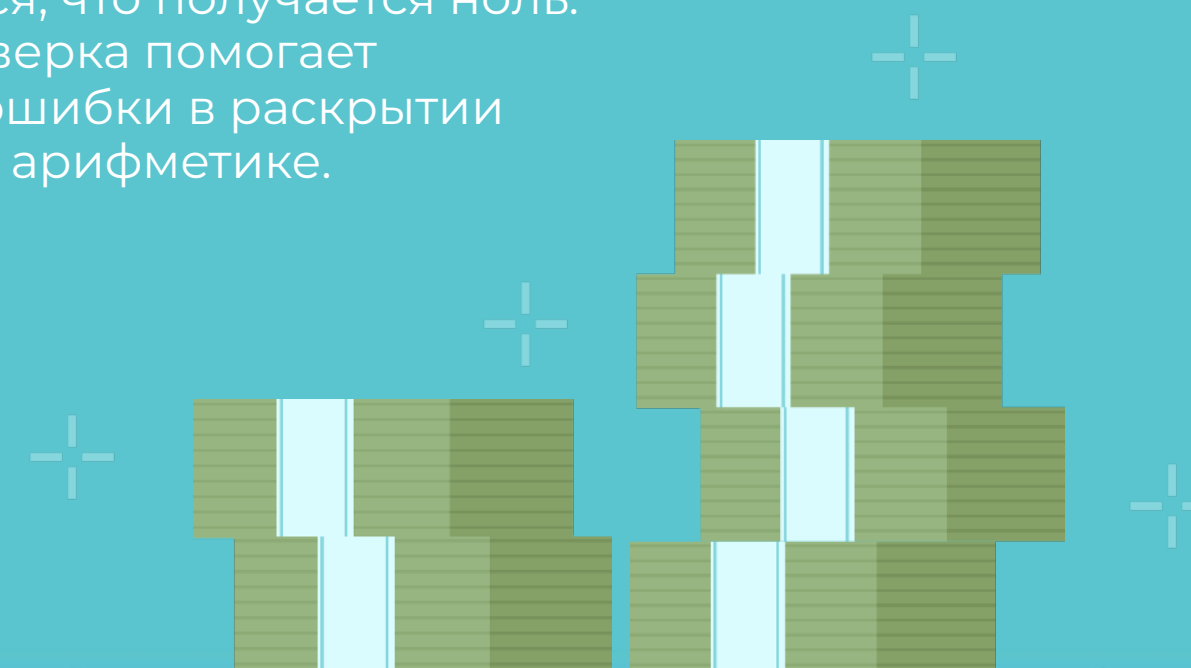
Пропуск $2a$

При нахождении корней иногда пишут только $\sqrt{D}$ в знаменателе. Нужно помнить о числе $2a$, иначе координаты корней и вершины будут вычислены неправильно.



Проверка результата

После вычислений полезно подставить найденные значения в исходное выражение и убедиться, что получается ноль. Такая проверка помогает заметить ошибки в раскрытии скобок и в арифметике.



Полное исследование на примере $y=x^2-6x+5$

1. Находим дискриминант

Для функции $y=x^2-6x+5$ имеем $a=1$, $b=-6$, $c=5$. Дискриминант равен 16, значит, уравнение имеет два различных действительных корня.

2. Определяем корни

По формуле получаем $x_1=1$ и $x_2=5$. Эти значения показывают, где график пересекает ось Ox , а также помогают установить промежутки знака.

3. Находим вершину

Абсцисса вершины равна 3, а ордината — -4. Точка (3; -4) лежит ниже оси Ox , поэтому именно здесь парабола достигает минимума.

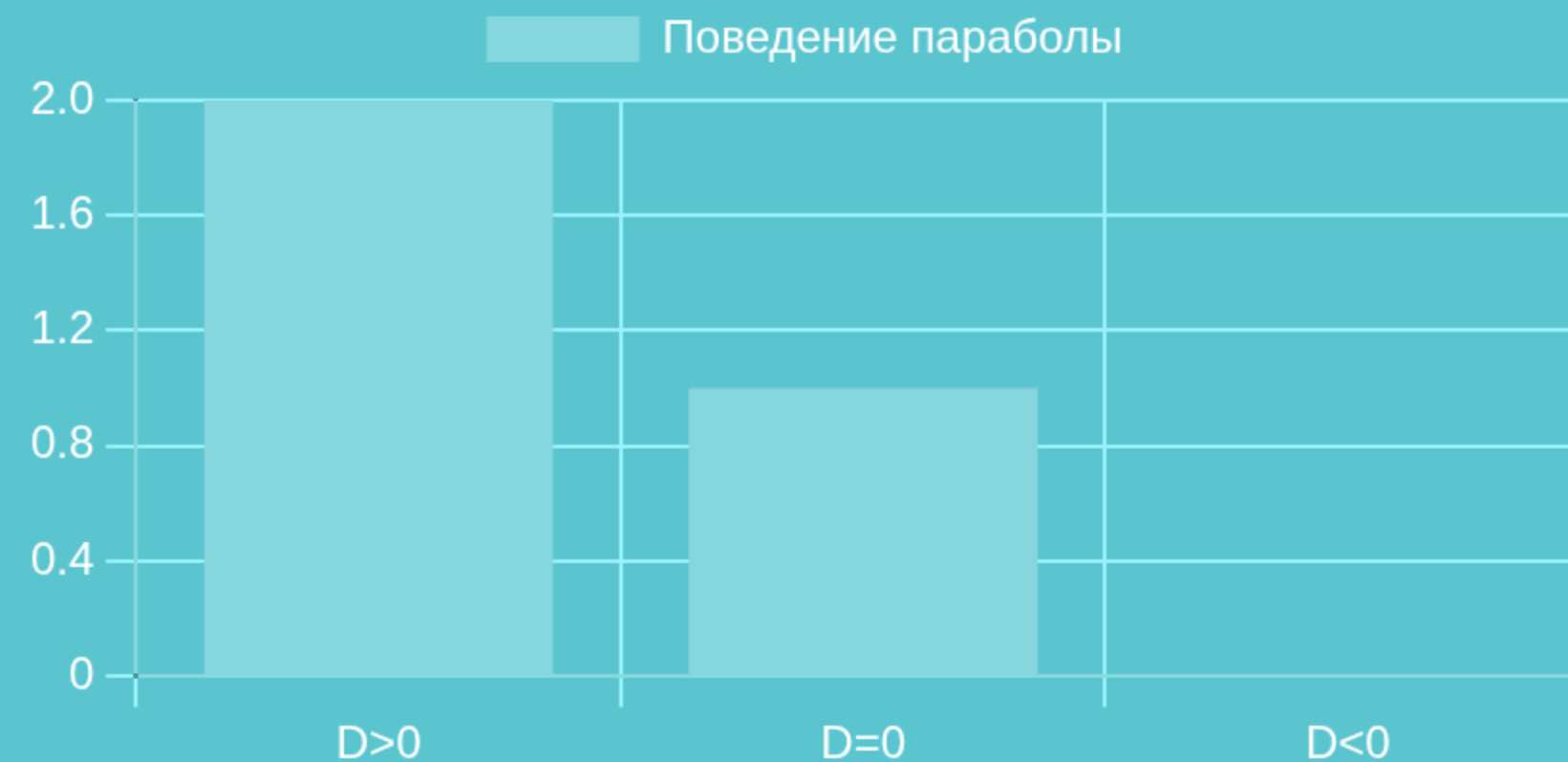
4. Делаем вывод о графике

Так как $a=1$, ветви направлены вверх. Значит, функция отрицательна между корнями и положительна вне отрезка $[1; 5]$, а ось симметрии имеет вид $x=3$.

Три случая поведения параболы

Чем больше значение дискриминанта, тем больше точек пересечения с осью Ox и тем заметнее различие между случаями.

Дискриминант сразу связывает число корней с видом графика: две точки, касание или отсутствие пересечений.



Школьный курс алгебры, 9 класс



Что даёт исследование квадратного трёхчлена



Исследование квадратного трёхчлена помогает быстро находить корни, вершину и знак выражения на промежутках. Эти умения нужны для решения уравнений, неравенств и понимания графика параболы в 9 классе.