



Тела вращения возникают из плоской фигуры при повороте вокруг оси и изучают их объёмы и поверхности.



Фигуры вращения: основные тела и их свойства

Зачем изучать фигуры вращения в 11 классе



Фигуры вращения связывают плоскую геометрию со стереометрией: они нужны для объёмов, площадей поверхностей и задач на сечения. Этот мост к пространству опирается на идеи Архимеда и встречается в архитектуре и технике.

01

Тело вращения получают при полном повороте плоской фигуры вокруг оси вращения на 360° . Во время поворота каждая точка фигуры описывает окружность.

02

Радиус окружности определяется расстоянием от точки фигуры до оси. Эта геометрическая зависимость задаёт размеры будущего объёмного тела.

03

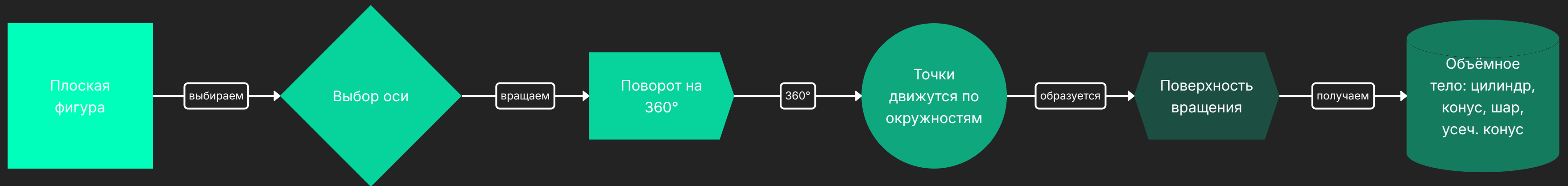
Граница тела формируется поверхностью, полученной движением прямой или кривой, и основаниями, если они существуют. В школьной стереометрии рассматривают цилиндр, конус, шар и усечённый конус.

Определение тела вращения



Как образуется тело вращения

От плоской фигуры к объёмному телу через ось вращения и движение точек по окружностям.



01

Прямой круговой цилиндр имеет два равных круговых основания и боковую поверхность, образованную параллельными образующими. Радиус основания r , диаметр $2r$ и высота h задают размеры.

02

Образующая цилиндра обозначается l ; для прямого цилиндра она совпадает с высотой, то есть $l = h$. Это связывает длину боковой стороны с высотой тела.

03

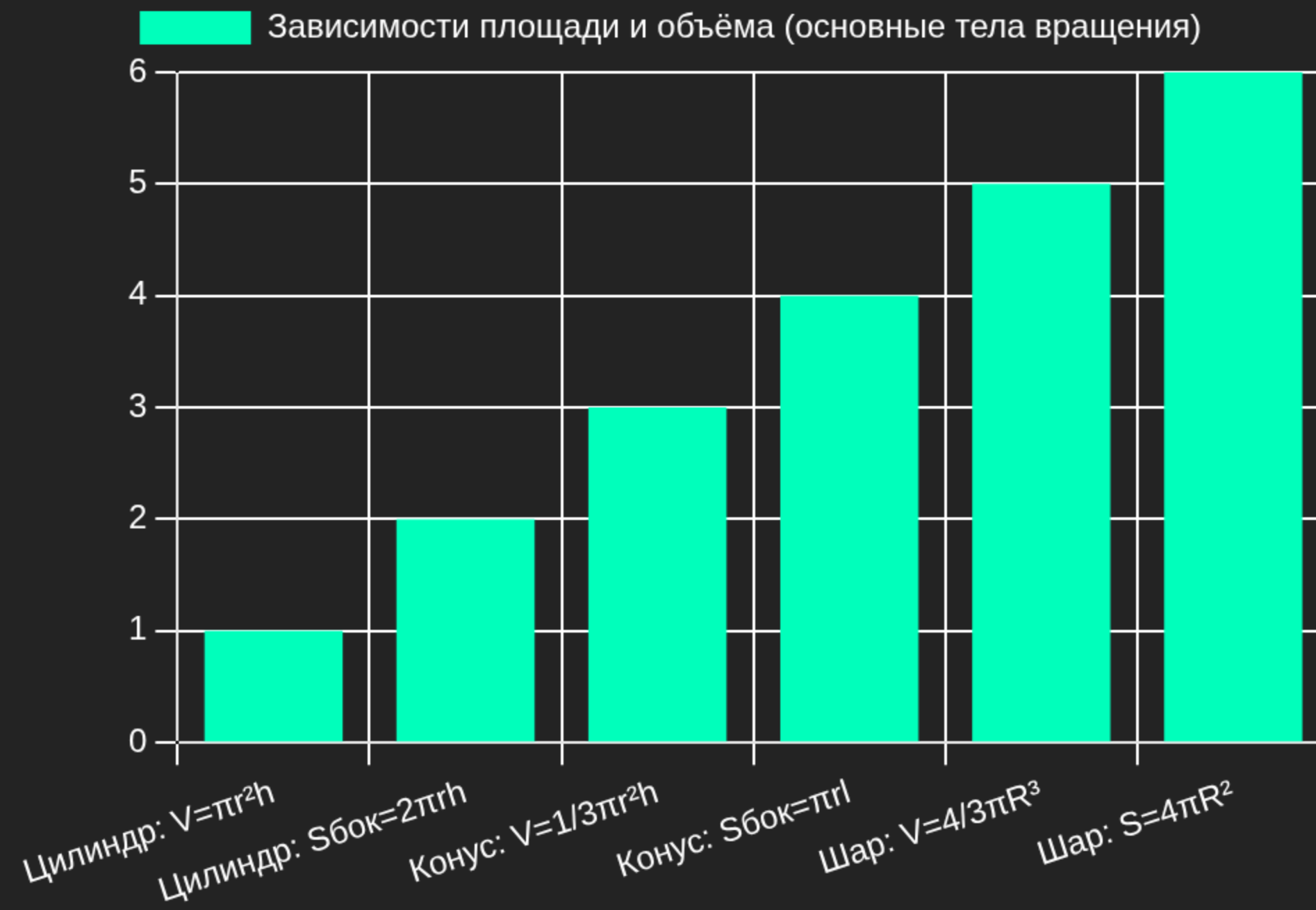
Осевое сечение цилиндра — прямоугольник со сторонами $2r$ и h . Площадь основания равна πr^2 , а боковой поверхности — $2\pi r h$, что удобно для вычислений.

04

В задачах полезно различать основания и боковую поверхность: полная площадь складывается из двух оснований и боковой части, а объём зависит от площади основания и высоты.

Цилиндр: элементы и основные свойства

Формулы площади и объёма тел вращения



Ключевое различие — в том, как входит высота: у цилиндра и конуса объём прямо пропорционален h , а у шара он определяется только радиусом.

По выбранным формулам видно, что для тел с «основанием» объём строится через площадь основания и высоту, тогда как у шара вся геометрия упакована в R .

Базовые формулы школьного курса геометрии (без привлечения внешних данных).

Конус как результат вращения прямоугольного треугольника

01

Прямой круговой конус получают, если вращать прямоугольный треугольник вокруг одного из его катетов. При этом второй катет становится радиусом основания, а высота — осью симметрии.

02

Основные элементы конуса: вершина и основание, радиус основания r , высота h , а также образующая l . Образующая соединяет вершину с точкой окружности основания.

03

Для прямого конуса выполняется соотношение $l^2 = r^2 + h^2$. Оно следует из теоремы Пифагора и помогает находить неизвестную величину в задачах, а объём равен $1/3\pi r^2 h$.

Шар: самое симметричное тело вращения



Геометрическое происхождение шара

Шар появляется при вращении полуокружности вокруг её диаметра. Во время вращения каждая точка полуокружности сохраняет одно и то же расстояние до центра, поэтому поверхность получается «равномерной» со всех сторон.

Единственный параметр — радиус

Радиус R задаёт сразу и площадь поверхности $S = 4\pi R^2$, и объём $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Благодаря высокой симметрии шар легко моделировать: достаточно выбрать R — и все размеры определяются автоматически.

Сравнение основных тел вращения

Тело	Элементы	Объём	Характерное сечение
Цилиндр	r, h	$\pi r^2 h$	прямоугольник
Конус	r, h, l	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	равнобедренный треугольник
Шар	R	$\frac{4}{3}\pi R^3$	окружность
Усеч. конус	R, r, h, l	$\frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$	тоже окружность

В таблице показаны образующие фигуры, ключевые элементы, формула объёма и характерное сечение для цилиндра, конуса, шара и усечённого конуса.

Объём у всех четырёх тел выражается через радиусы, а высота дополнительно входит у тел с «двумя уровнями» оснований — цилиндра, конуса и усечённого конуса.

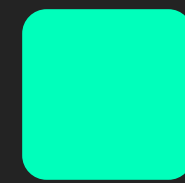
Школьный курс стереометрии и формулы тел вращения.

Сечения тел вращения плоскостью



Окружность при параллельности основанию

Если плоскость параллельна основанию цилиндра или конуса, то сечение образует окружность. Такое сечение помогает быстро понять тип фигуры без сложных преобразований.



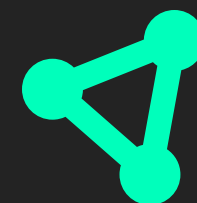
Осевое сечение цилиндра

Осевое сечение цилиндра проходит через ось и даёт прямоугольник. Его стороны связаны с высотой и диаметром основания, поэтому параметры тела читаются прямо по чертежу.



Осевое сечение конуса

Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник. По его основанию и высоте можно восстановить радиус и высоту исходного конуса при решении задач.



Осевое сечение шара и усечённого конуса

Осевое сечение шара — окружность. Для усечённого конуса при параллельности основаниям тоже получается окружность, а её радиус изменяется от одного основания к другому.

Ключевой коэффициент $1/3$ появляется в формуле V усечённого конуса и делает вычисления сравнимыми с полным конусом, а также удобными для задач на масштаб.



$1/3$

Множитель $1/3$ в формуле объёма подчёркивает, что усечённый конус заполняет часть объёма «полного» конуса при сохранении геометрии.

Школьный курс геометрии, формула объёма усечённого конуса (11 класс).

Как зависит объём от радиуса и высоты



При фиксированной высоте объём цилиндра и конуса растёт вместе с площадью основания, то есть как квадрат радиуса.

Из диаграммы видно: шар реагирует на изменение масштаба сильнее — рост радиуса в 2 раза даёт увеличение объёма в 8 раз.

Зависимости в формулах объёма:
 $V_{\text{цил}} = \pi r^2 h$, $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, $V_{\text{шар}} = \frac{4}{3} \pi R^3$;
расчёт при $r \rightarrow 2r$ и $h \text{ const}$.

Фигуры вращения в реальных объектах



Трубы и трубопроводы

Цилиндр помогает при проектировании труб: внутренняя полость и материал описываются радиусом и длиной. Это облегчает расчёт вместимости, пропускной способности и оценку количества материала.



Купола и опоры

Шарообразные и купольные формы применяют для создания прочных конструкций. Благодаря симметрии нагрузки распределяются равномернее, а форма удобна для расчёта и моделирования в технике.



Колёса и втулки

Цилиндрическая форма колёсных дисков и втулок удобна, когда нужна одинаковая толщина и предсказуемый объём материала. Геометрия задаёт размеры без сложных расчётов для каждого сечения.



Воронки и распределители

Конус и усечённый конус используют там, где поток нужно направить или сузить. По модели можно оценить объём «рабочей части» и подобрать размеры, чтобы геометрия совпала с требуемой формой струи.



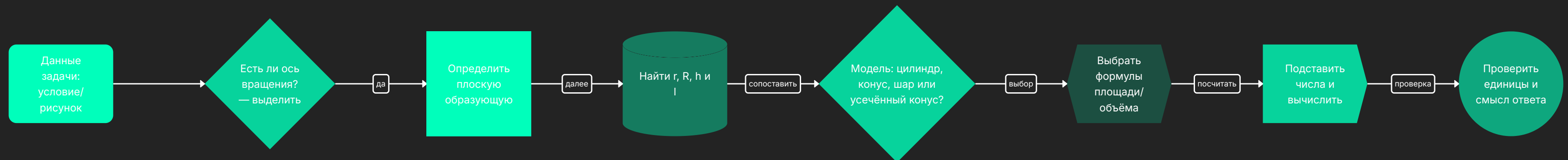
Бутыли, абажуры и ёмкости

Усечённый конус встречается в посуде и деталях с расширением или сужением. Зная два радиуса и высоту, можно точно вычислить объём и связать его с реальными габаритами предмета.

Алгоритм распознавания тела вращения

В задаче

Логическая схема для работы с условиями, чертежами и вычислениями



Типичные ошибки в задачах по теме

01

Путают радиус и диаметр: вместо $2r$ подставляют r (или наоборот), из-за чего «съезжают» как площади, так и объёмы. Особенно заметно это в формулах πr^2 и $\pi r(r+h)$.

02

Смешивают высоту h и образующую l у конуса: тогда теорема Пифагора применяется к неверным отрезкам. В результате ошибается $l^2 = r^2 + h^2$, а вместе с ним и объём конуса.

03

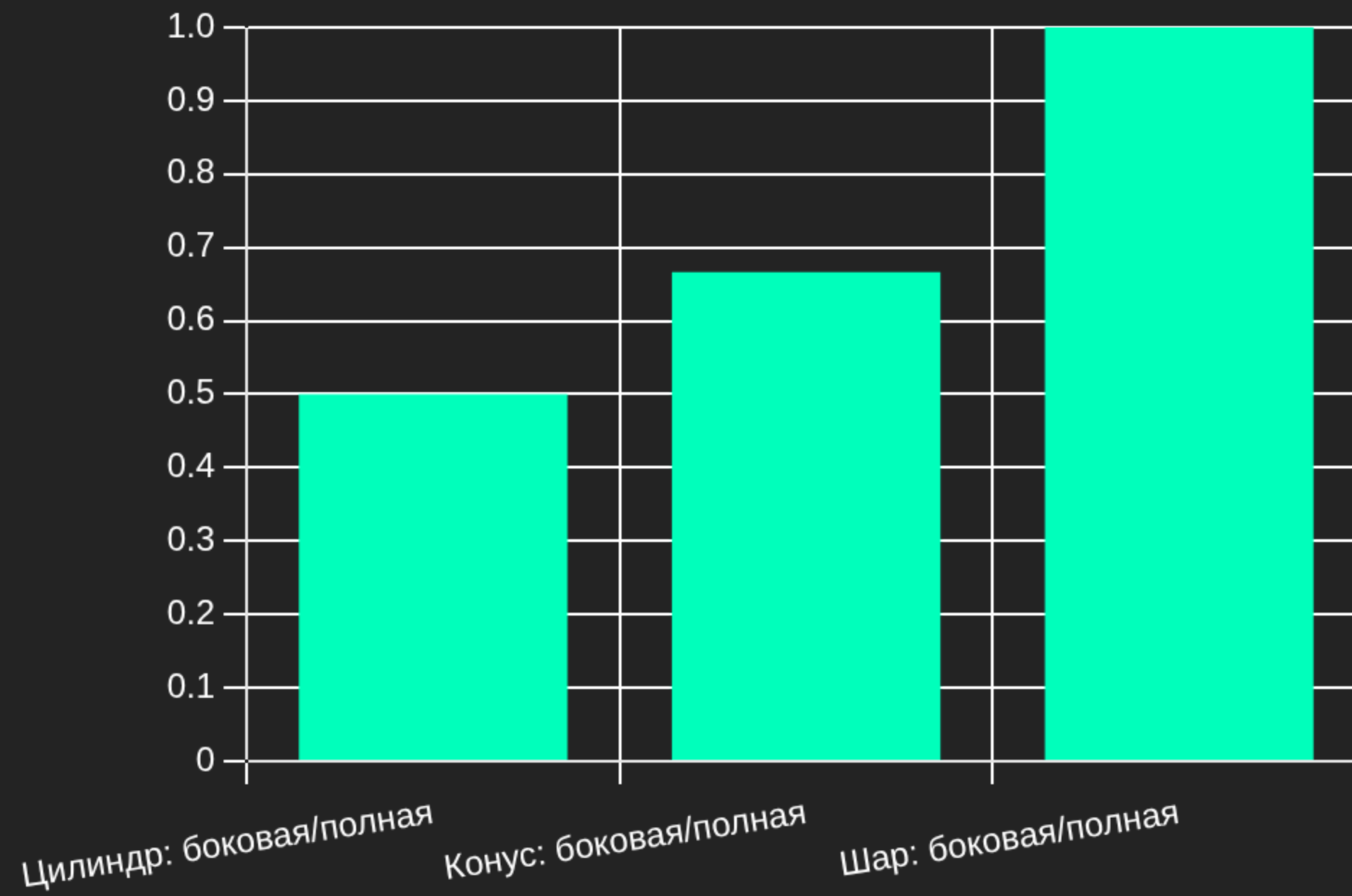
Забывают множитель $1/3$ в формуле объёма конуса ($V = 1/3 \pi r^2 h$). В итоге получают значение в три раза больше нужного, хотя остальные вычисления сделаны верно.

04

В задачах на поверхности берут не ту величину: используют полную поверхность вместо боковой (или наоборот). Для усечённого конуса особенно важно, что в объёме участвуют оба радиуса R и r .

Сравнение боковой и полной поверхности тел вращения

Доли боковой поверхности в полной (иллюстрация при $h=R$ и для конуса l полученс



Внутри диаграммы доли показаны для частного случая: у цилиндра высота равна радиусу, у конуса используется стандартная связь образующей с r и h .

Цилиндр даёт «равновесие» между боковой частью и основаниями, шар целиком совпадает с полной поверхностью, а у конуса боковая доля заметно больше.

Доли рассчитаны по определениям: для цилиндра $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2\pi r^2$; для конуса $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + \pi r^2$; для шара $S_{\text{полн}} = 4\pi R^2$.

Модель, чертёж и реальный объект



Стакан как геометрия усечённого конуса

Если на чертеже видны два радиуса R и r , высота h и образующая l , стакан легко превращается в математическую модель. В жизни это помогает понять вместимость: одинаковая форма даёт предсказуемый объём при измеримых размерах.



Мяч и точные формулы объёма

Мяч напоминает, что шар задаётся одним параметром — радиусом R . На чертеже центру соответствует ось симметрии, а все точки поверхности одинаково удалены от неё. Поэтому связка «площадь—объём» получается единой.



Дорожный конус и поиск образующей

У дорожного конуса важны не только радиус и высота, но и образующая: именно она определяет «наклон» поверхности. На рисунке это связывается треугольником, что делает теоретические расчёты понятными и проверяемыми на практике.

Связь темы с другими разделами математики

Теорема Пифагора

При выводе связей для конуса и образующей появляется прямоугольный треугольник с катетами r и h , а гипотенанузой l . Тогда $l^2 = r^2 + h^2$ становится инструментом вычислений.

Площади и объёмы в приложениях

Формулы площади и объёма из геометрии напрямую применяются в физике и технологии: вместимость, масса, плотность, а также анализ формы деталей и расхода материала.

Подобие и пропорции

Масштабирование размеров переводит формулы в зависимости вида $V \propto r^2 h$ или $V \propto r^3$. Это помогает решать задачи на «увеличили в k раз» без повторных вычислений.

Элементы тригонометрии

В задачах встречаются связи углов с длинами в треугольниках образующей. Тригонометрические отношения позволяют найти радиусы и высоты по дополнительным данным.

Формулы, которые нужно знать по теме

Сводка формул для четырёх основных тел вращения: цилиндра, конуса, шара и усечённого конуса. Выбор зависит от того, сколько радиусов и как задана высота.

Тело	$S_{бок}$	$S_{полн}$	V
Цилиндр	$2\pi rh$	$2\pi r(r+h)$	$\pi r^2 h$
Конус	πrl	$\pi r(r+l)$	$1/3\pi r^2 h$
Шар	—	$4\pi R^2$	$4/3\pi R^3$
Усеч. конус	—	—	$1/3\pi h(R^2+Rr+r^2)$

По таблице видно: у шара нет «оснований», а у усечённого конуса объём зависит от двух радиусов и высоты. Для цилиндра и конуса ключевыми параметрами остаются r , h и образующая l .

Школьный курс геометрии: формулы площадей и объёмов тел вращения (11 класс).

Итоги по теме «Фигуры вращения»

Фигуры вращения соединяют плоскую и пространственную геометрию: их определяют ось, радиусы, высота, образующая и характерные сечения. В 11 классе важно уверенно распознавать тело и применять формулы площади и объёма.