

Операции над свободными векторами

Как сравнивать, складывать и изменять
векторы без привязки к месту?



Векторы соединяют числа и направление

На этой теме алгебра и геометрия работают вместе: числа описывают не только величину, но и направление. Это помогает решать задачи на координатной плоскости, строить фигуры и понимать движение в реальных ситуациях.



Что такое свободный вектор

1. Три признака

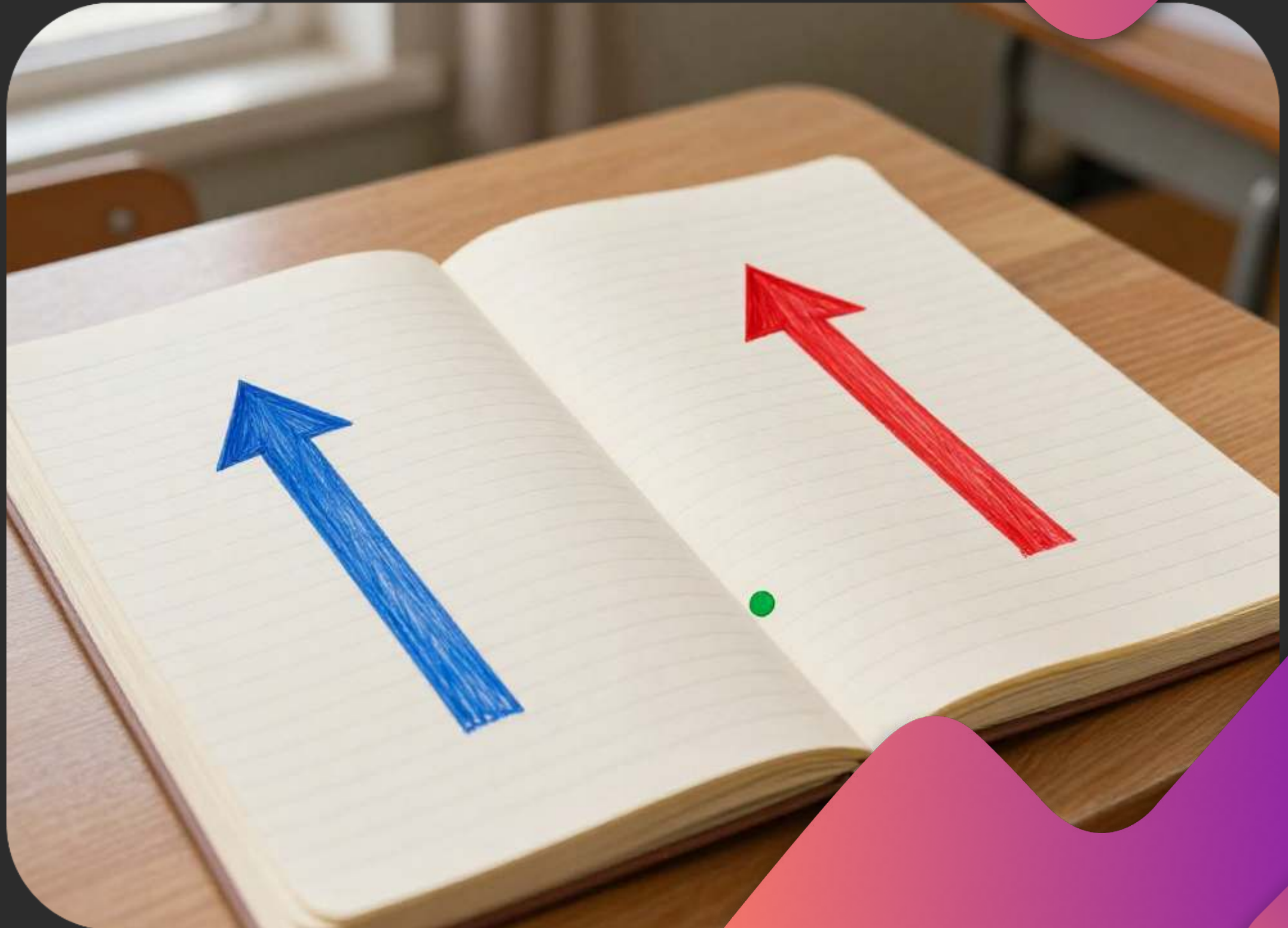
Свободный вектор определяется длиной, направлением и ориентацией стрелки. Именно эти признаки позволяют отличать один вектор от другого, даже если они изображены в разных местах чертежа.

2. Перенос без изменения

Такой вектор можно параллельно перенести в любую точку плоскости. После переноса его длина и направление сохраняются, поэтому он остаётся тем же самым вектором.

3. Обозначения и нулевой вектор

Векторы обозначают как $\vec{a}$, $\vec{b}$ или $\vec{AB}$. Нулевой вектор имеет длину 0, не задаёт направления и служит важным особым случаем при вычислениях.



Равные и противоположные векторы

Равные векторы

Равные векторы имеют одинаковую длину и одно направление, даже если расположены в разных местах рисунка. Для сравнения важны только их геометрические свойства, а не положение на чертеже.

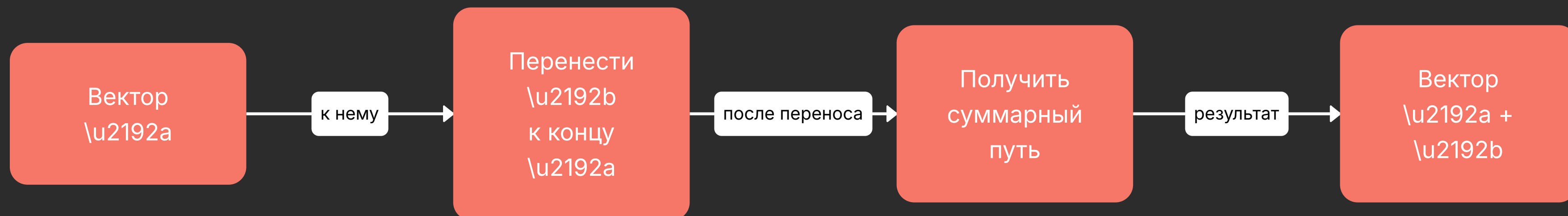
Противоположные векторы

Противоположные векторы равны по длине, но направлены в разные стороны. Они удобны для записи вычитания и помогают быстро переходить от одного вектора к другому.



Сложение векторов: правило треугольника

Построение суммы двух векторов через последовательное откладывание



Правило параллелограмма для сложения векторов

Общая точка

Если два вектора выходят из одной точки, их удобно рассматривать как соседние стороны параллелограмма. Такое построение сразу показывает, как связаны направления исходных векторов.

Диагональ как сумма

Диагональ, проведённая из общей начальной точки, изображает сумму двух векторов. Она показывает не отдельный шаг, а общий результат двух направлений одновременно.

Подписи на рисунке

На чертеже обычно подписывают векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а затем отмечают диагональ $\vec{a} + \vec{b}$. Это помогает не перепутать стороны фигуры и итоговый вектор.



Какие операции над векторами используются чаще всего



На практике особенно часто нужны действия, которые быстро дают ответ в координатах и удобно проверяются на рисунке.

Самыми полезными оказываются сложение по координатам и умножение на число: они встречаются чаще и проще всего применяются в задачах.

Обобщение содержания темы «Операции над свободными векторами»

Вычитание векторов

1.

Сводим к сложению

Вычитание вектора удобно понимать как сложение с противоположным вектором: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Так правило становится таким же понятным, как обычное сложение.

2.

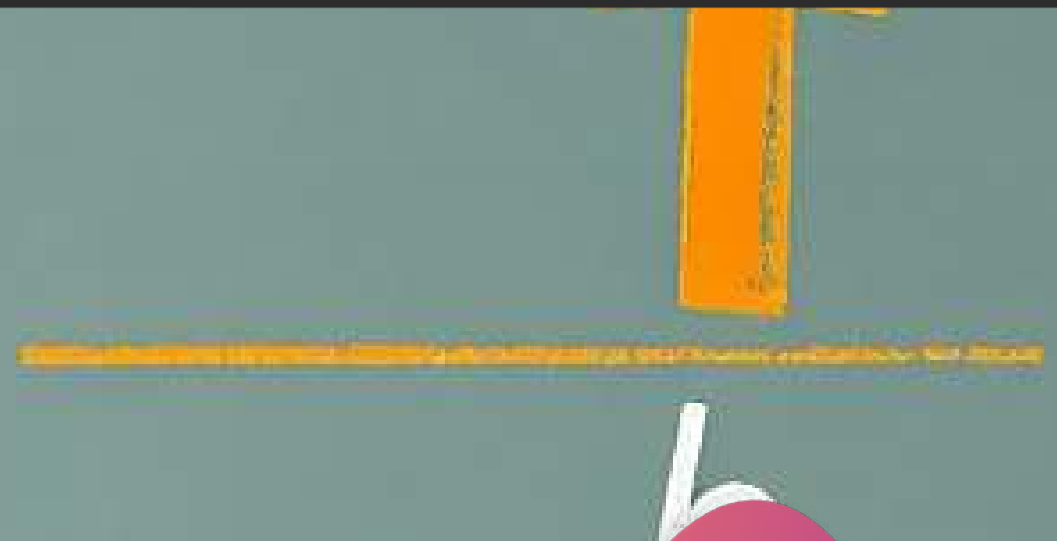
Строим противоположный

Сначала изображают вектор, противоположный $\vec{b}$: он имеет ту же длину, но обратное направление. Затем его откладывают по правилу сложения и получают разность.

3.

Смысл разности

Разность показывает, какой вектор нужно добавить к $\vec{b}$, чтобы получить $\vec{a}$. Поэтому вычитание помогает сравнивать два перемещения и видеть между ними «недостающий шаг».



Основные операции и их свойства

Операция	Запись	Смысл	Свойство
Равенство	$\rightarrow a = \rightarrow b$	совпадают	длина и направление
Сложение	$\rightarrow a + \rightarrow b$	общий результат	правило треугольника
Вычитание	$\rightarrow a - \rightarrow b$	разность	через противоположный
Умножение	$k\rightarrow a$	изменение длины	меняет масштаб

Обобщение правил работы со свободными векторами

Таблица показывает, как записываются основные операции и что они означают геометрически.

У всех операций есть чёткий геометрический смысл, поэтому вычисления можно выполнять без привязки к одному месту на рисунке.

Умножение вектора на число

Положительное число

Если число положительное, направление вектора сохраняется. Меняется только длина: она становится в $|k|$ раз больше или меньше, чем у исходного вектора.

Отрицательное число

При умножении на отрицательное число вектор поворачивается в противоположную сторону. Длина при этом всё равно равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, то есть зависит только от модуля числа.

Нулевой множитель

Когда $k = 0$, получается нулевой вектор. Его длина равна 0, а направления нет, поэтому он служит особым результатом умножения.

Правило длины

Для любого числа длина нового вектора вычисляется по формуле $|k| \cdot |\vec{a}|$. Это удобно для проверки ответа и для быстрых оценок в задачах.



Координаты вектора на плоскости

Пара чисел

Координаты вектора записывают как пару чисел $(x; y)$. Первое число показывает, на сколько нужно сместиться по горизонтали, а второе — по вертикали, сохраняя направление стрелки.

Связь с точкой конца

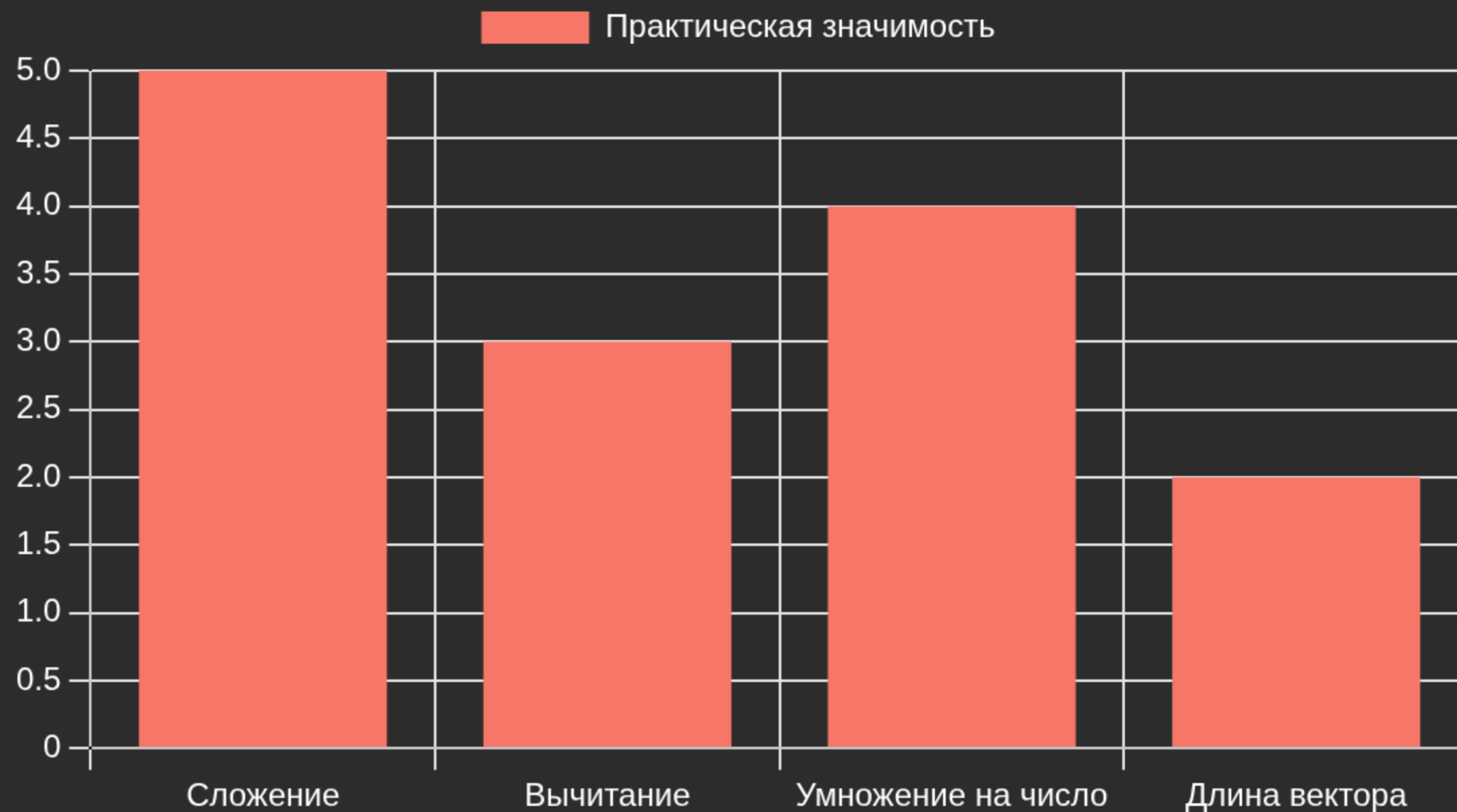
Если вектор начинается в начале координат, то его координаты совпадают с координатами конечной точки. Поэтому вектор $\vec{OA}$ можно читать прямо по положению точки A на плоскости.

Что видно на рисунке

На чертеже обычно изображают оси x и y , точку O и точку A . Такой рисунок помогает быстро определить координаты вектора и понять, как он расположен относительно осей.



Координатные действия с векторами

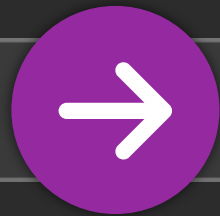


Учебная схема по теме «Операции над свободными векторами»

В координатах удобно видеть не только результат, но и ход вычислений: каждая операция выполняется отдельно по оси x и по оси y .

Самыми полезными оказываются сложение и умножение на число: они чаще встречаются в задачах и проще проверяются по координатам.

Разложение вектора по осям



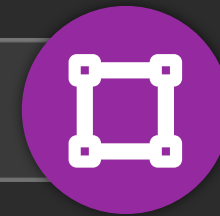
Горизонтальная часть

Одна составляющая показывает движение вдоль оси x . Она отвечает за правое или левое смещение и помогает увидеть, как вектор меняет положение относительно вертикали.



Вертикальная часть

Вторая составляющая показывает смещение вверх или вниз вдоль оси y . Вместе с горизонтальной частью она полностью задаёт вектор и упрощает поиск его координат.

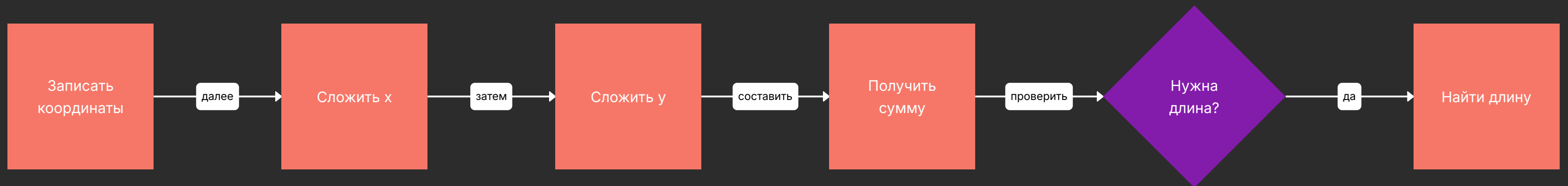


Сумма проекций

Если сложить две перпендикулярные составляющие, получится исходный вектор. Такой способ полезен при построении сложных фигур и при вычислении длины по известным координатам.

Как найти сумму векторов по координатам

Последовательность действий при сложении векторов в координатной плоскости



Примеры вычислений с координатами

Действие	Результат
$a+b$	$(-1; 5)$
$a-b$	$(5; -3)$
$2a$	$(4; 2)$
$-b$	$(3; -4)$

В таблице показано, как координаты меняются при разных действиях с векторами. Во всех примерах каждая координата обрабатывается отдельно.

Координаты не смешиваются: x считается по своему правилу, y — по своему. Это делает вычисления прозрачными и удобными для проверки.

Применение векторов в геометрии

1. Параллельность

Если два отрезка задаются равными векторами, можно сделать вывод об их параллельности и одинаковом направлении. Это помогает доказывать свойства фигур без лишних построений.

2. Середины и смещения

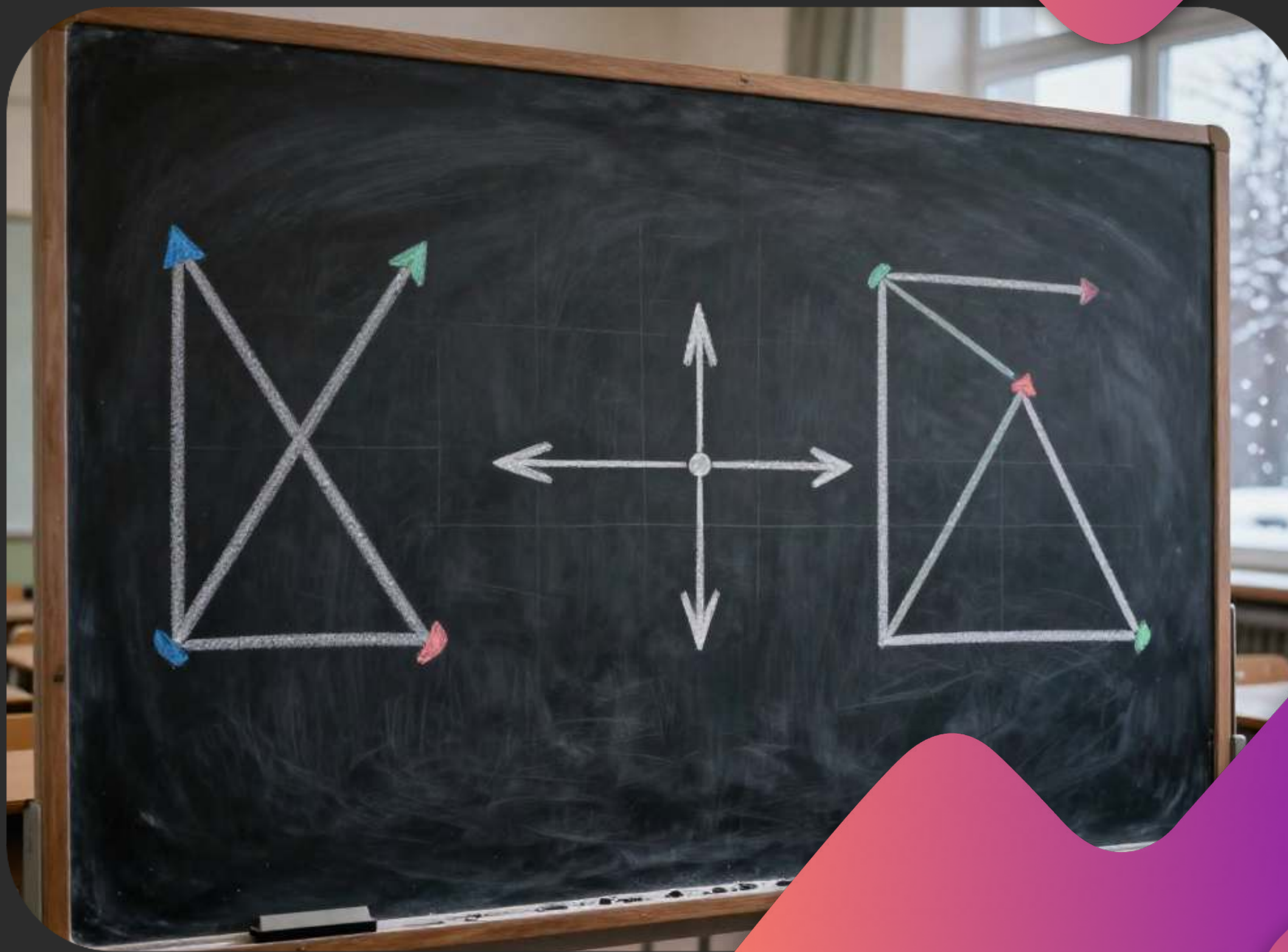
Векторный способ позволяет описывать, как одна точка переходит в другую, а также находить середину стороны через равные части. Такое описание особенно удобно в координатной плоскости.

3. Параллелограмм и треугольник

В задачах о параллелограмме и треугольнике векторы помогают быстрее установить равенство сторон и найти нужные отрезки. Решение получается короче и нагляднее, чем при одном только измерении.

4. Проверка построений

Когда фигура уже начерчена, векторы позволяют проверить, верно ли сохранены длины и направления. Это полезно при решении задач на построение и при работе с чертежом.



Векторы вокруг нас

Велосипедист на дороге

Когда велосипедист едет вперёд, важны не только скорость движения, но и направление дороги. Если он поворачивает, меняется вектор движения, хотя сам велосипед остаётся тем же. Именно поэтому на схеме удобнее показывать стрелку, а не только число скорости.



Лодка и течение реки

Лодка может плыть в одну сторону, а течение — в другую. Чтобы понять её путь, нужно учитывать оба направления одновременно. Векторная запись помогает увидеть, куда реально сместится лодка относительно берега, и не перепутать движение с результатом.

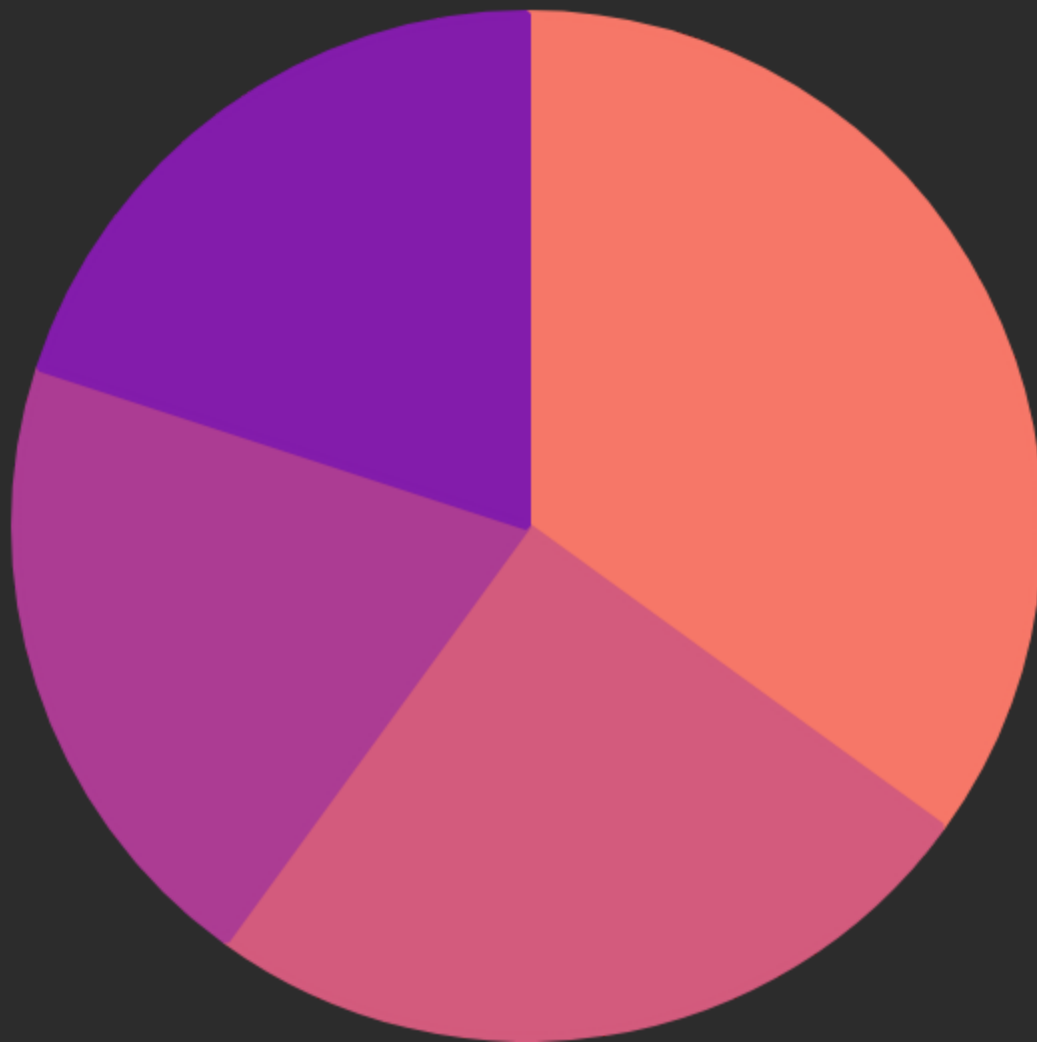
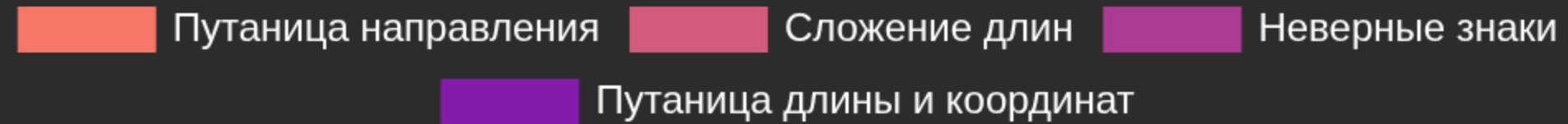


Ветер и перемещение предметов

Ветер толкает листья, бумажные самолётики и облака в определённую сторону. Если указать только силу ветра без направления, картина будет неполной. Вектор делает описание точным: показывает, насколько сильно и куда именно происходит перемещение.



Типичные ошибки при работе с векторами



Чаще всего трудности появляются, когда ученик смотрит только на длину или забывает про знак координаты. На рисунке важно видеть стрелку целиком.

Самая заметная проблема — игнорирование направления. Если следить за стрелкой и знаками координат, большинство ошибок можно быстро исключить.

Проверка результата векторного действия

1.

Сравнить с рисунком

Сначала нужно посмотреть, совпадает ли полученный вектор с чертежом по направлению и положению стрелки. Если ответ не согласуется с рисунком, вычисления стоит перепроверить.

2.

Проверить знаки

Далее сравнивают знаки координат с ожидаемым смещением по осям. Правильные знаки показывают, в какую сторону вектор направлен: вправо, влево, вверх или вниз.

3.

Оценить длину

После этого проверяют, соответствует ли длина результата действию над векторами. Если вектор умножали на число, его длина должна измениться именно в этом отношении.

4.

Использовать нулевой вектор

Нулевой вектор удобен как контрольный случай: его координаты равны $(0; 0)$, а длина равна 0. Если расчёт даёт такие значения, это хороший знак правильности.



Векторы: кратко о главном

Свободные векторы можно переносить параллельно, не меняя их длину и направление. Сложение, вычитание и умножение на число работают по чётким правилам и помогают решать задачи в геометрии, алгебре и физике.

