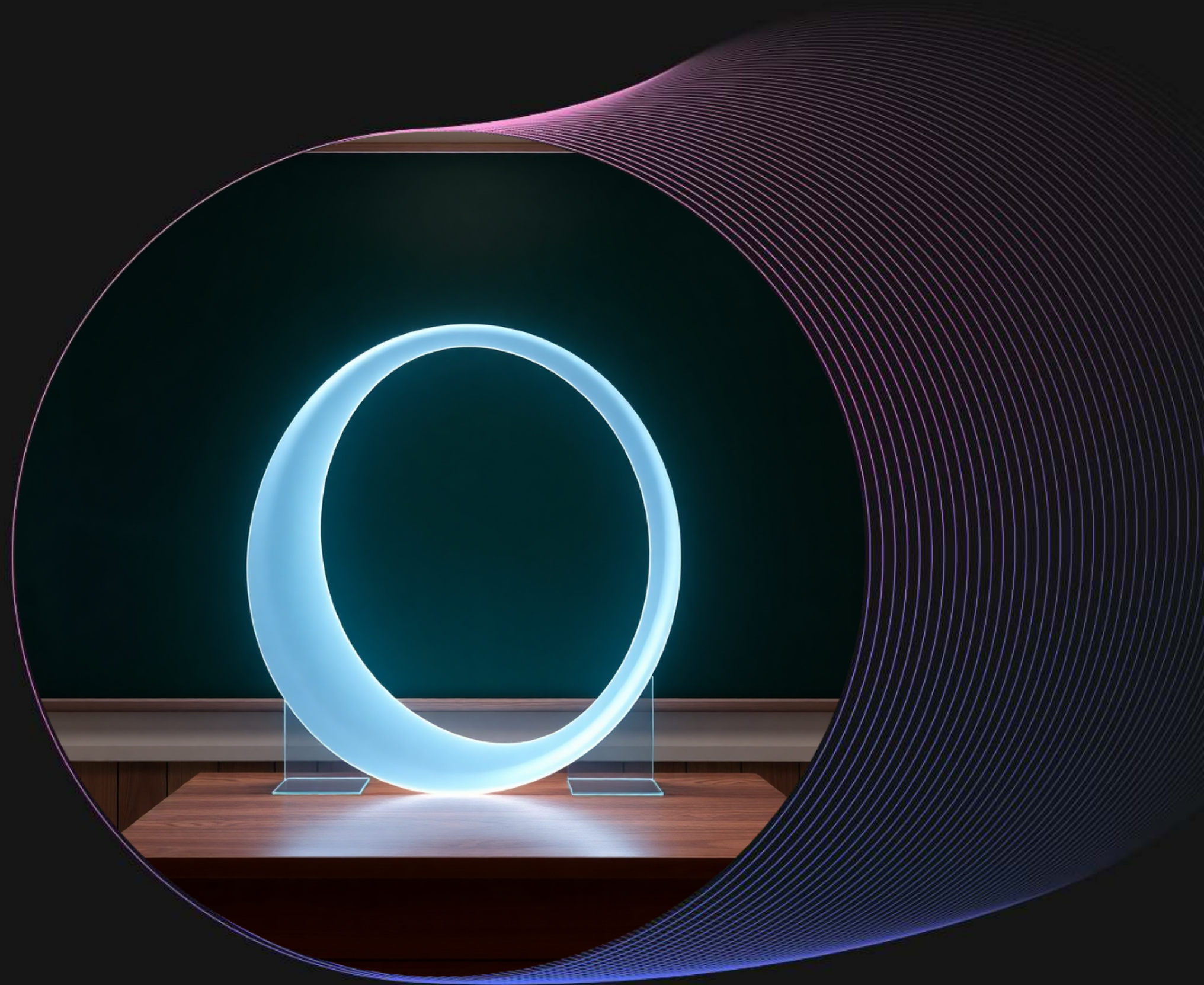


Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$: свойства, графики и различия

Изучаем дробные функции, их графики, асимптоты и ключевые отличия.



Зачем нужны отрицательные степени

Степени с отрицательным показателем помогают увидеть связь между степенями и дробями. Формулы $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$ встречаются в задачах на обратную зависимость и в простых физических моделях.



Отрицательная степень как запись дроби

Правило записи

Отрицательный показатель степени переводит число в знаменатель. Поэтому x^{-1} означает $1/x$, а x^{-2} — $1/x^2$. Такая запись сокращает длинные дроби и делает формулы компактнее.

Пример для $x = -2$

Если $x = -2$, то $(-2)^{-1} = -1/2$, а $(-2)^{-2} = 1/4$. Знак меняется только у первой функции, потому что возведение в квадрат убирает минус.

Пример для $x = 2$

Если $x = 2$, то $2^{-1} = 1/2$ и $2^{-2} = 1/4$. Видно, что при увеличении показателя степень дробь становится меньше, а значение убывает быстрее.

Что важно запомнить

Отрицательная степень не делает число отрицательным сама по себе. Она только задаёт дробную форму записи, а знак результата зависит от основания и от чётности показателя.



Область определения и область значений

Функция	D(x)	E(y)
$y = x^{-1}$	$x \neq 0$	$y \neq 0$
$y = x^{-2}$	$x \neq 0$	$y > 0$

— Сравним, какие x допустимы и какие y могут получаться у двух функций.

Обе функции не определены при $x = 0$, но у $y = x^{-2}$ значения только положительные, а у $y = x^{-1}$ возможны и положительные, и отрицательные.

По формулам $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$.

Значения функций при одинаковых x

На одних и тех же x легко увидеть разницу в знаке и скорости убывания значений. Особенно заметно это при больших по модулю x .

Функция $y = x^{-2}$ уменьшается быстрее и не меняет знак, тогда как $y = x^{-1}$ может быть отрицательной.

Вычисления по формулам $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$.



Где расположен график каждой функции

1 Положительные x

При $x > 0$ обе функции дают положительные значения. Поэтому в правой половине координатной плоскости их ветви находятся выше оси Ox и постепенно приближаются к ней.

2 Отрицательные x

Для $y = x^{-1}$ при $x < 0$ значения отрицательные, а для $y = x^{-2}$ — положительные. Из-за этого первая функция уходит в III четверть, а вторая остаётся над осью Ox .

3 Сколько ветвей видно

У $y = x^{-1}$ две ветви расположены по разные стороны от начала координат. У $y = x^{-2}$ обе ветви находятся выше оси Ox и выглядят симметрично относительно оси Oy .

4 Главный ориентир

Если график проходит через I и III четверти, это $y = x^{-1}$. Если он лежит в I и II четвертях, значит перед нами $y = x^{-2}$.

Как работать с отрицательной степенью

Последовательность действий помогает быстро исследовать функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$.



Асимптоты и поведение графиков

1 Вертикальная асимптота

У обеих функций есть вертикальная асимптота $x = 0$. Это значит, что при приближении к нулю значения функции становятся очень большими по модулю.

2 Горизонтальная асимптота

Также у обеих функций есть горизонтальная асимптота $y = 0$. Чем больше по модулю x , тем ближе значения функций подходят к нулю.

3 Что происходит у нуля

Рядом с $x = 0$ графики резко поднимаются или опускаются, но точку $x = 0$ не пересекают. Здесь функция просто не имеет смысла.

4 Как ведут себя вдали

При больших положительных и отрицательных x ветви постепенно прижимаются к осям координат. Они приближаются к ним, но не пересекают их.

Сравнение основных свойств функций

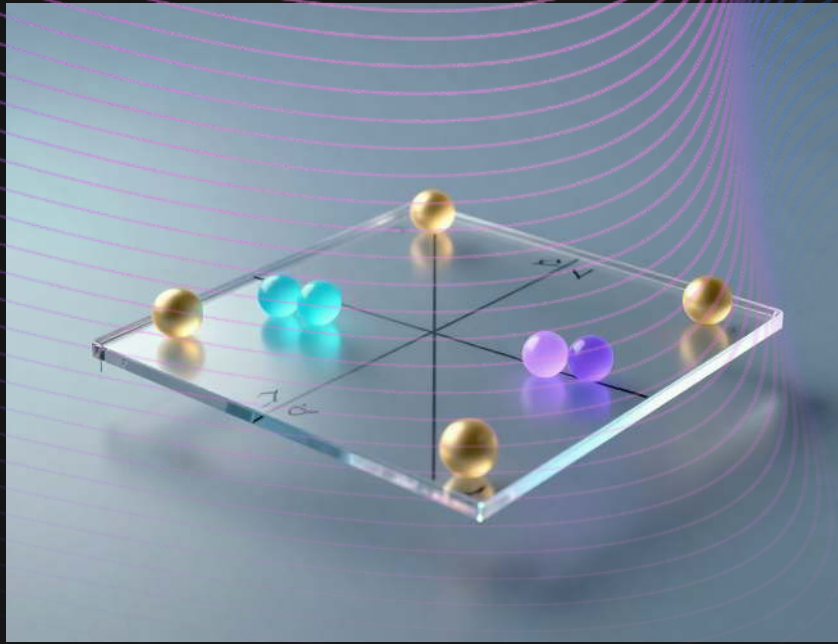
Свойство	$y = x^{-1}$	$y = x^{-2}$
Чётность	нечётная	чётная
Знак	$\pm$	только +
Четверти	I и III	I и II
Точка $x = 0$	нет	нет

Сведём главные признаки двух функций в одну таблицу.

Различие в чётности объясняет симметрию графиков, а различие в знаках — их расположение относительно оси Ox .

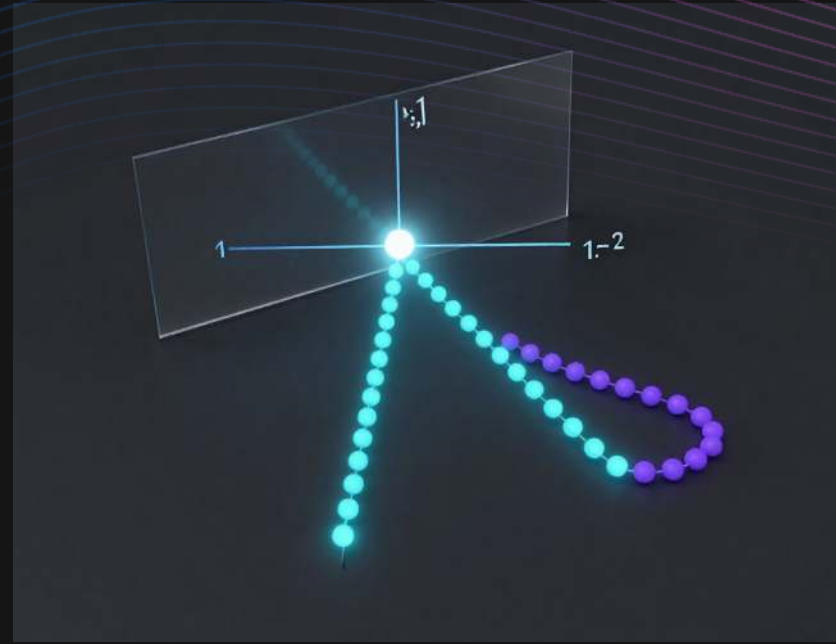
Свойства функций $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$.

Точки, по которым удобно строить графики



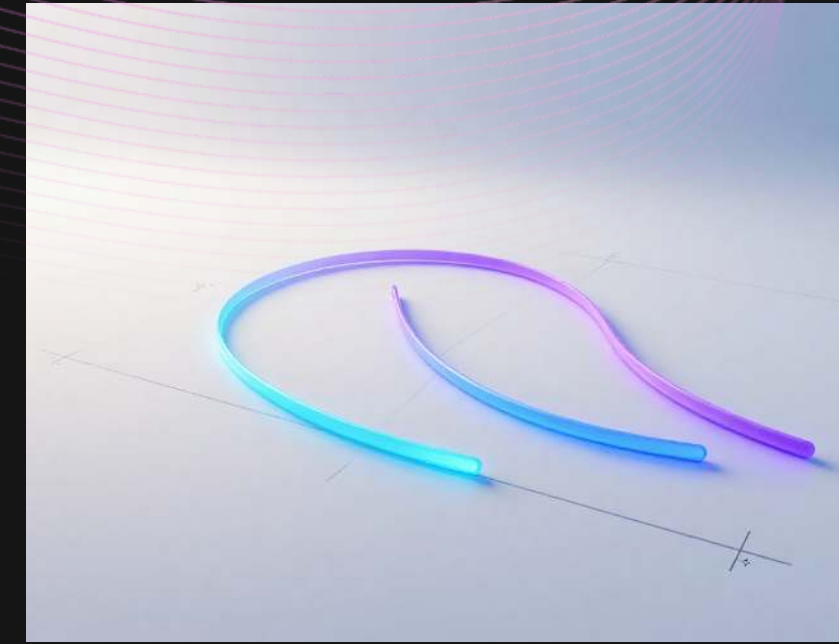
Начинаем с простых значений

Для построения графика удобно брать $x = 1, 2, 4$ и их отрицательные значения. Тогда сразу видно, как меняются значения функций $y = x^1$ и $y = x^2$. По этим точкам легко нанести первые ориентиры на координатной сетке.



Почему точки помогают не ошибиться

Точка $(1; 1)$ подходит для обеих функций, а дальше начинается различие. У $y = x^1$ при отрицательных x появляются отрицательные значения, а у $y = x^2$ все точки остаются выше оси Ox .



Как выглядит плавная линия

После нанесения точек их соединяют плавной кривой, а не отрезками. Так видно, что ветви не пересекают оси координат и постепенно приближаются к ним, оставаясь на своём участке плоскости.



На что смотреть в рисунке

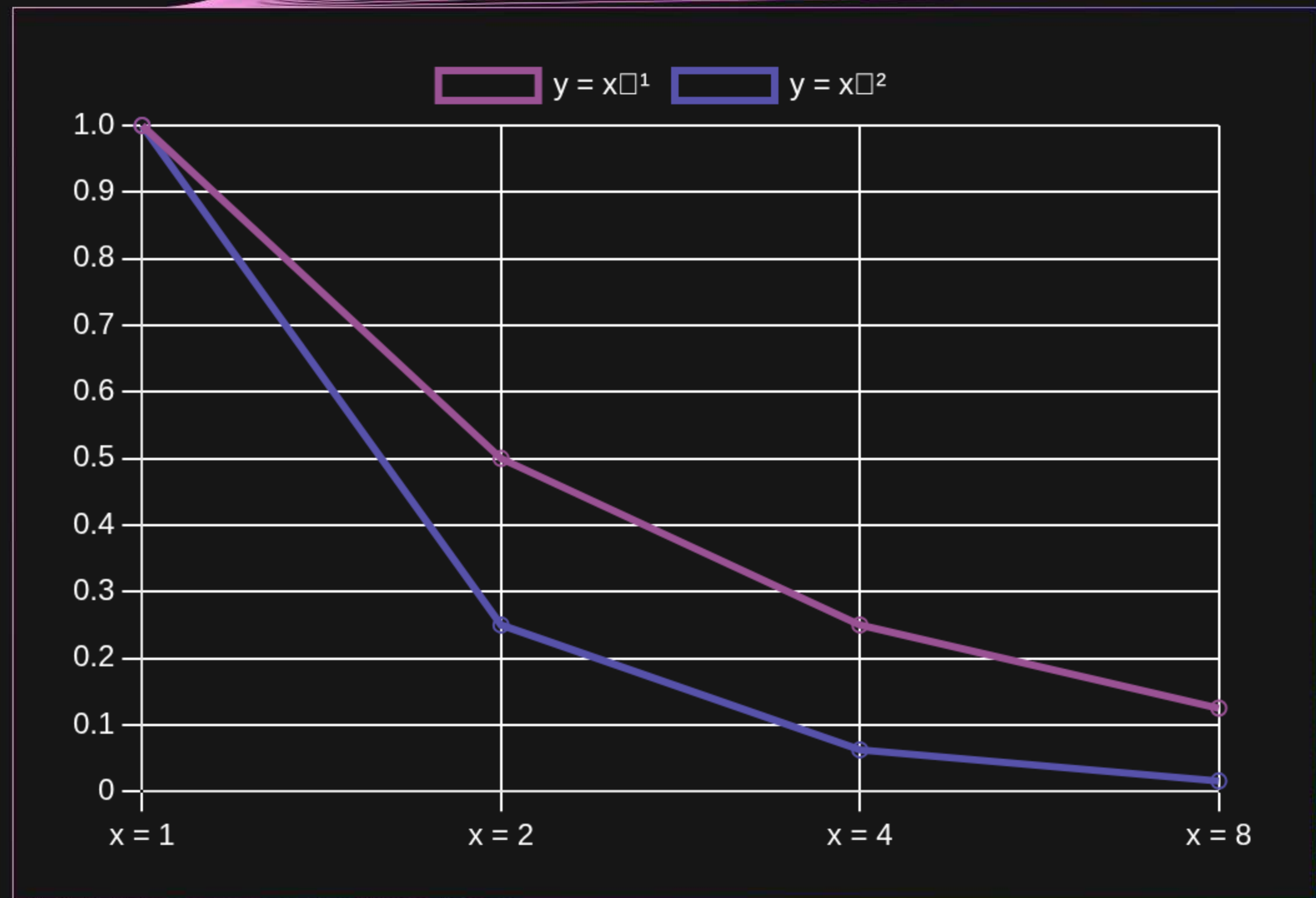
Если одна ветвь оказывается в III четверти, это график $y = x^1$. Если обе ветви расположены над осью Ox и зеркально повторяют друг друга, это $y = x^2$.

Как быстро уменьшаются значения при росте x

Обе функции убывают, но у второй спад заметно резче уже при небольшом увеличении x .

При росте x значения $y = x^{-2}$ приближаются к нулю быстрее, чем у $y = x^{-1}$.

Составлено по значениям функций $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$.



Чётность и нечётность функций



Нечётная функция

Для $y = x^{-1}$ выполняется $f(-x) = -f(x)$. Поэтому график сохраняется при повороте на 180° вокруг начала координат, а его ветви лежат в I и III четвертях.



Чётная функция

Для $y = x^2$ выполняется $f(-x) = f(x)$. Значит, график симметричен относительно оси Oy, а обе ветви находятся выше оси Ox и расположены в I и II четвертях.

Таблица значений для сравнения

x	$y = x^{-1}$	$y = x^{-2}$
-4	-0,25	0,0625
-2	-0,5	0,25
-1	-1	1
1	1	1
2	0,5	0,25
4	0,25	0,0625

— Значения при одинаковых x помогают увидеть, как отличаются знак и скорость убывания двух функций.

При одинаковом $|x|$ функция $y = x^{-2}$ убывает быстрее, а $y = x^{-1}$ меняет знак при отрицательных x .

Значения вычислены по формулам $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$.

Где встречаются обратная и обратноквадратичная зависимости

Время и скорость

Если скорость движения увеличивается, время на тот же путь уменьшается. Это простой пример обратной пропорциональности, который легко увидеть в повседневных задачах.

Свет и расстояние

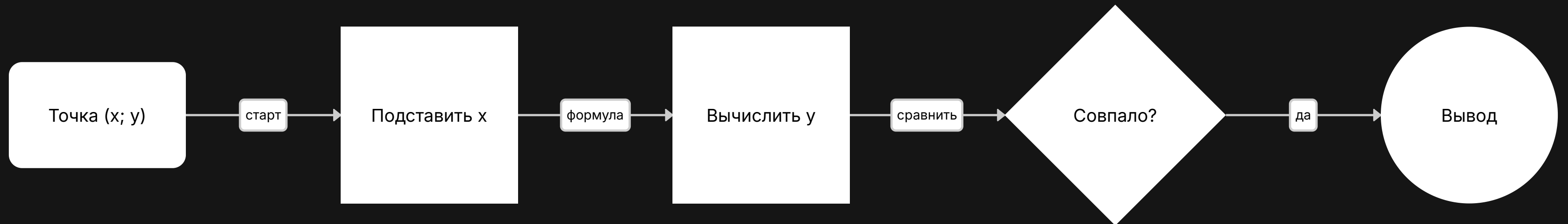
Освещённость и сила притяжения могут уменьшаться очень быстро при увеличении расстояния. При удвоении расстояния действие становится в 4 раза слабее.

Математический СМЫСЛ

Такие примеры показывают, что переменная в знаменателе описывает убывание величины. Именно поэтому дробные записи со степенями помогают моделировать реальные процессы.

Как проверить точку на принадлежность графику

Алгоритм подстановки координат в формулу функции $y = x^1$ или $y = x^2$.

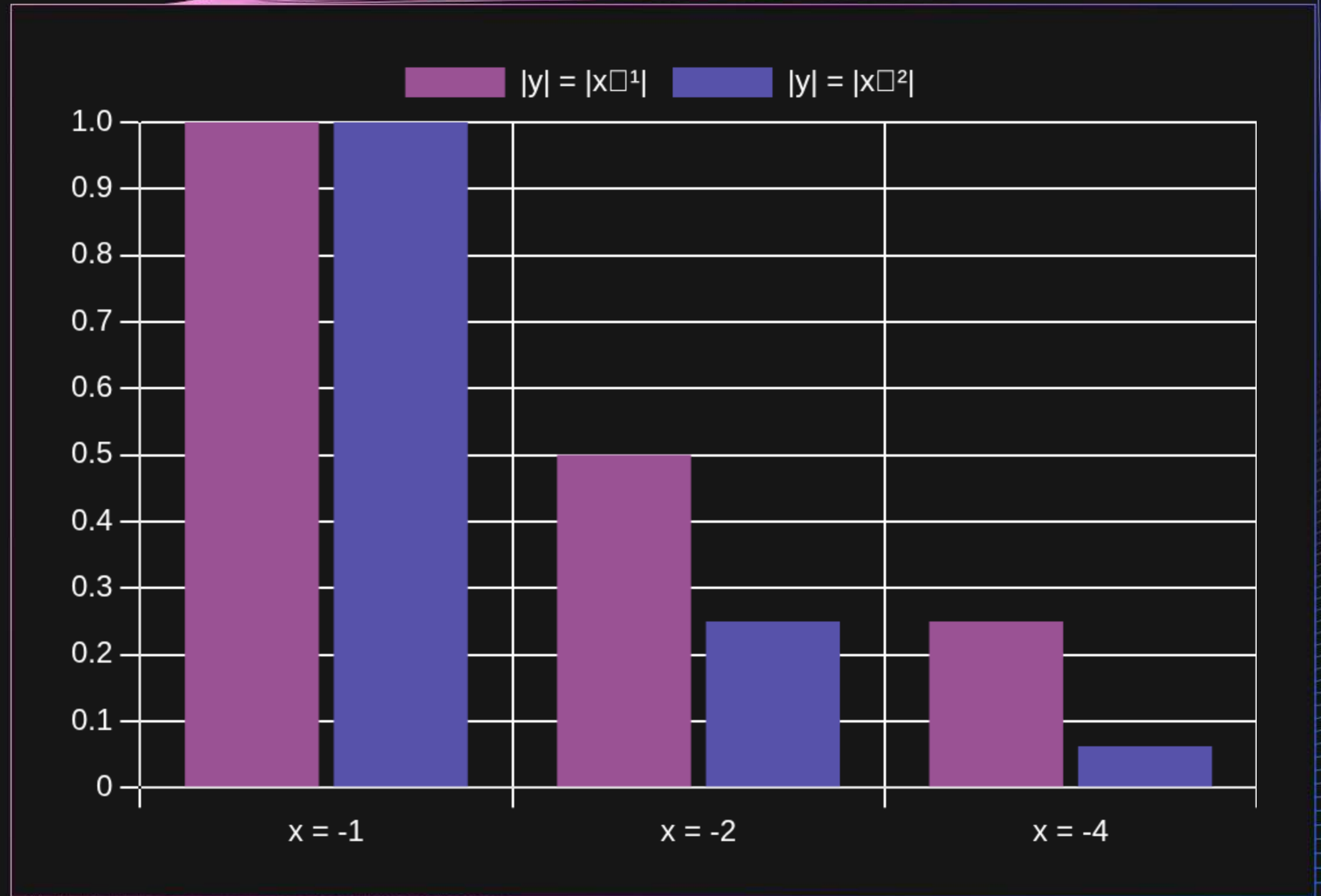


Сравнение модулей значений при отрицательных x

При отрицательных x обе функции можно сравнивать по модулю, не теряя общего вида убывания.

У $y = x^{-2}$ модули значений уменьшаются быстрее, чем у $y = x^{-1}$.

Составлено по значениям функций $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$.



Типичные ошибки при работе с графиками

Подстановка $x = 0$

Нельзя подставлять $x = 0$: обе функции в этой точке не определены. Часто именно из-за этого появляются лишние точки на графике и неверные ответы в задачах.

Путаница формул

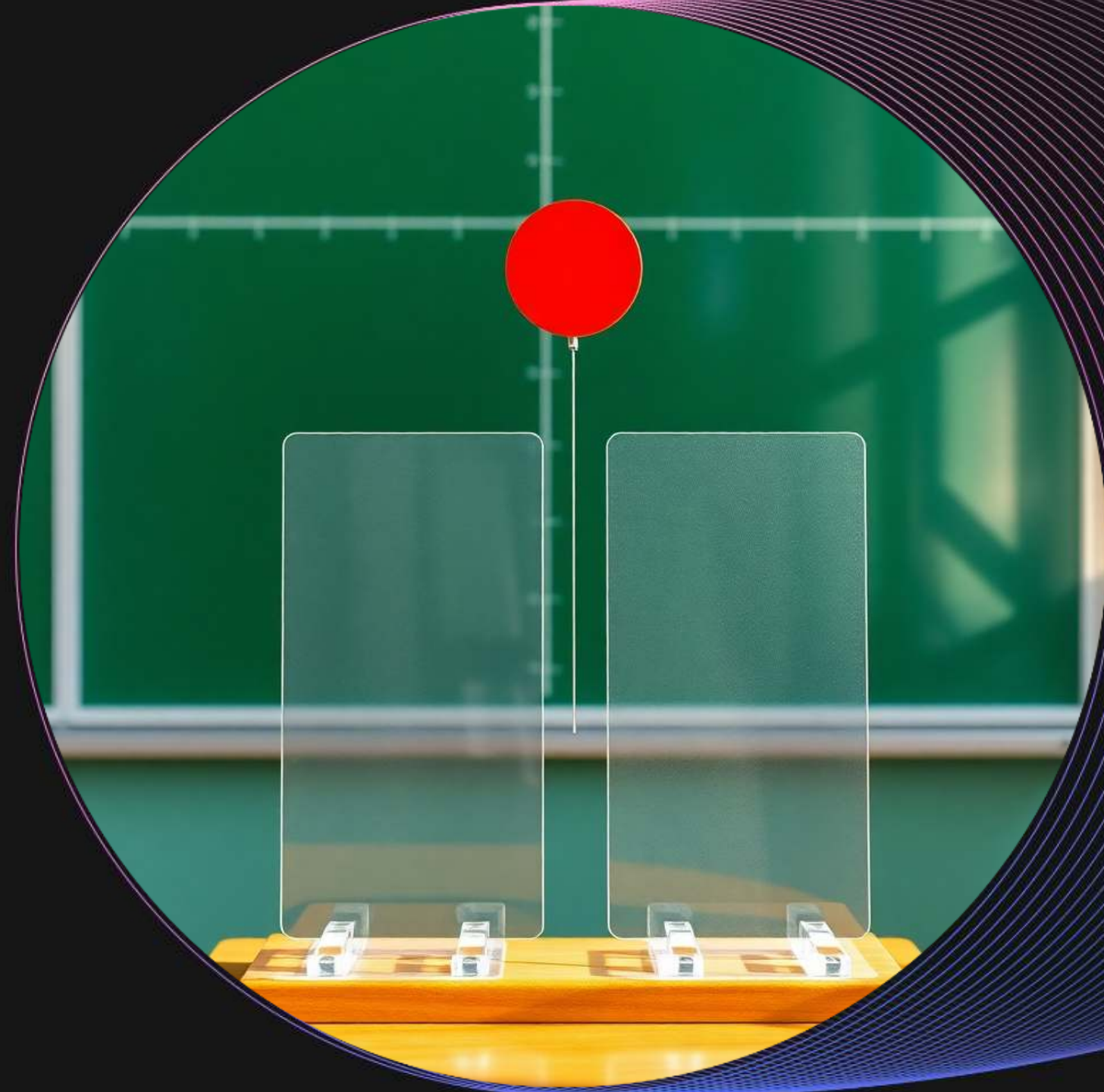
Важно не перепутать $1/x$ и $1/x^2$. У второй функции значения всегда положительные, поэтому её график не может заходить ниже оси Ox .

Неверный знак

При отрицательном x у $y = x^{-1}$ значение отрицательное, а у $y = x^{-2}$ — положительное. Ошибка со знаком сразу меняет расположение ветвей.

Симметрия графика

Нечётную функцию ищут по симметрии относительно начала координат, а чётную — относительно оси Oy . Если перепутать эти признаки, легко выбрать не тот график.



Сводная таблица свойств двух функций

Формула	D(x)	E(y)	Чётность	Знак	Асимптоты, четверти
$y = x^{-1}$	$x \neq 0$	$y \neq 0$	нечётная	$\pm$	$x=0, y=0$; I, III
$y = x^{-2}$	$x \neq 0$	$y > 0$	чётная	+	$x=0, y=0$; I, II

Краткое сравнение помогает быстро увидеть общие признаки и главное различие между двумя графиками.

У обеих функций одинаковые асимптоты и запрет $x = 0$, но чётность и знак значений задают разный вид графиков.

Свойства функций $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$.

Как отличить функции по виду графика

1 Сначала посмотри на ветви

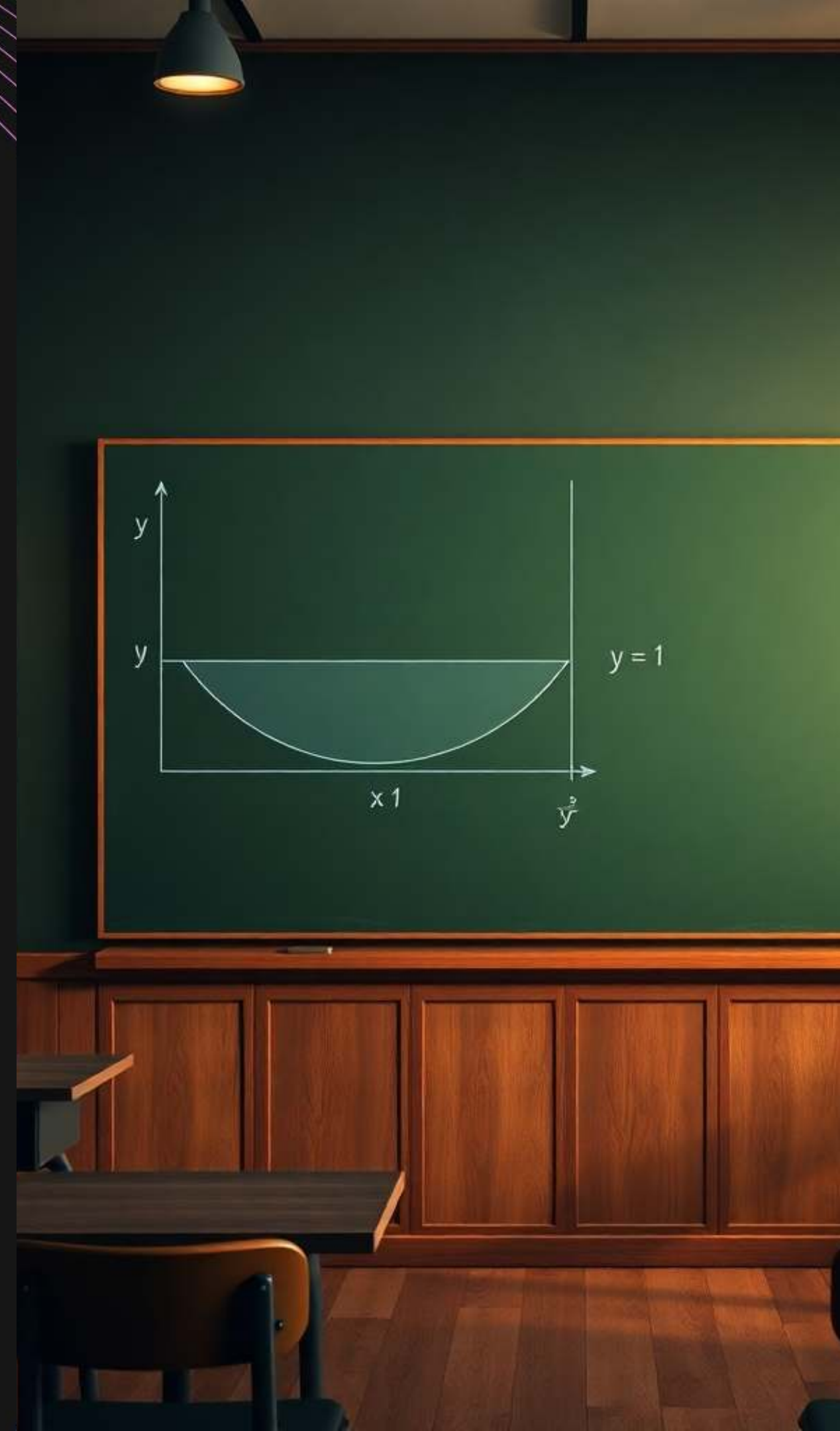
Если у графика две ветви расположены в I и III четвертях, перед тобой $y = x^{-1}$. Такая форма указывает на разные знаки значений при $x > 0$ и $x < 0$.

2 Проверь симметрию

Если обе ветви находятся выше оси Ox и график симметричен относительно оси Oy , это $y = x^{-2}$. Здесь значение зависит только от модуля x .

3 Сравни поведение у осей

В обоих случаях график приближается к осям координат, но не пересекает их. Это помогает отличить такие функции от других знакомых графиков.



Итог: две функции — два характера графика

Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^2$ похожи, но ведут себя по-разному: первая меняет знак, вторая остаётся положительной. Это удобно помнить при построении графиков и решении задач.