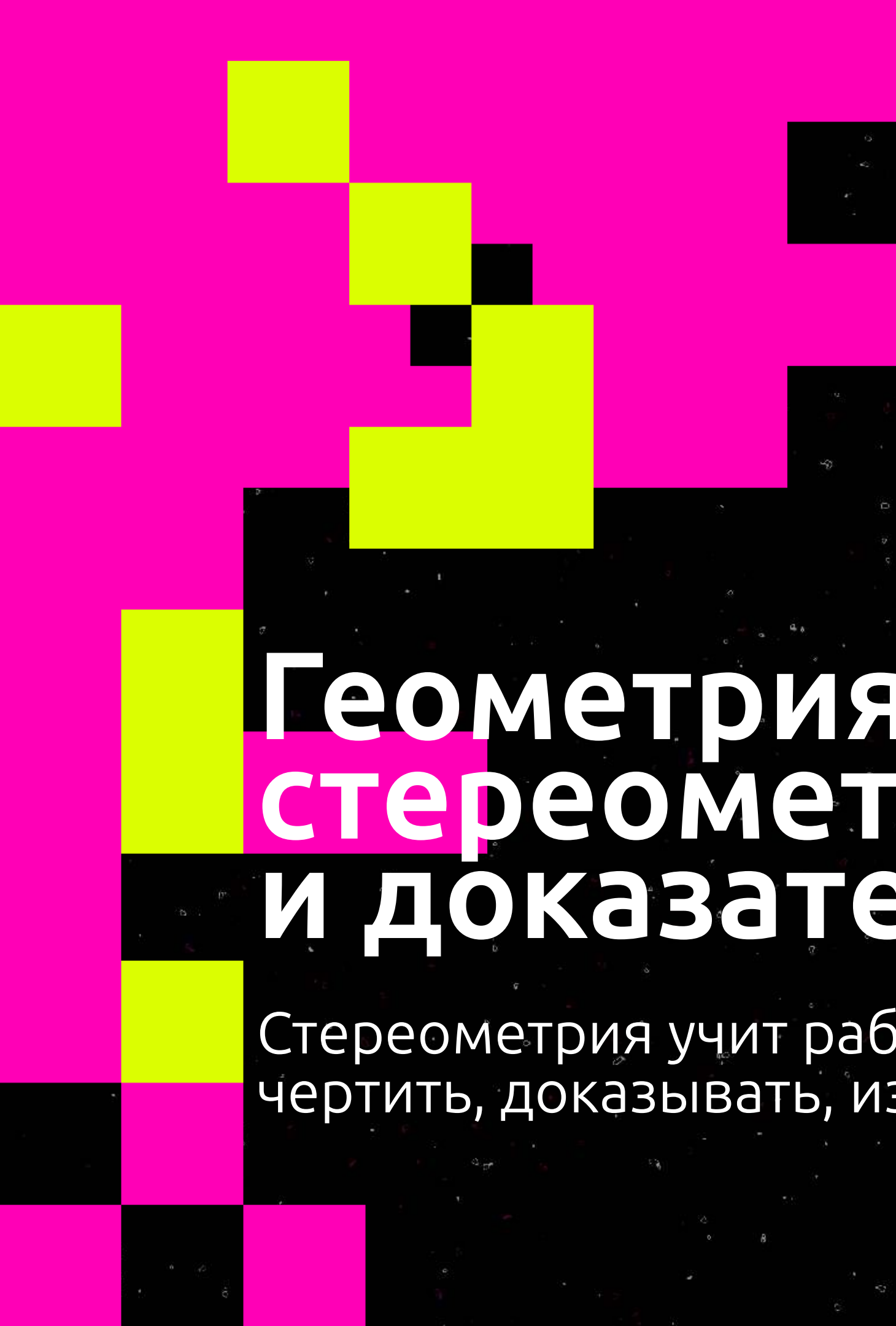
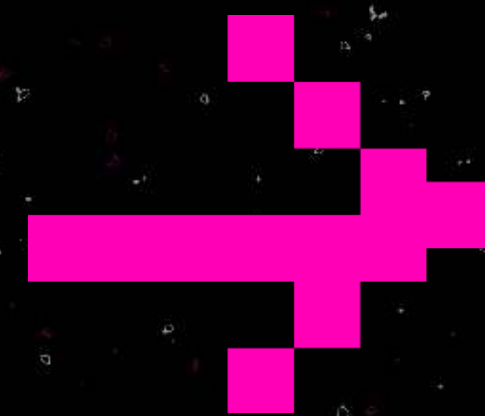




Геометрия 11 класса: стереометрия, измерения и доказательства

Стереометрия учит работать с фигурами в пространстве:
чертить, доказывать, измерять и вычислять.



Место стереометрии в школьном курсе и её практическая значимость

Стереометрия рассматривает объекты трёхмерного пространства, где длина, ширина и высота связаны одновременно. В 11 классе она опирается на планиметрию 7–9 классов и расширяет её до пространственных фигур. Навыки применимы в архитектуре, инженерии, черчении и навигации.

Основные понятия стереометрии

Пространственные фигуры описывают через точки, прямые, плоскости, а также через отрезки, лучи и углы. Эти объекты служат «языком» для записи условий задач и результатов измерений в пространстве.

Взаимное положение двух прямых бывает трёх типов: пересечение, параллельность и скрещивание. Для двух прямых в одной плоскости скрещивания не возникает, поэтому этот признак сразу помогает различать случаи.

Прямая и плоскость могут пересекаться, быть параллельными или содержать друг друга. Две плоскости либо пересекаются по прямой, либо остаются параллельными; именно эти варианты запускают все последующие доказательства.

Взаимное расположение прямых и плоскостей

Сводная таблица помогает быстро распознавать возможные геометрические ситуации: как именно прямая или плоскость могут взаимодействовать, где проходит линия пересечения и что означает параллельность.

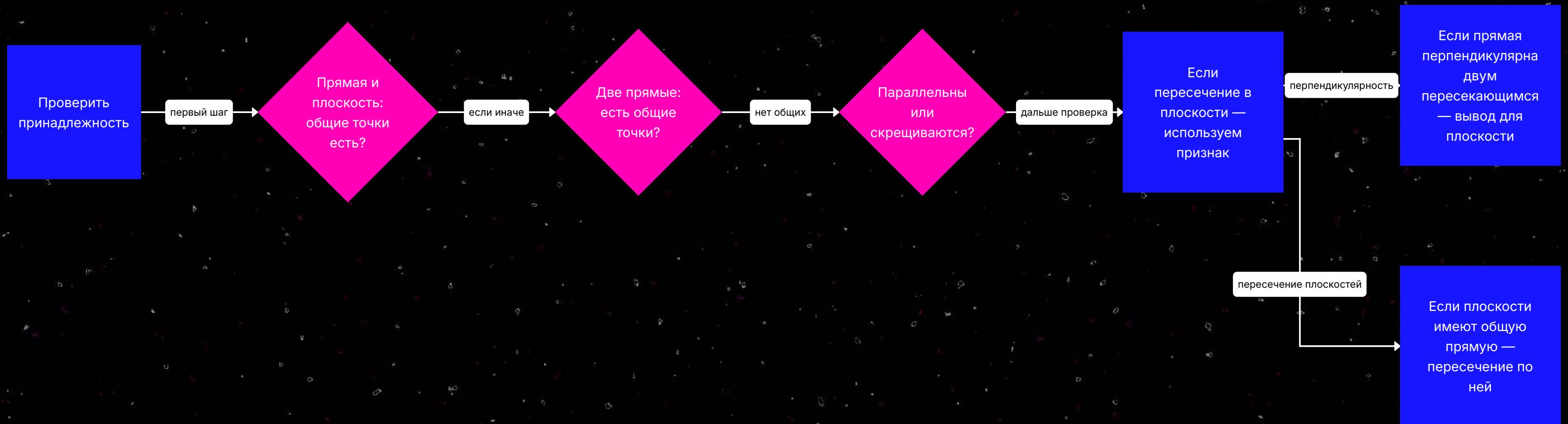
В пространстве, в отличие от планиметрии, важно различать скрещивающиеся прямые: они не лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Пары элементов	Возможные случаи	Характер пересечения	Геометрический смысл
Прямые	пересекаются/ параллельны/ скрещиваются	1 точка / нет общих	Появляется скрещивание
Прямая и плоскость	пересекаются/ параллельны/ содержит	точка / нет точек / бесконечно	Линия или точка задают связь
Плоскости	пересекаются/ параллельны	по прямой / нет общих	Общий элемент — прямая

Школьный курс стереометрии (обобщённые формулировки взаимного положения).

Как установить взаимное расположение элементов в пространстве

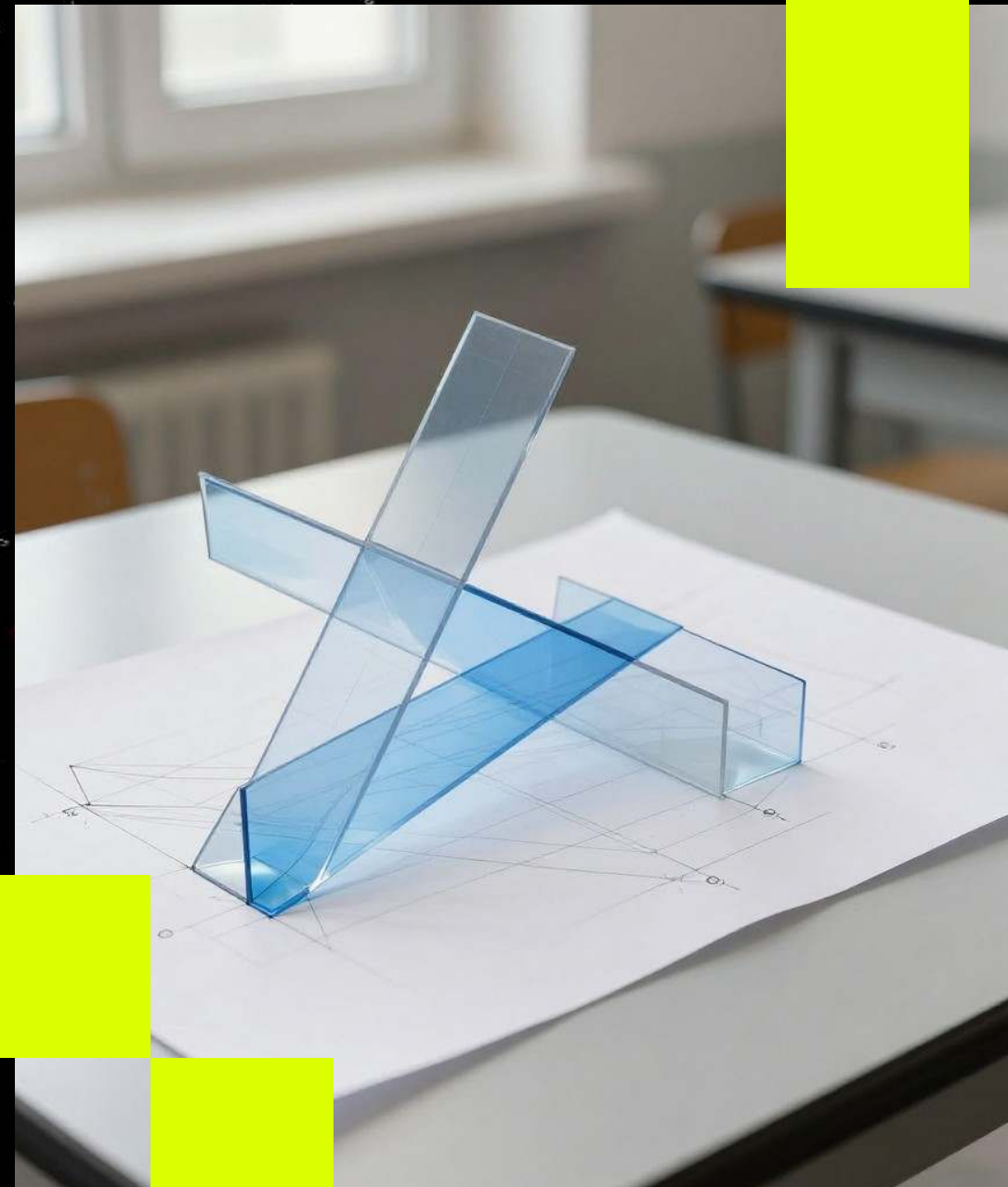
Пошаговый анализ: принадлежность → параллельность → общие точки → проверка перпендикулярности.



Прямые и плоскости на пространственном чертеже

Проекция и видимость элементов

Чертёж выполняют в виде параллельной или условной аксонометрической проекции, чтобы сохранить наглядность. Рёбра, скрытые от наблюдателя, обычно изображают пунктиром, а видимые — сплошной линией.



Пунктир, точки плоскости и грани

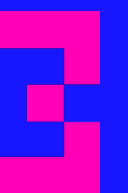
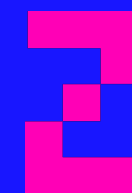
На рисунке важно отмечать, какие точки лежат в одной плоскости: их удобно переносить «мысленно» в одну грань или в сечение. Также выделяют принадлежность точек разным граням фигуры, чтобы не путать базовые плоскости и пересечения.

Параллельность в пространстве: признаки и следствия

Параллельные прямые в пространстве не пересекаются и сохраняют постоянное расстояние. Если две прямые параллельны третьей, то они согласованно «ориентированы» в пространстве, и это часто используют в цепочках доказательств.

Для прямой и плоскости применяется идея: если прямая параллельна одной из двух пересекающихся плоскостей и лежит в той же плоскости или параллельна ей, то прямая параллельна плоскости. Такой признак помогает быстро завершать шаг вычислений углов и расстояний.

Две плоскости считают параллельными, когда в одной плоскости можно провести две пересекающиеся прямые, параллельные другой плоскости. На этом строятся решения задач про призмы, параллелепипеды и сечения: совпадающие направления упрощают построения.

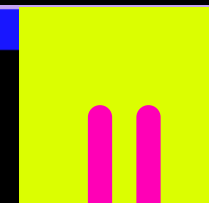


Перпендикулярность: углы 90° в пространстве



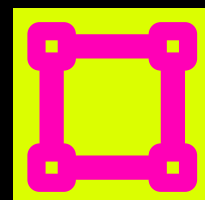
Прямая и прямая под прямым углом

Перпендикулярность прямых в пространстве означает угол 90° между ними. Это задаёт «опорные» направления для дальнейших построений: например, при выборе высот и перпендикуляров к рёбрам.



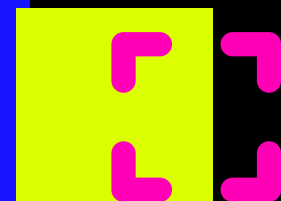
Прямая перпендикулярна плоскости

Если прямая перпендикулярна плоскости, то она образует прямой угол с любой прямой этой плоскости, проходящей через точку пересечения. Такой факт даёт жёсткий критерий для доказательства в задачах.



Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью определяют как угол между прямой и её проекцией на плоскость. Это согласует определение угла с тем, что именно измеряется на чертеже и в вычислениях.



Угол между плоскостями

Угол между двумя плоскостями измеряют углом между прямыми, перпендикулярными линии их пересечения. Поэтому в доказательствах удобно строить перпендикуляры к общей прямой плоскостей.

Сравнение основных многогранников

Сравнение помогает увидеть, как количество оснований и боковых граней меняет «скелет» фигуры: от тетраэдра к призмам структура становится разнообразнее.

Чем больше боковых граней и элементов основания, тем сложнее геометрические связи; при этом классификация остаётся основанной на счёте вершин, рёбер и граней.

Элементы и свойства многогранников

Фигура	Основание	Боковые грани	Рёбра
Призма	2 равных и параллельных	параллелограммы	соединяю соответст вершины
Пирамида	одно основание	треугольники с общей вершиной	встречаю вершине
Параллелепипед	параллелограммы	противоположные равны	попарно параллел

Таблица сопоставляет ключевые элементы многогранников и объясняет, как именно строение граней, рёбер и основания управляет их свойствами.

Свойства многогранника читаются «снизу вверх»: сначала распознают основание, затем — характер боковых граней, и только после этого корректно делают выводы о рёбрах и конструкциях.

Школьный курс стереометрии: определения призмы, пирамиды и параллелепипеда.

Сечение многогранника плоскостью

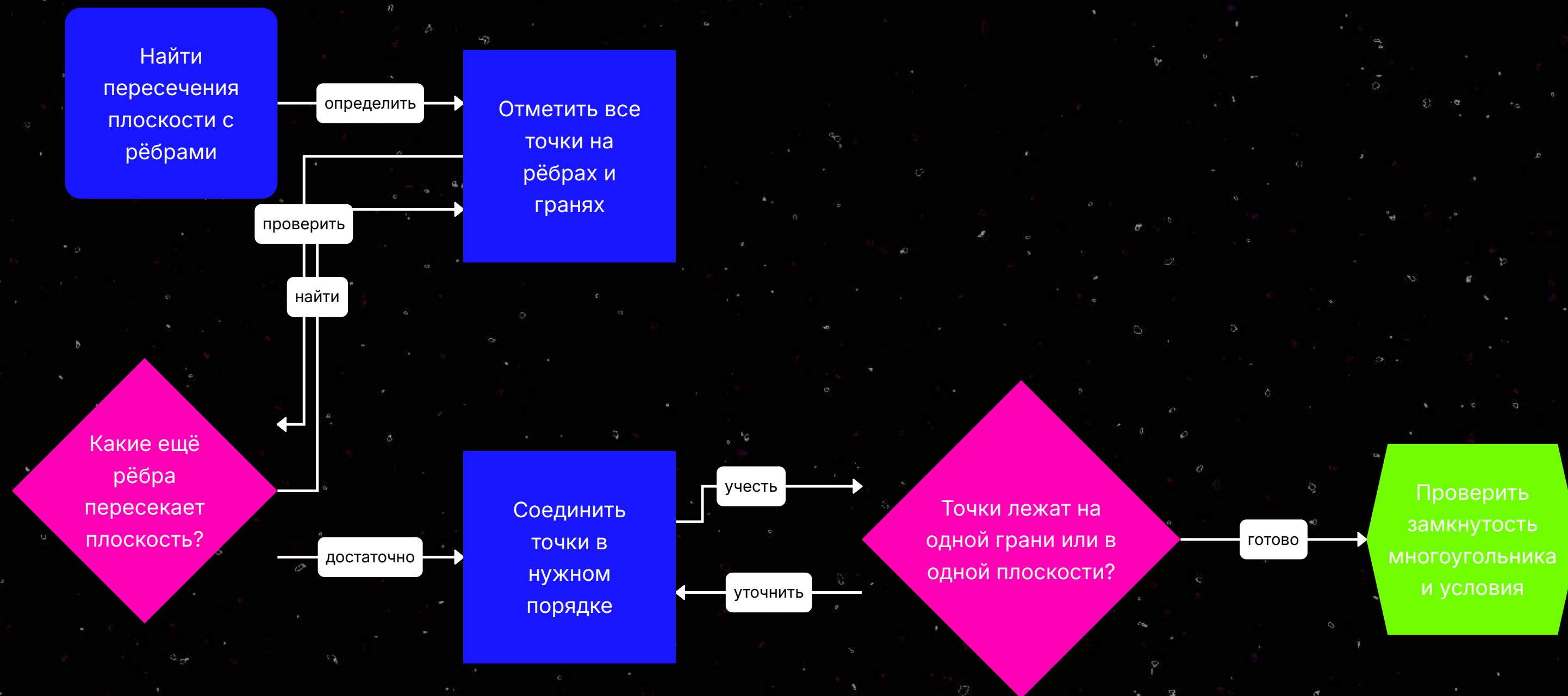


Сечение — это многоугольник, получающийся при пересечении многогранника плоскостью. На рисунке секущая плоскость проходит через куб или призму, а полученная фигура выделяется как отдельный контур на гранях и рёбрах.

Особенно важно учитывать точки пересечения: когда плоскость проходит через рёбра, диагонали граней или заданные точки на рёбрах. Для куба в зависимости от положения плоскости часто возникают квадратные, прямоугольные и шестиугольные сечения.

Построение сечения в задачах стереометрии

Последовательность работы с плоскостью: от точек пересечения до проверки построенного многоугольника.



Площади поверхностей многогранников

Полная поверхность многогранника равна сумме площадей всех его граней. Именно поэтому сначала находят площади отдельных многоугольников, а затем аккуратно складывают их с учётом того, какие грани входят в поверхность.

Для призмы боковая поверхность образуется прямоугольниками или параллелограммами. Их площади удобно выражать через высоту и периметр основания, потому что основания равны и боковые грани формируются одними и теми же отрезками.

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда вычисляют по формуле $S = 2(ab + bc + ac)$, где a , b , c — его измерения. Это позволяет быстро учесть все пары равных граней без лишних чертежных построений.

Для правильной пирамиды и правильной призмы применяют формулы через периметр основания и апофему или высоту боковой грани. Так геометрическая симметрия превращается в компактный расчёт, пригодный для задач ЕГЭ.

Формулы площадей и объёмов основных тел

Числа на диаграмме не отражают величину объёма: они лишь отмечают, какую структуру формулы нужно выбрать для каждого тела при решении.

В задачах удобно помнить общий принцип: объём определяется площадью основания и высотой (или радиусом у тел вращения). Тогда выбор формулы становится последовательным и менее интуитивным.

Учебная математика (школьные формулы); точные численные коэффициенты: $\frac{1}{3}$ и $\frac{4}{3}$, а также π .

Тела вращения и их элементы



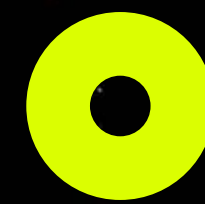
Цилиндр

Цилиндр получают вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Вводятся радиус и высота, а также ось симметрии, вокруг которой «раскручивается» боковая поверхность при построении.



Шар

Шар возникает при вращении полуокружности вокруг её диаметра. У него нет оснований и вершин; ключевая роль принадлежит радиусу. Поэтому объём и площадь выражаются через R и число π .



Конус

Конус образуется вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов. Появляются радиус основания, высота и образующая, по которой находят площади боковой поверхности и сечения.



Общие элементы и применение

У тел вращения выделяют радиус, высоту, ось симметрии и образующую (для конуса). Эти элементы напрямую связывают задачу с формулами объёма, площадей боковой поверхности и типовых сечений.

Сравнение цилиндра, конуса и шара

Сравнение помогает быстро выбрать нужную формулу и не перепутать структуру тела: сколько у него оснований, есть ли вершина и как выражается площадь поверхности и объём.

От цилиндра к шару уменьшается число «структурных частей» (оснований и вершины), но осевая симметрия и опора на формулы остаются ключевыми.

Тело	Основания/вершина	Площадь поверхности	Объём
Цилиндр	2 круга; вершин нет	$S=2\pi R^2+2\pi Rh$	$V=\pi R^2h$
Конус	1 круг; есть вершина	$S=\pi R(R+l)$	$V=1/3 \cdot \pi R^2h$
Шар	нет оснований; вершин нет	$S=4\pi R^2$	$V=4/3 \cdot \pi R^3$

Школьный курс стереометрии (стандартные формулы площадей и объёмов).

Практические задачи на объёмы и площади



Банка и крышка

Банка становится удобной моделью цилиндра: радиус связан с диаметром, а высота — с размером банки. Когда нужно рассчитать количество материала, ищут площади поверхностей. Если же рассматривают вместимость, нужен объём цилиндра. Так бытовая задача превращается в строгий расчёт.

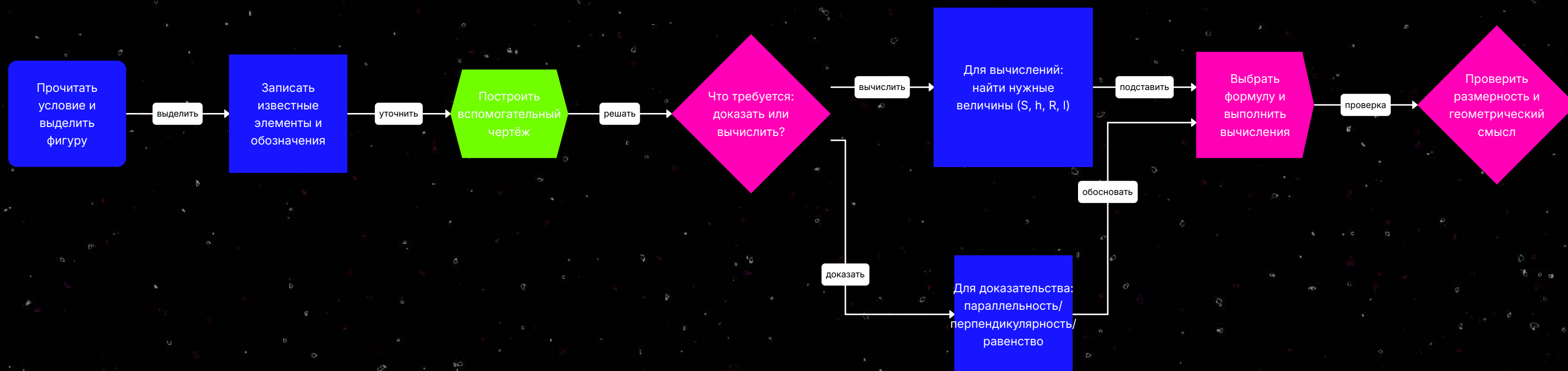


Воронка и футбольный мяч

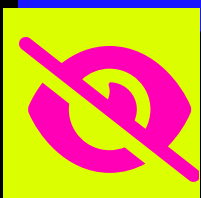
Воронка хорошо описывается конусом: высота и радиус основания помогают оценить площадь поверхности и расход материала при изготовлении. Футбольный мяч — модель шара, где важны только радиус и формулы объёма. В обоих случаях геометрия помогает перевести изображения в числа для реальной ситуации.

Алгоритм решения стереометрической задачи

От чтения условия к вычислению и проверке ответа — последовательность, которая снижает количество ошибок.



Типичные ошибки в задачах по стереометрии



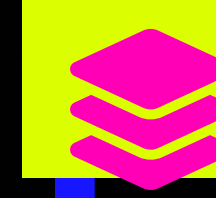
Путаница в чертеже

Ученик может неверно интерпретировать рисунок: перепутать видимые и скрытые рёбра, потерять нужные точки или ошибиться в том, какие отрезки действительно лежат на одной грани.



Неправильный выбор высоты

Частая ошибка — подмена высоты: берут не тот перпендикуляр к основанию, а ближайший отрезок на рисунке. Тогда меняются площади основания и нарушается весь расчёт площади или объёма.



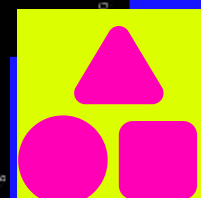
Площадь основания вместо боковой

При поиске боковой поверхности или площади полной поверхности иногда подставляют площадь основания. Чтобы избежать ошибки, нужно каждый раз проверять, какие грани складываются в итоговую величину.



Забытые единицы измерения

Даже при верной формуле можно получить неверный ответ из-за единиц: сантиметры и метры смешиваются, а итоговая размерность забывается. В стереометрии это особенно заметно при переходе к объёму.



Потеря точек в сечениях

В задачах на сечения часто пропадают точки пересечения плоскости с рёбрами, из-за чего контур получается разомкнутым или некорректным. Перед соединением точек полезно проверить все пересечения по рёбрам.

Итоги темы: как «собирается» пространство в задачах

Геометрия 11 класса связывает пространственные отношения, многогранники, тела вращения, сечения, площади и объёмы в единую систему. Успех обеспечивают точный чертёж, выбранные формулы и логические связи между формой, измерением и расположением фигур.