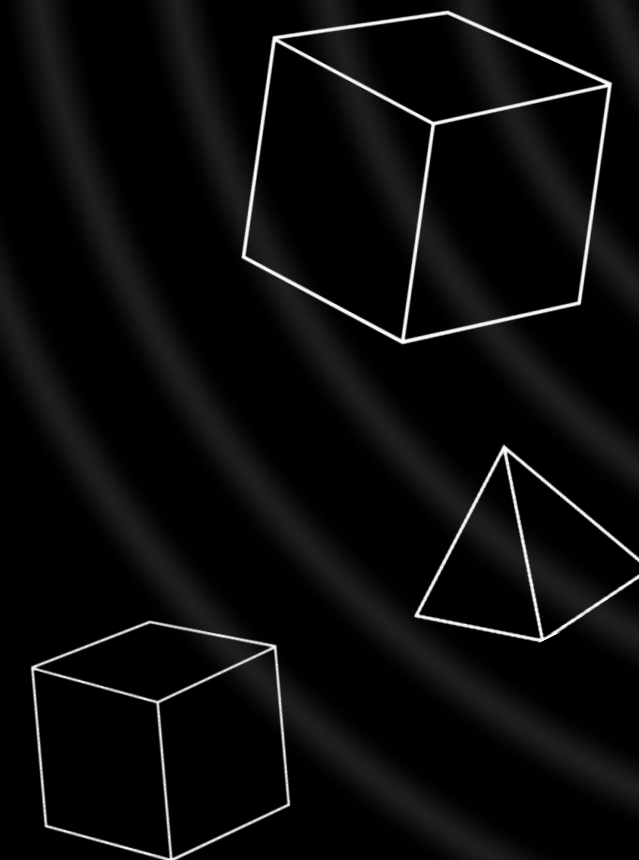


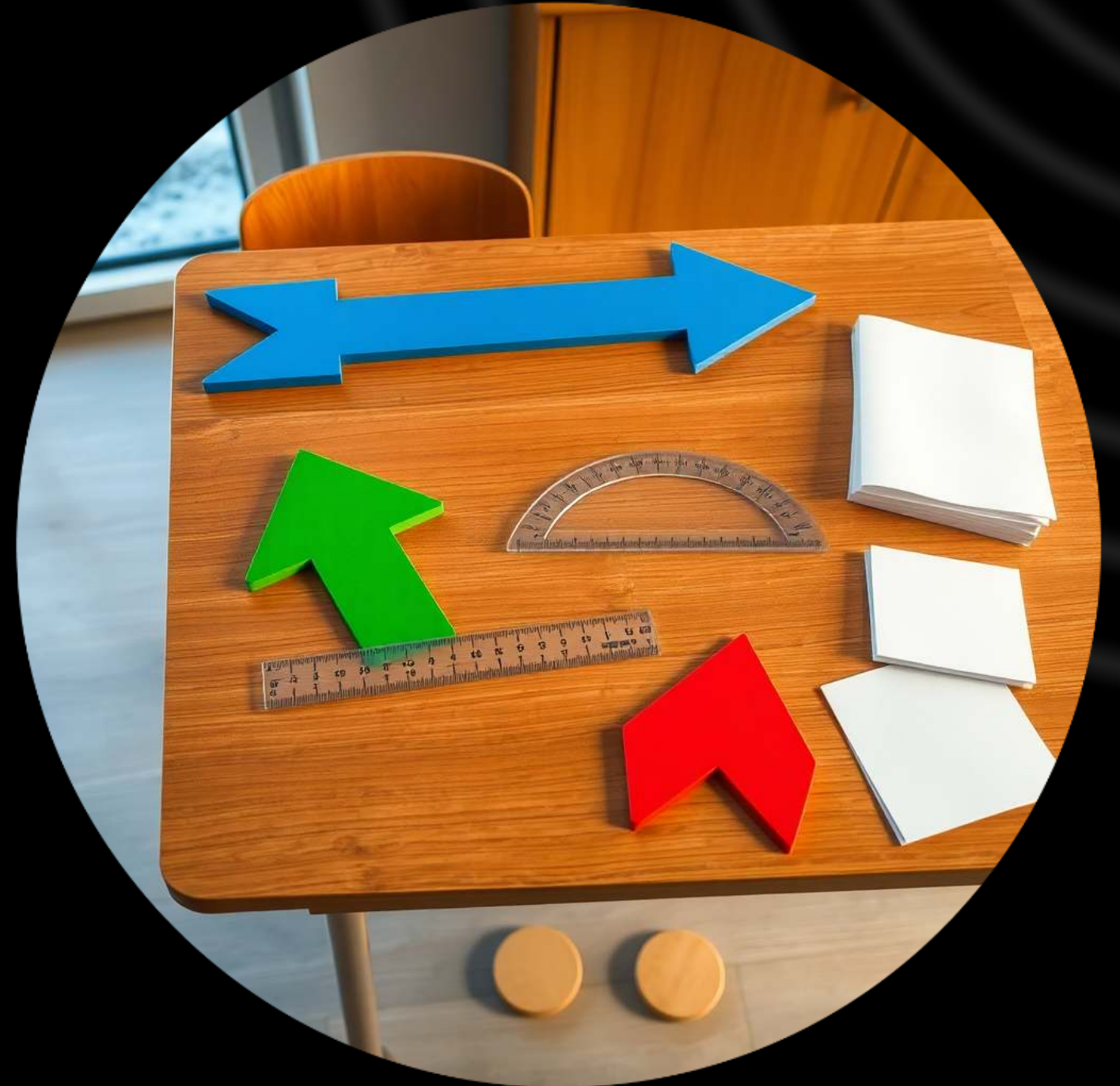
Векторы в алгебре: как они задают направление и величину

Длина и направление помогают описывать движение, координаты и операции на плоскости.



Зачем 8 классу нужны векторы

Векторы показывают не только размер, но и направление. Они помогают описывать перемещения, работать с координатами и решать задачи, где важны обе характеристики сразу.



Определение вектора и его обозначение

Направленный отрезок

Вектор изображают отрезком со стрелкой: она показывает направление. Такой рисунок сразу задаёт, откуда начинается движение и куда оно направлено.

Запись концов

Если вектор задан точками A и B , его обозначают $\vec{AB}$: первая буква указывает начало, вторая — конец. Это удобно в геометрических задачах.

Модуль вектора

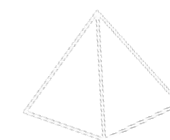
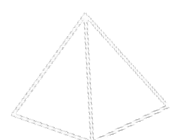
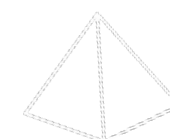
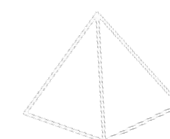
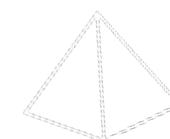
Длина вектора называется модулем и записывается как $|a|$ или $|AB|$. Она показывает, насколько велико перемещение, независимо от положения на плоскости.

Нулевой вектор

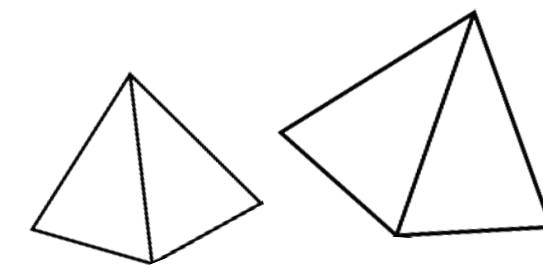
Нулевой вектор имеет длину 0 и не задаёт направления. Его используют как особый случай векторных вычислений и сравнениях.

Краткая запись

В школьных задачах вектор часто обозначают одной строчной буквой: a , b , c . Такая запись короче и удобна для формул и преобразований.



Направленный отрезок на координатной плоскости



Начало и конец

На плоскости вектор удобно рассматривать как перемещение из одной точки в другую. Тогда сразу видно, где начинается движение и где оно заканчивается.

Две оси

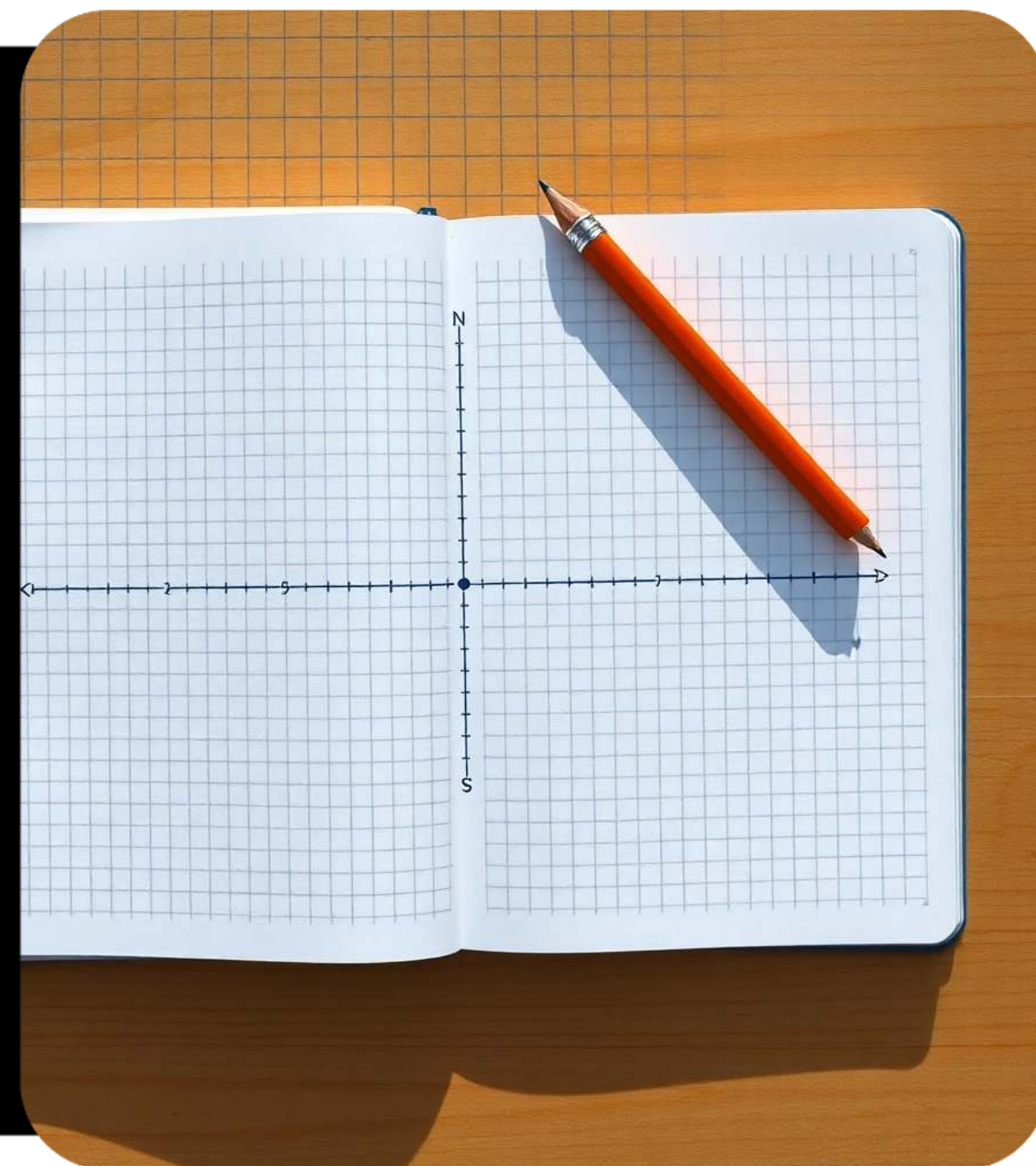
Горизонтальное смещение связано с осью x , а вертикальное — с осью y . Поэтому вектор можно описать как движение вправо или влево, вверх или вниз.

Сетка и клетки

В клетчатой тетради вектор легко представить по шагам: сначала по горизонтали, затем по вертикали. Такой способ помогает не ошибаться при построении.

Примеры из жизни

Подобную запись используют в маршрутах на карте, при перемещении фигур по сетке и при построении чертежей, где важно точно задать направление.



Основные виды векторов и их признаки

Вид	Признак	Пример
Нулевой	длина 0	$0\vec{}$
Единичный	длина 1	$ \vec{a} =1$
Равные	длина и направление одинаковы	$\vec{AB}$ и $\vec{CD}$
Противоположные	направления противоположны	$\vec{a}$ и $-\vec{a}$

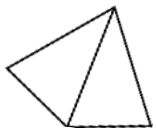
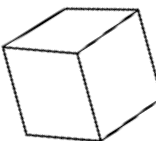


Таблица показывает, чем отличаются наиболее важные виды векторов и какие признаки помогают их распознавать.



Для вектора важны не только длина, но и направление; именно эти признаки позволяют сравнивать векторы.

Равные и противоположные векторы

1



Равные векторы

Равные векторы имеют одинаковую длину и одно направление, даже если расположены в разных местах плоскости. Их можно переносить параллельно без изменения свойств.

2



Противоположные векторы

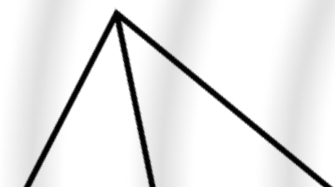
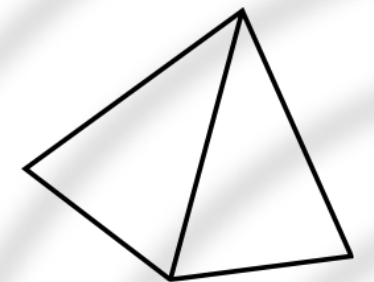
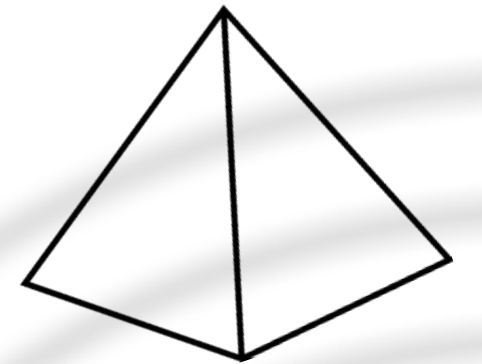
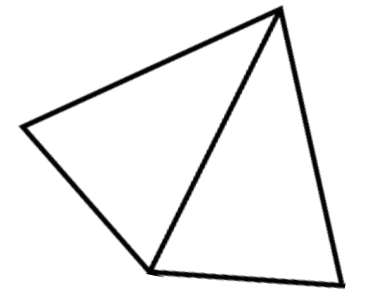
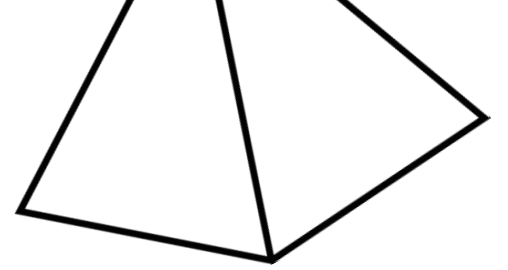
Противоположные векторы одинаковы по длине, но направлены в разные стороны. Такая пара особенно полезна при вычитании и переходе к обратному перемещению.

3

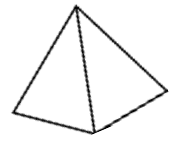


Зачем это нужно

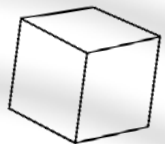
Сравнение векторных записей становится проще, если помнить: положение на рисунке не главное. Решающее значение имеют длина и направление.



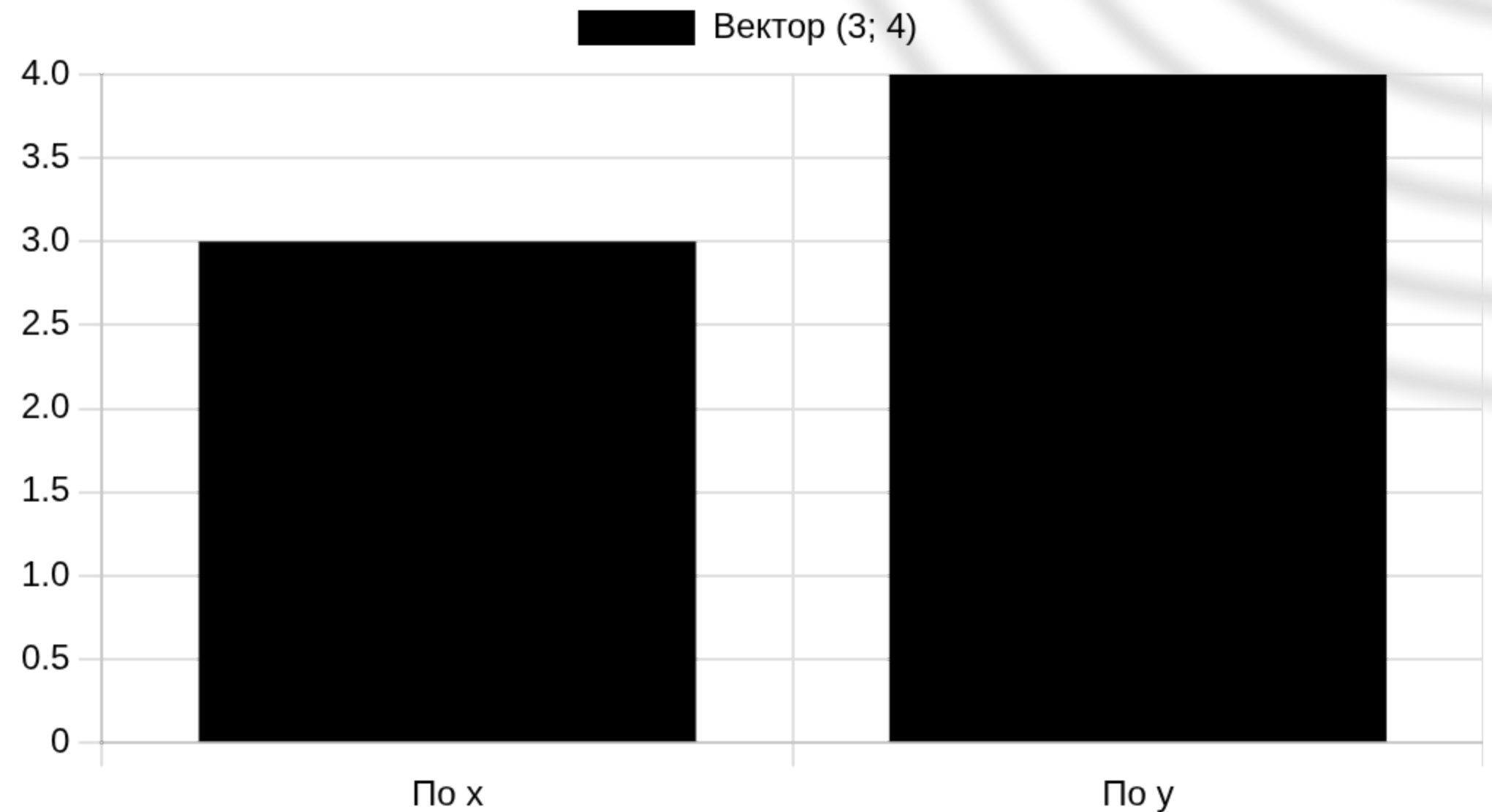
Координаты вектора на плоскости



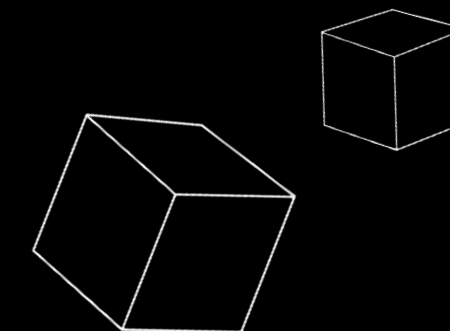
Координаты показывают, на сколько единиц вектор смещается по горизонтали и по вертикали. Знак сразу указывает направление движения.



По координатам можно быстро построить вектор и понять, куда он направлен: вправо, влево, вверх или вниз.



Как находят координаты вектора по двум точкам



1

Берём точки

Сначала записывают координаты начала $A(x_A; y_A)$ и конца $B(x_B; y_B)$. Это основа для любого вычисления координат вектора.

2

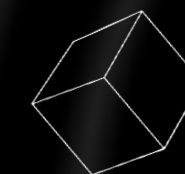
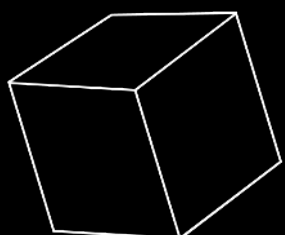
Вычисляем разности

Координаты вектора $\rightarrow AB$ находят по формуле $(x_B - x_A; y_B - y_A)$. Так отдельно учитываются горизонтальное и вертикальное изменения.

3

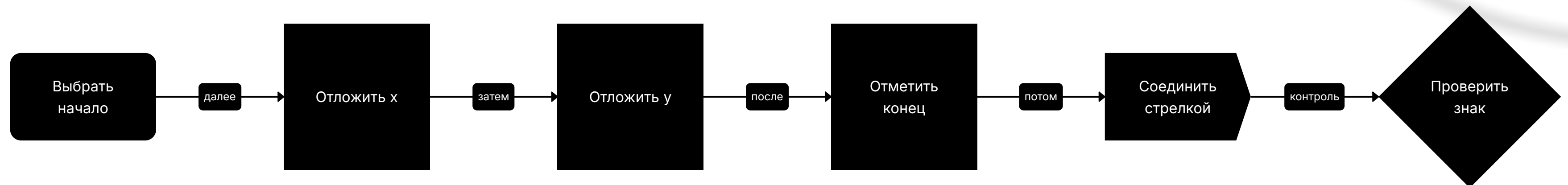
Проверяем пример

Если $A(1; 2)$, а $B(5; 6)$, то $\rightarrow AB = (4; 4)$. Когда начало совпадает с началом координат, координаты вектора равны координатам конца.



Построение вектора по координатам

Алгоритм построения вектора на координатной плоскости и в тетради в клетку.



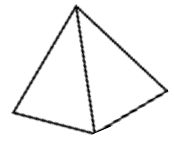
5

– длина вектора $(3; 4)$ по теореме Пифагора.

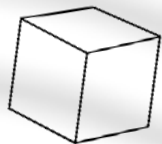
Модуль показывает расстояние между началом и концом вектора. В примере с координатами $(3; 4)$ получается удобная проверка вычислений.

Школьный курс алгебры; пример вектора $(3; 4)$

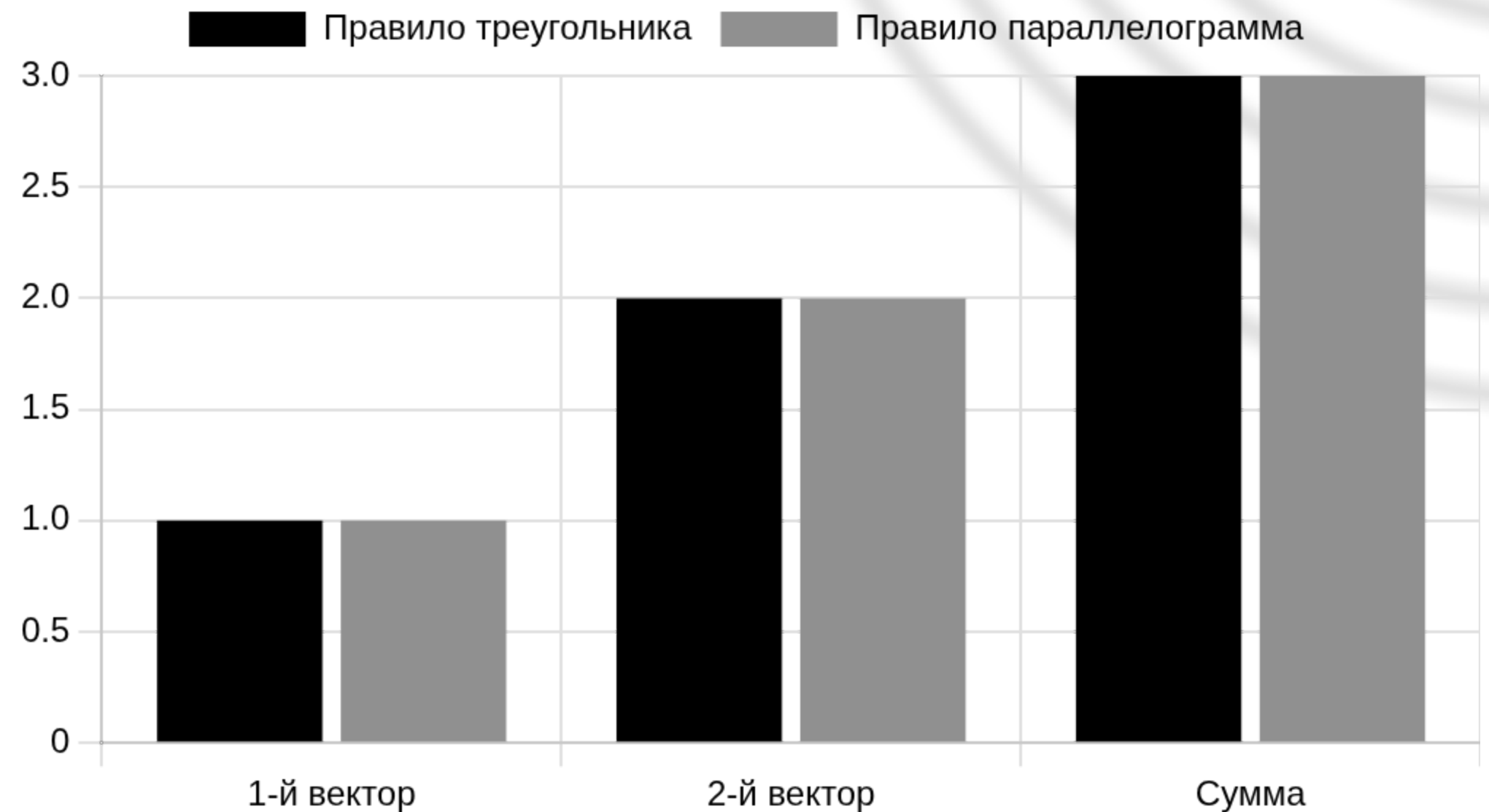
Сложение векторов: два способа получения суммы



Оба способа дают один и тот же результат, если соблюдать направление и порядок построения.



Сумма векторов не зависит от способа построения, а определяется их последовательным соединением или диагональю параллелограмма.



Вычитание векторов и связь с противоположным вектором

1

Через сложение

Вычитание векторов удобно понимать как прибавление противоположного вектора: $a - b = a + (-b)$. Так разность переводится в уже знакомое действие сложения.

2

Противоположный вектор

У противоположного вектора такая же длина, как у исходного, но направление обратное. Именно он позволяет «отменить» прежнее перемещение и получить нулевой результат.

3

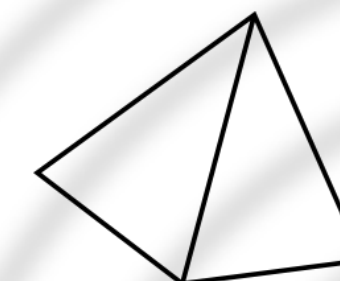
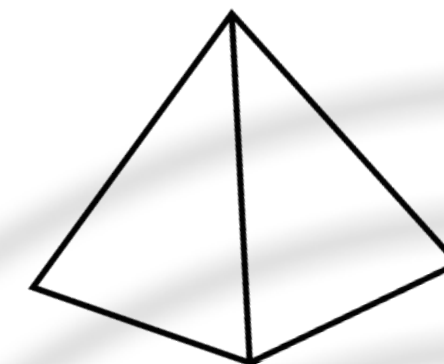
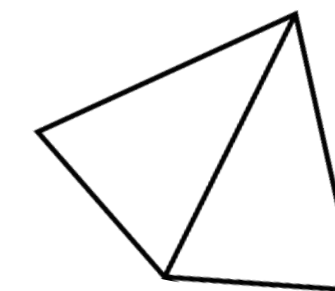
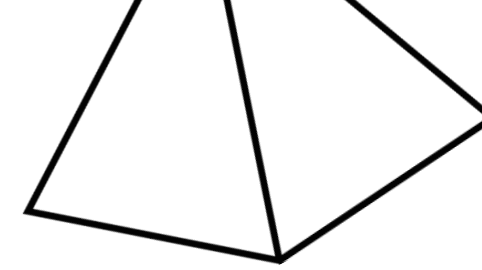
По координатам

В координатной записи вычитание выполняют по компонентам: из первой координаты вычитают первую, из второй — вторую. Это делает вычисления короткими и прозрачными.

4

Геометрический смысл

Если векторы имеют общее начало, их разность показывает переход от конца вычитаемого вектора к концу уменьшаемого. На чертеже это легко увидеть и проверить.



Умножение вектора на число

Изменение длины

При умножении на число вектор становится длиннее или короче, но его направление может остаться прежним. Масштаб зависит от модуля множителя.

Положительное число

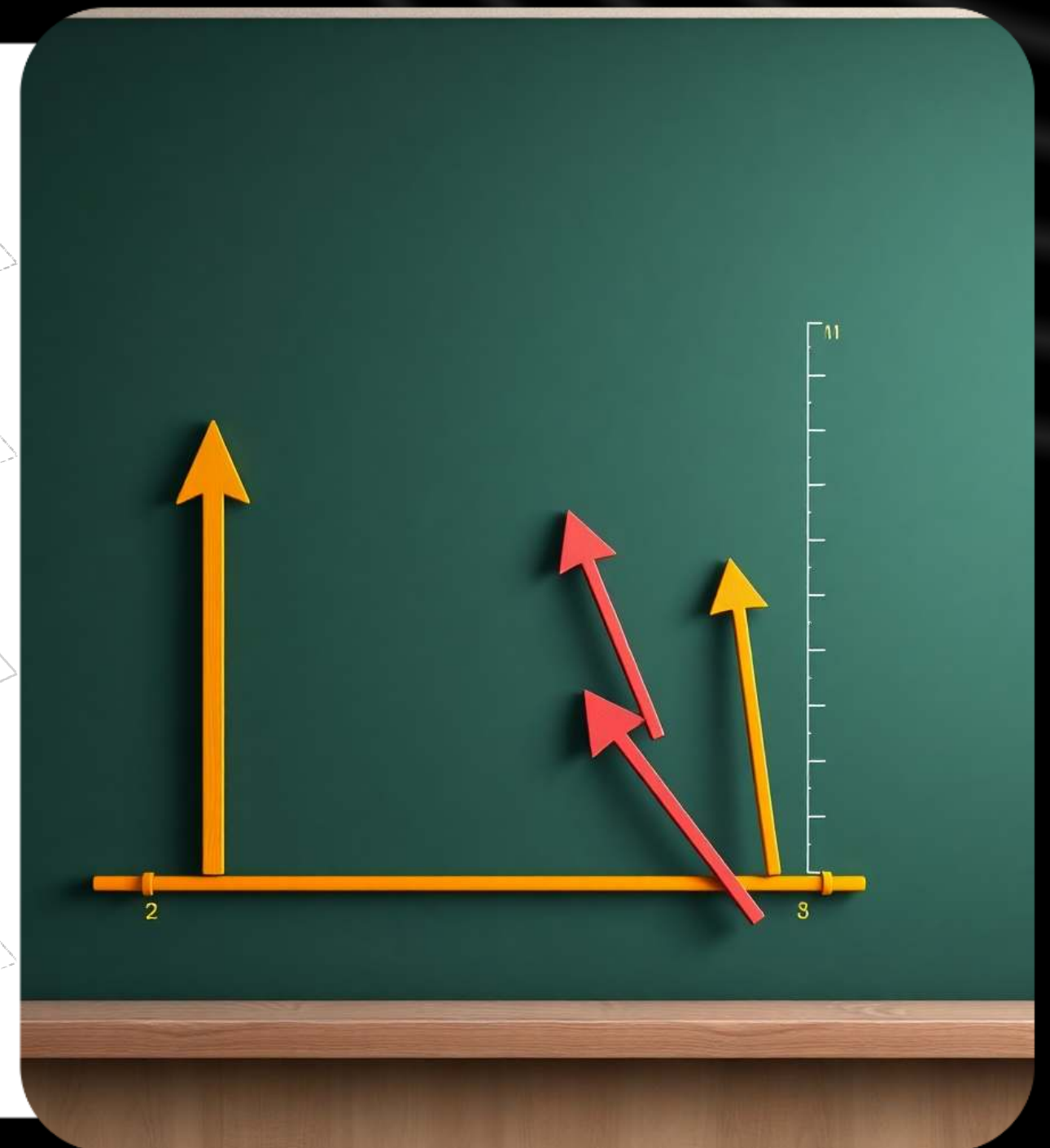
Если множитель положительный, вектор сохраняет направление. Например, при $k = 2$ его длина увеличивается в два раза, а при $k = \frac{1}{2}$ — уменьшается.

Отрицательное число

При отрицательном множителе направление меняется на противоположное. Так, при $k = -1$ получается противоположный вектор той же длины, что и исходный.

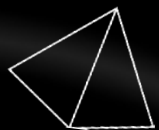
Координатная запись

В координатах каждую компоненту умножают на одно и то же число: $k(a; b) = (ka; kb)$. Это удобно для вычислений и построений.

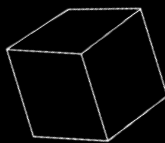


Свойства действий с векторами

Действие	Свойство	Пример
Сложение	переместительное	$a + b = b + a$
Сложение	сочетательное	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Сложение	нулевой вектор	$a + 0 = a$
Сложение	противоположный	$a + (-a) = 0$



Основные действия с векторами подчиняются знакомым алгебраическим законам.



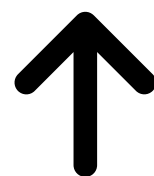
Векторные операции работают по тем же правилам, что и обычные алгебраические выражения, поэтому вычисления становятся понятнее и удобнее.

Векторы в задачах на движение и перемещение



Шаги и маршрут

Вектор помогает описывать путь из одной точки в другую: важно не только расстояние, но и направление движения. Это удобно при работе с картой и схемой маршрута.



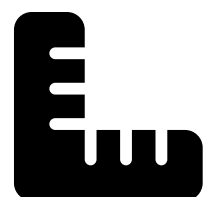
Подъём и спуск

Если человек поднимается по лестнице или спускается вниз, движение имеет направленность. Векторная запись точно показывает, куда и насколько сместился объект.



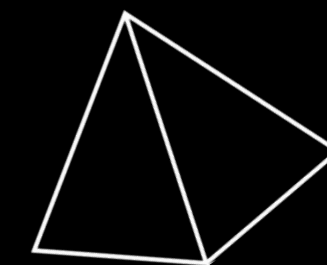
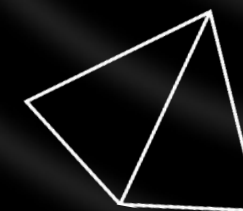
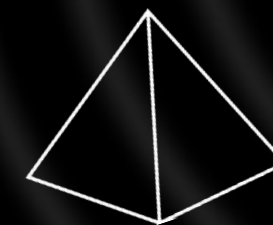
Движение транспорта

Для автомобиля, корабля или дрона вектор задаёт курс и перемещение. Когда есть несколько участков пути, их можно складывать как последовательные векторы.

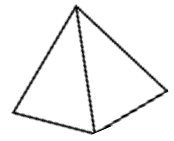


Точность вычислений

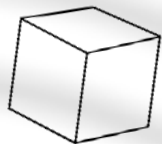
Векторные задачи учат учитывать не только величину, но и сторону движения. Благодаря этому легче избежать ошибки в описании маршрута или смещения точки.



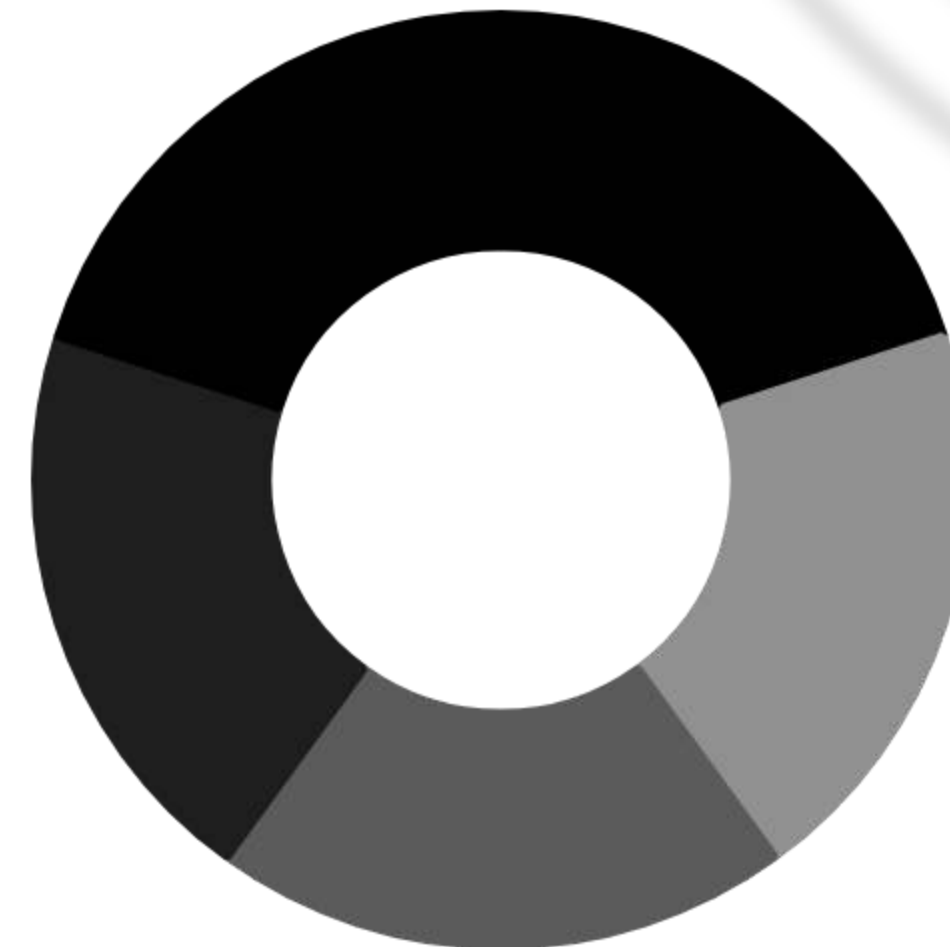
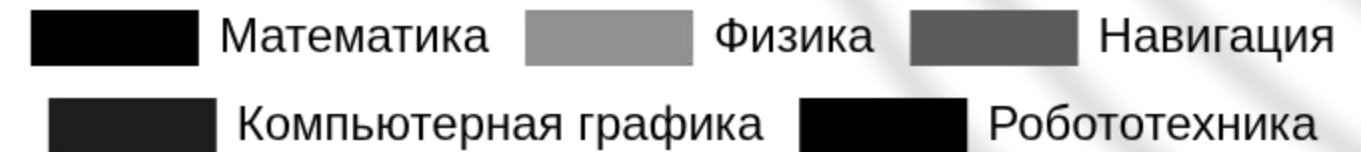
Где используются векторы в реальной жизни



Векторная модель помогает описывать не только движение, но и изменение положения объектов на экране, карте или в технической системе.

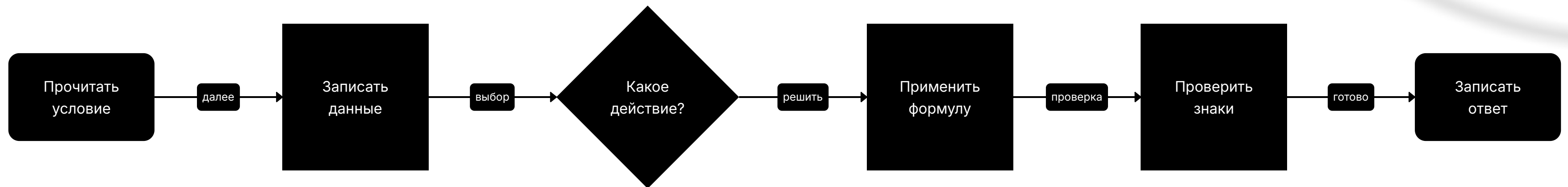


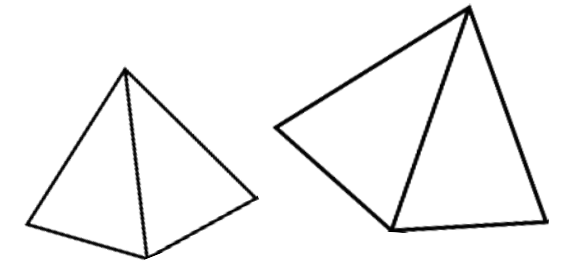
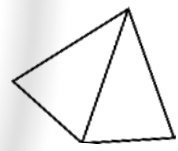
Векторы нужны там, где важно совместить величину и направление, поэтому они полезны сразу в нескольких учебных и прикладных областях.



Алгоритм решения задач на векторы

Последовательность действий при работе с координатами и векторными формулами





Типичные ошибки при работе с векторами

Путают длину и направление

Иногда ученик смотрит только на размер вектора и забывает про стрелку. Но именно направление отличает один вектор от другого и влияет на ответ.

Неверно читают запись

Стрелка в обозначении показывает, что речь идёт о направленном отрезке. Если её пропустить, легко перепутать вектор с обычным отрезком или числом.

Ошибаются в знаках

При работе с координатами важно не терять минус. Отрицательное число означает движение влево или вниз, и ошибка здесь сразу меняет результат.

Смешивают виды векторов

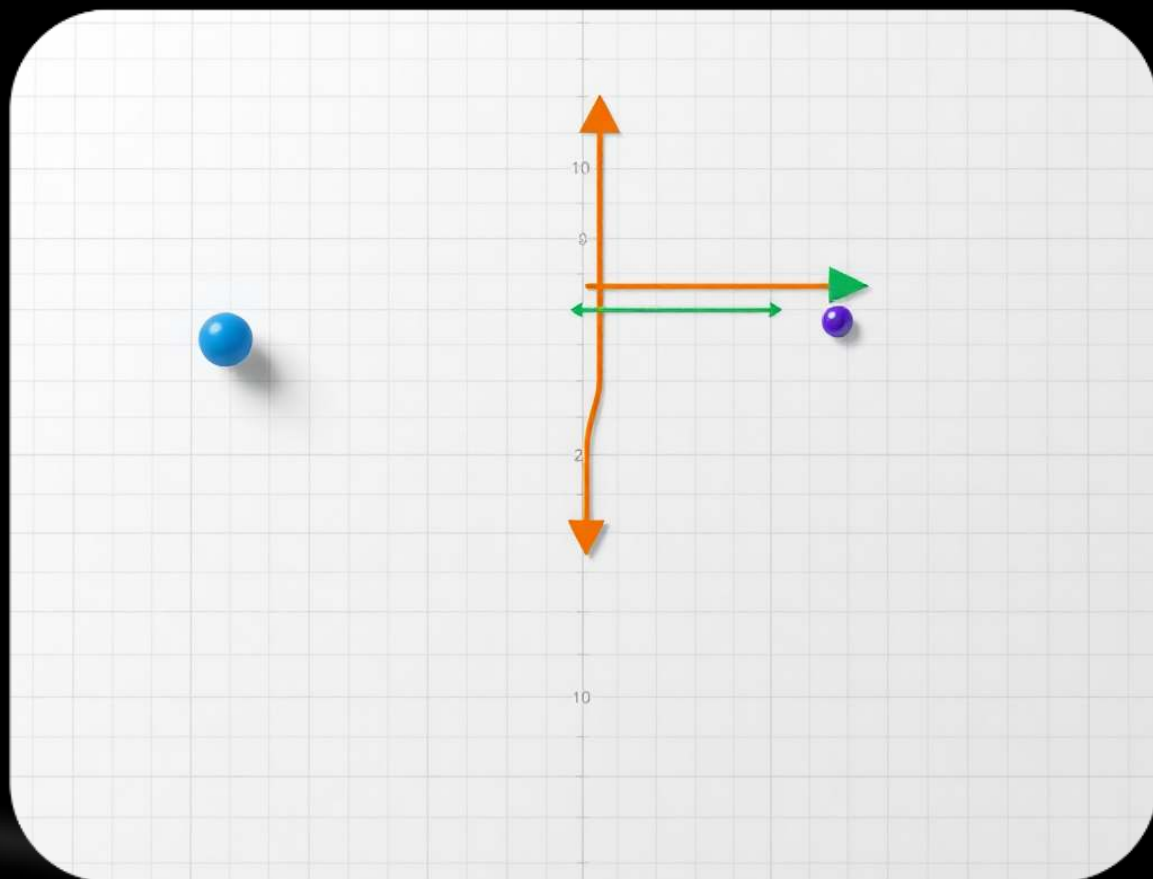
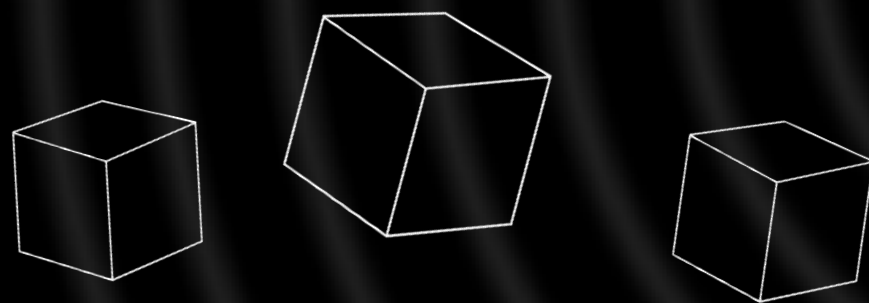
Равные векторы имеют одинаковую длину и направление, а противоположные — одинаковую длину, но разные направления. Смешение этих понятий приводит к неверному сравнению.

Не проверяют рисунок

Если не сопоставить вычисления с чертежом, можно заметить ошибку слишком поздно. Аккуратная проверка схемы помогает избежать лишних вычислительных промахов.

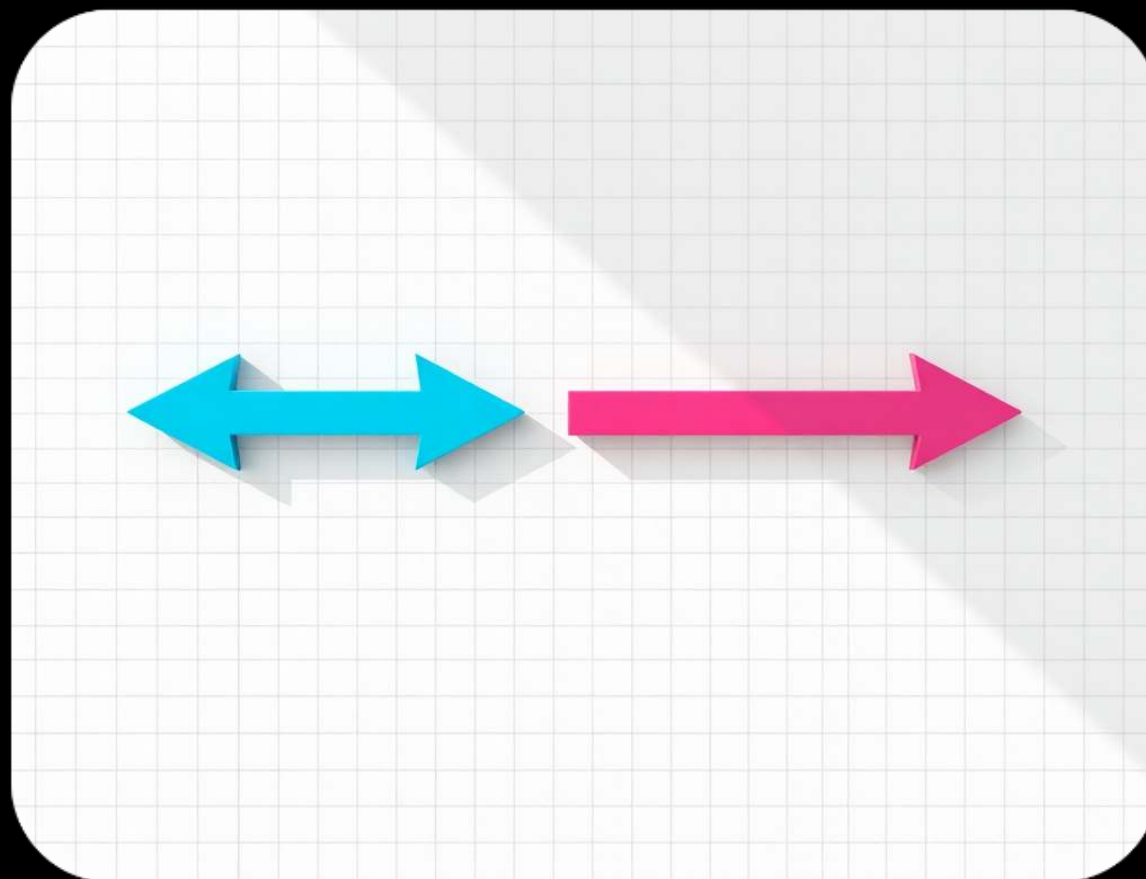


Вектор на клетчатой бумаге: наглядная модель



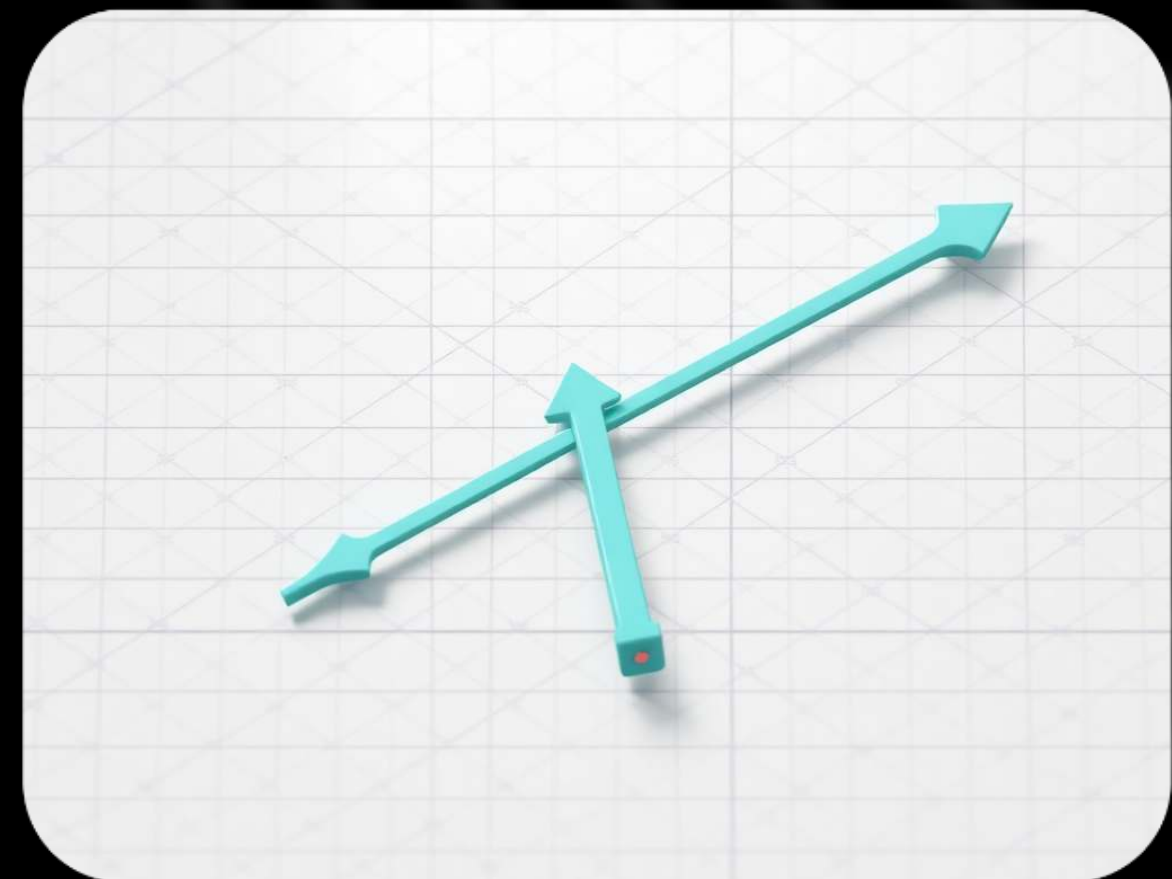
Перемещение по клеткам

На клетчатой бумаге вектор удобно воспринимать как движение: сначала по горизонтали, потом по вертикали. Такая запись быстро показывает, куда именно сместилась точка, и помогает связать рисунок с координатами.



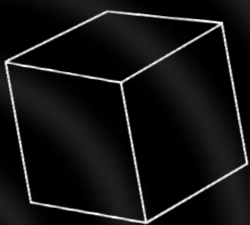
Сравнение направлений

Если несколько векторов нарисованы рядом, легко увидеть, какие из них направлены одинаково, а какие — в противоположные стороны. По клеткам также удобно сравнивать их длины без сложных измерений.



Один вектор — много положений

Вектор можно перенести параллельно в любое место плоскости, и он останется тем же самым, если длина и направление не изменились. На клетчатой бумаге это особенно хорошо заметно.



Главное о векторах — кратко и ясно

Векторы помогают описывать движение, сравнивать направления и выполнять вычисления на плоскости. Если помнить про длину, стрелку, координаты и основные действия, задачи становятся заметно понятнее.