

Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Короткая формула заменяет длинное сложение одинаково устроенных членов.



Что уже известно и что понадобится

Геометрическая прогрессия помогает описывать проценты, рост и повторяющееся умножение. Для суммы важно не путать первый член, знаменатель q и число первых членов n .



Зачем нужна сумма членов ГП



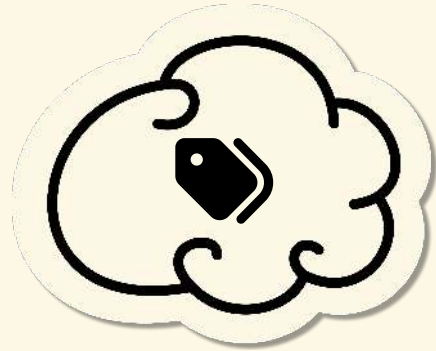
Проценты и накопление

При расчёте процентов по вкладу каждый следующий результат зависит от предыдущего, поэтому удобно складывать не по одному числу, а сразу по формуле.



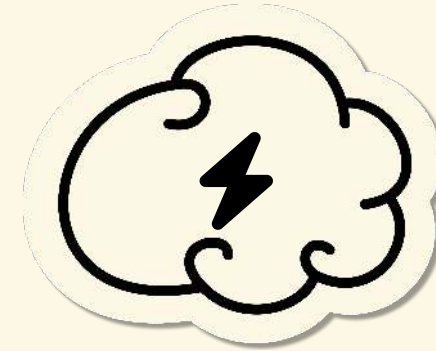
Повторяющееся умножение

Когда величины каждый раз умножаются на одно и то же число, появляется геометрическая прогрессия, а её сумма показывает общий итог за несколько шагов.



Быстрый итог

В задачах на скидки, рост и уменьшение нужно быстро получить общий результат, не выписывая длинную цепочку одинаково устроенных членов.



Меньше вычислений

Формула экономит время и уменьшает риск ошибки, потому что заменяет сложение многих членов короткой и понятной записью.

Напоминание о геометрической прогрессии



1 Определение

Геометрическая прогрессия — это последовательность, в которой каждый следующий член получается умножением предыдущего на одно и то же число q .

2 Первые данные

Первый член обозначают a_1 . Зная a_1 и q , можно построить всю последовательность и найти любой её член.

3 Формула n -го члена

n -й член записывают так: $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$. Эта формула показывает, как далеко находится нужный член от начала.

4 Поведение последовательности

Если q больше 1, члены растут; если $0 < q < 1$, убывают; при отрицательном q знаки чередуются.



р

обозначает количество
членов в сумме S_r .

Буква r показывает, сколько первых членов
входят в сумму. Это число слагаемых, а не номер
любого отдельного члена.

Обозначения в теме



Идея формулы через умножение на q

Преобразование суммы при умножении на знаменатель прогрессии.



Вывод формулы при $q \neq 1$

Шаги вывода для случая, когда q не равно 1.



Формула суммы при $q \neq 1$

1 Основная запись

При $q \neq 1$ используют основную формулу: $S_p = a_1(q^p - 1)/(q - 1)$. Она даёт сумму первых p членов без прямого сложения всех слагаемых.

2 Два равных вида

Ту же формулу можно записать как $S_p = a_1(1 - q^p)/(1 - q)$. Это та же самая дробь, только в другом виде.

3 Проверка записи

Важно следить за знаками в числителе и знаменателе. Если изменить оба знака одновременно, значение суммы не изменится.

Проверка формулы на простом примере

Проверим формулу на конкретных значениях и сравним результат с обычным сложением членов.

Формула даёт тот же результат, что и прямое сложение: 80.

Вычисление по формуле суммы геометрической прогрессии

n	Член						Сумма							
1	2						2							
2	6						8							
3	18						26							
4	54						80							

1

— это тот случай, когда
формула с дробью
не подходит.

При этом значении знаменателя все члены
совпадают, поэтому сумма выражается через
обычное умножение.

Свойства геометрической прогрессии



1

Если берут только один
член, сумма равна
первому члену.

При $q=0$ уже со второго члена остаётся ноль,
поэтому итог зависит только от числа первых
слагаемых.

Формула суммы первых p членов ГП



2

Такие проверки сразу
показывают,
не потерян ли смысл
вычисления.

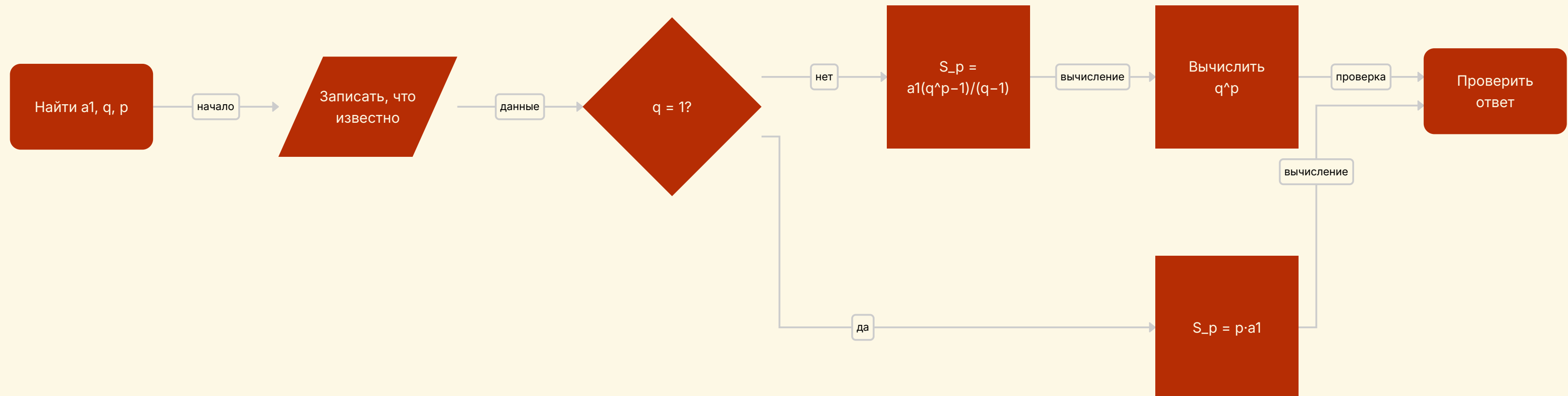
Две быстрой проверки помогают заметить
ошибку: сравните знак ответа и его примерный
размер с ожидаемым поведением прогрессии.

*Правило самопроверки при решении задач
на сумму ГП*



Алгоритм решения типовой задачи

Сначала определяют параметры прогрессии, затем выбирают нужную формулу и завершают вычисление проверкой.



Пример вычисления с небольшим p

Проверка формулы на короткой прогрессии с наглядными членами и простой суммой.

Прямое сложение и формула дают одинаковый результат: 93.

Пример: $a_1=3, q=2, p=5$

n	Член	Сумма
1	3	3
3	12	21
5	48	93

Пример с большим числом членов

Чем больше p , тем заметнее рост суммы при $q > 1$.

При $q=2$ значения быстро увеличиваются, поэтому итог резко растёт.

Пример: $a_1=5, q=2, p=8$

n	Член					Сумма								
1	5					5								
4	40					75								
8	640					1275								

Пример с дробным знаменателем

Дробный знаменатель удобно проверять по убыванию членов и по конечной сумме.

При $q=1/2$ члены уменьшаются, но сумма остаётся заметной.

Пример: $a_1=64, q=1/2, p=6$

n	Член	Сумма
1	64	64
3	16	112
6	2	126

30

Это значение удобно
подставить в формулу
и проверить подходящее
 q .

Одно уравнение с известной суммой позволяет
найти неизвестный q или a_1 .

Пример из условия: $S_4=30$, $a_1=3$



5

Этих ошибок достаточно,
чтобы правильная
формула дала неверный
результат.

Пять типичных ошибок чаще всего портят ответ:
путают r и n , забывают случай $q=1$, ошибаются
в степени и теряют знак.

*Разбор типичных ошибок при вычислении суммы
ГП*



Как накапливается сумма

Первые члены

Записывают первые члены по порядку и сразу видят, как каждый следующий получается умножением на одно и то же число.

Промежуточный итог

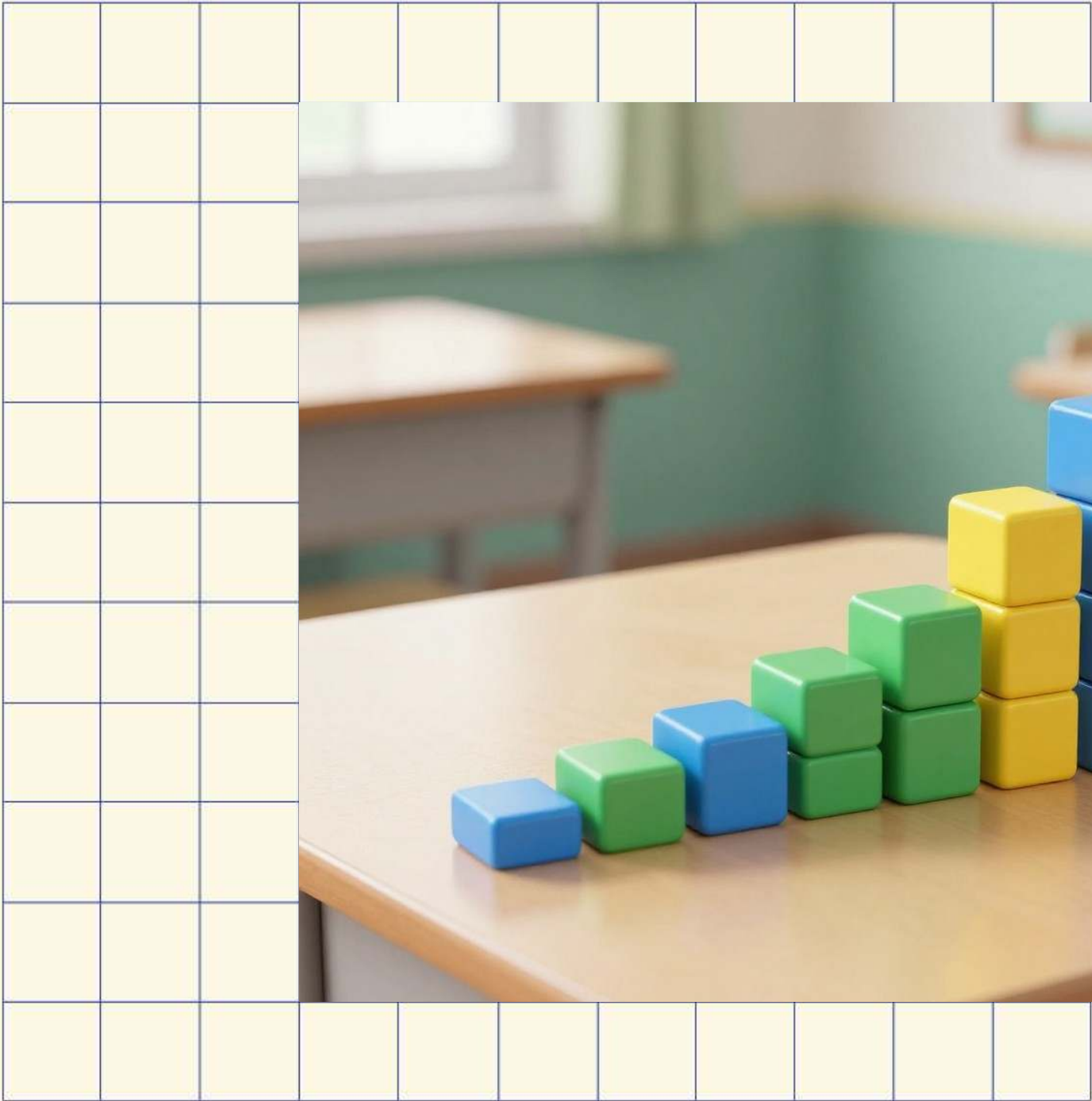
После каждого добавления отмечают промежуточную сумму: так легче заметить, где ответ начал расходиться с ожиданием или вычислениями.

Поведение суммы

Если q больше 1, значения растут быстрее; при дробном q они уменьшаются, и это хорошо видно по последовательности.

Проверка смысла

Наглядная запись помогает не путать отдельные члены с общей суммой и быстрее находить ошибку в расчётах.





Главные формулы и связь между ними

Для суммы первых r членов ГП важно выбрать нужный случай: при $q \neq 1$ работает дробная формула, а при $q=1$ — простое умножение. Проверка через n -й член помогает быстро убедиться, что ответ верный.

