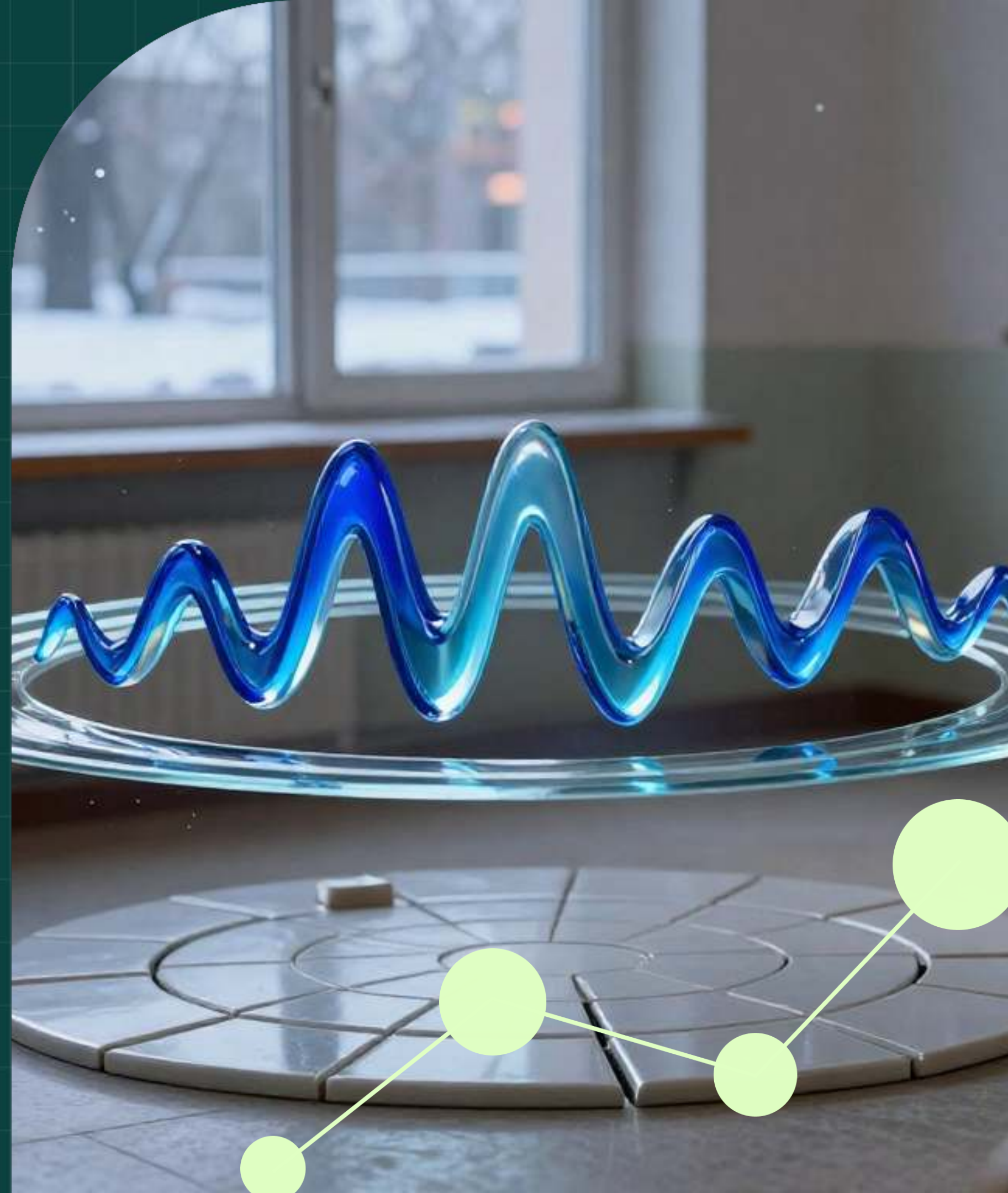




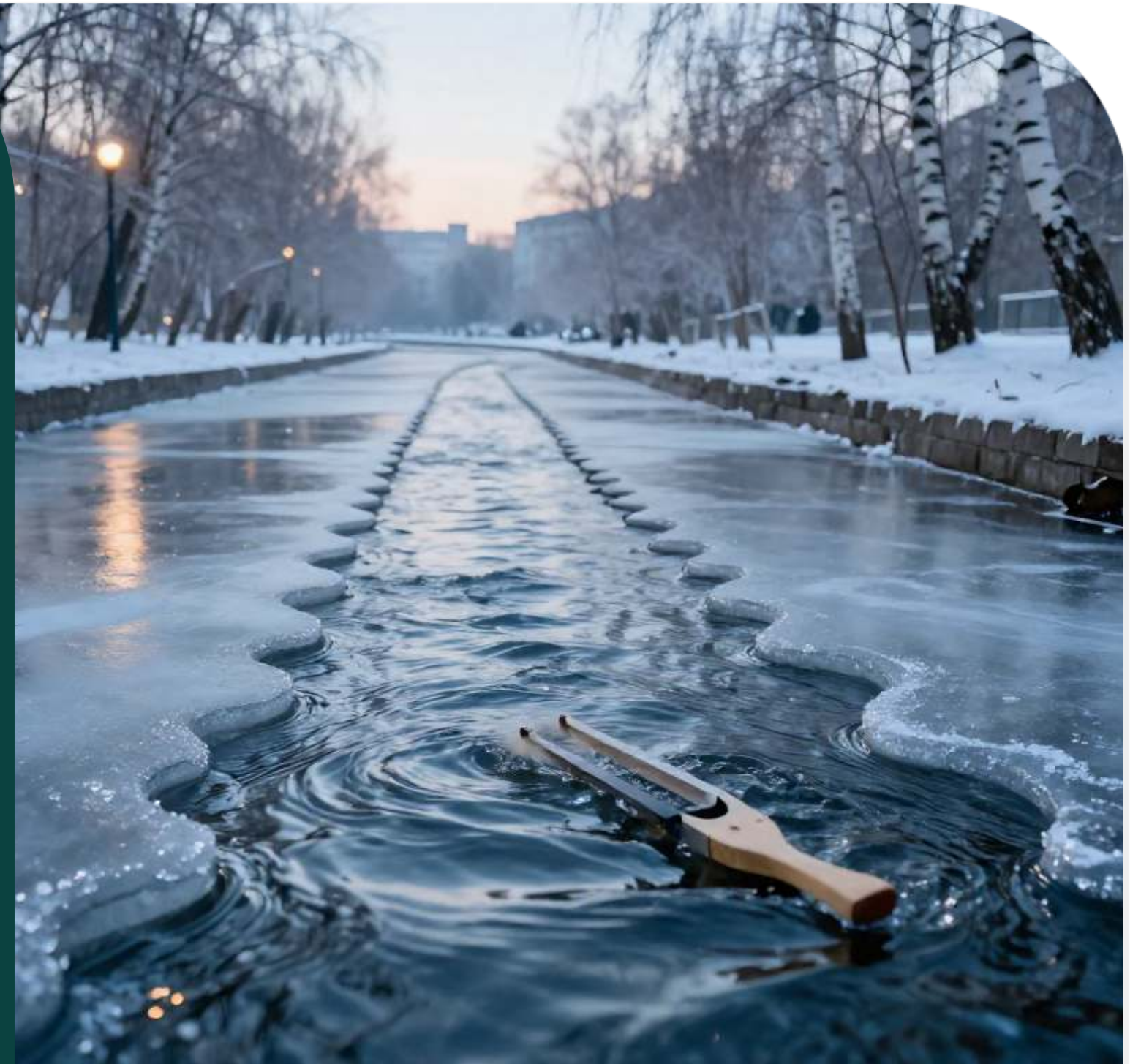
Функция $y = \sin x$: свойства и график

Одна из важнейших синусоид школьной алгебры.

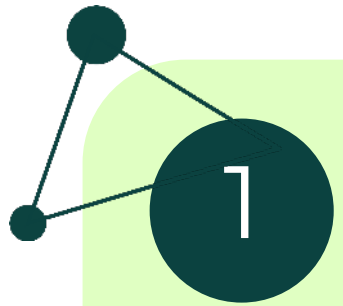


Синус в математике и реальном мире

Синус связывает тригонометрию с измерением углов, периодическими явлениями и моделированием процессов. В 11 классе он становится опорным примером для изучения графиков, симметрии, периодичности и прикладных задач.



Определение синуса через единичную окружность



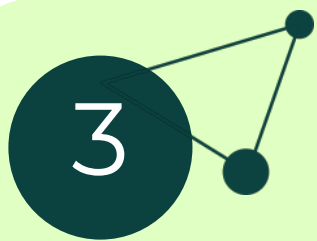
1 Точка на окружности

Для числа x синусом называют ординату точки единичной окружности, соответствующей углу x в радианах. Это определение связывает алгебру с геометрией и делает функцию наглядной.



2 Изменение при движении

Когда точка движется против часовой стрелки, её вертикальная координата непрерывно меняется от -1 до 1 . Поэтому значение $\sin x$ плавно возрастает и убывает без скачков и разрывов.



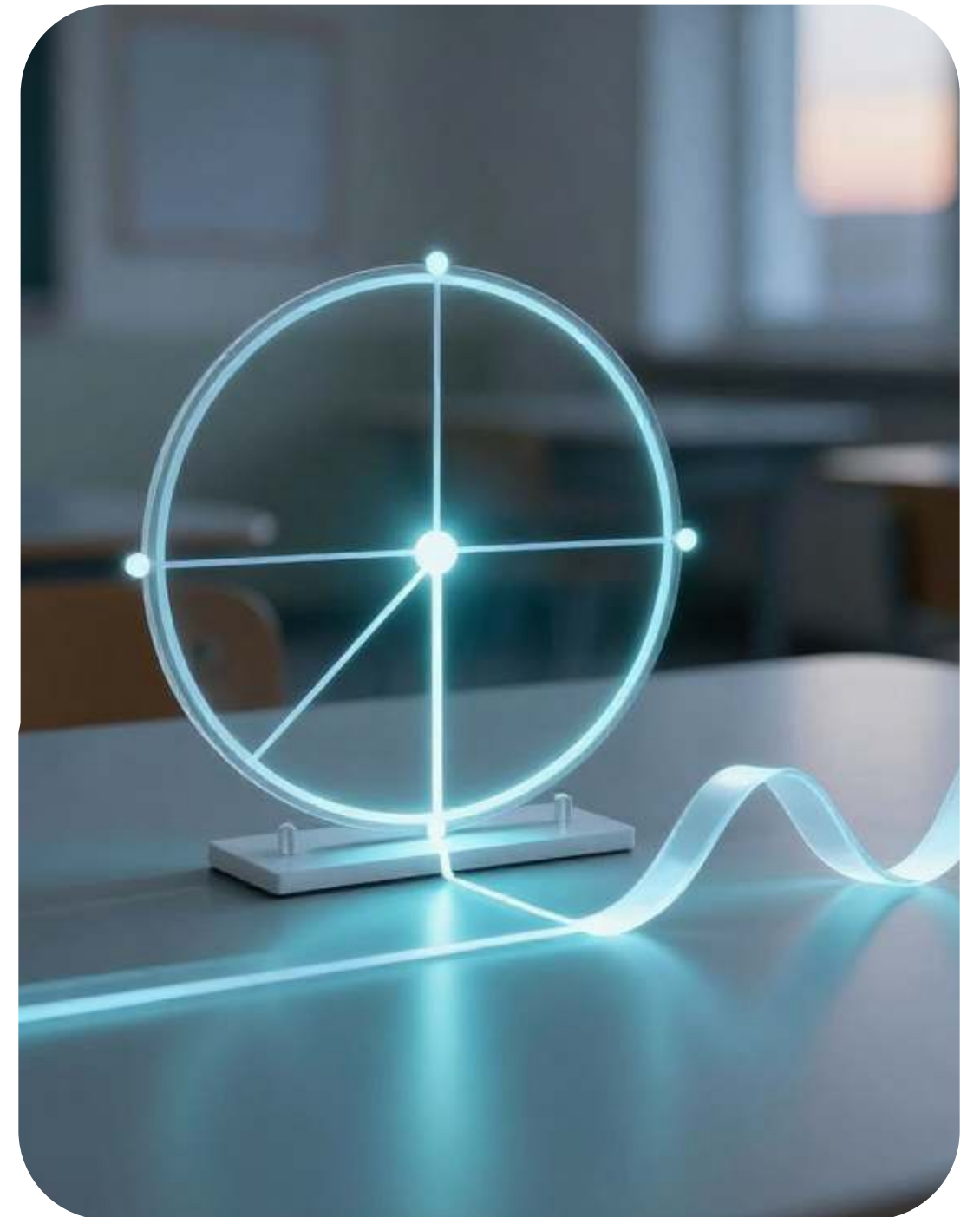
3 Откуда берётся период

После полного оборота точка возвращается в исходное положение, а значит, значения синуса повторяются. Именно это объясняет периодичность функции и одинаковые участки её графика.



4 Связь с графиком

Непрерывное изменение ординаты на окружности порождает плавную волну на координатной плоскости. Так геометрическая модель напрямую превращается в привычную синусоиду.



Основные свойства функции $y = \sin x$

Свойство	Характеристика	Следствие
ОДЗ	$\mathbb{R}$	любой x допустим
Значения	$[-1; 1]$	график ограничен
Период	2π	повторение
Чётность	нечётная	симметрия

Сводная таблица помогает быстро увидеть ключевые характеристики синуса и их графическое значение.

Синус определён на всей числовой прямой, но его значения строго ограничены и регулярно повторяются, что делает график устойчиво волнообразным.



Область определения и область значений

5

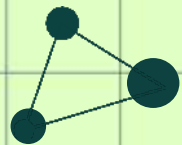
- Область определения

Функция $y = \sin x$ существует при любом действительном x , потому что для любого угла можно определить соответствующую точку на единичной окружности и её ординату.

- Область значений

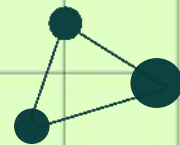
Значения синуса лежат в промежутке $[-1; 1]$, так как вертикальная координата точки на единичной окружности не может по модулю превышать единицу.

Построение графика синуса по опорным точкам



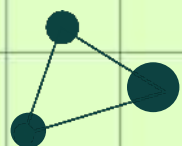
Начало периода

График удобно начинать с точки $(0; 0)$: именно здесь синус проходит через ось Ox и далее направляется вверх, задавая старт одного полного периода.



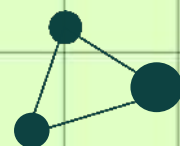
Первая вершина

В точке $(\pi/2; 1)$ функция достигает наибольшего значения. Эта опорная точка фиксирует максимум и показывает, как высоко поднимается синусоида на первом участке.



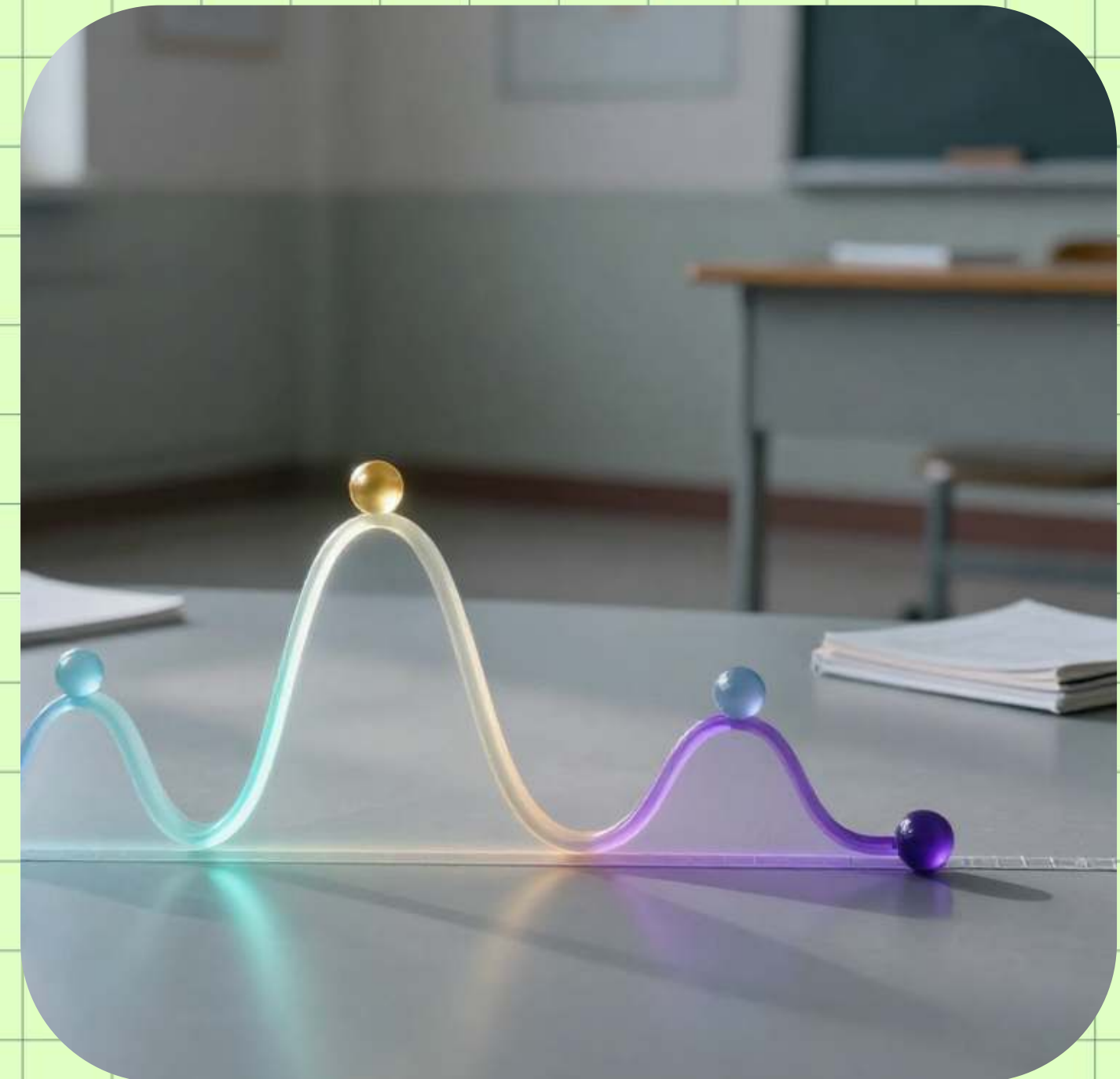
Середина периода

При $x = \pi$ график снова пересекает ось Ox . Такая точка помогает проверить правильность построения и увидеть, что значения после максимума возвращаются к нулю.

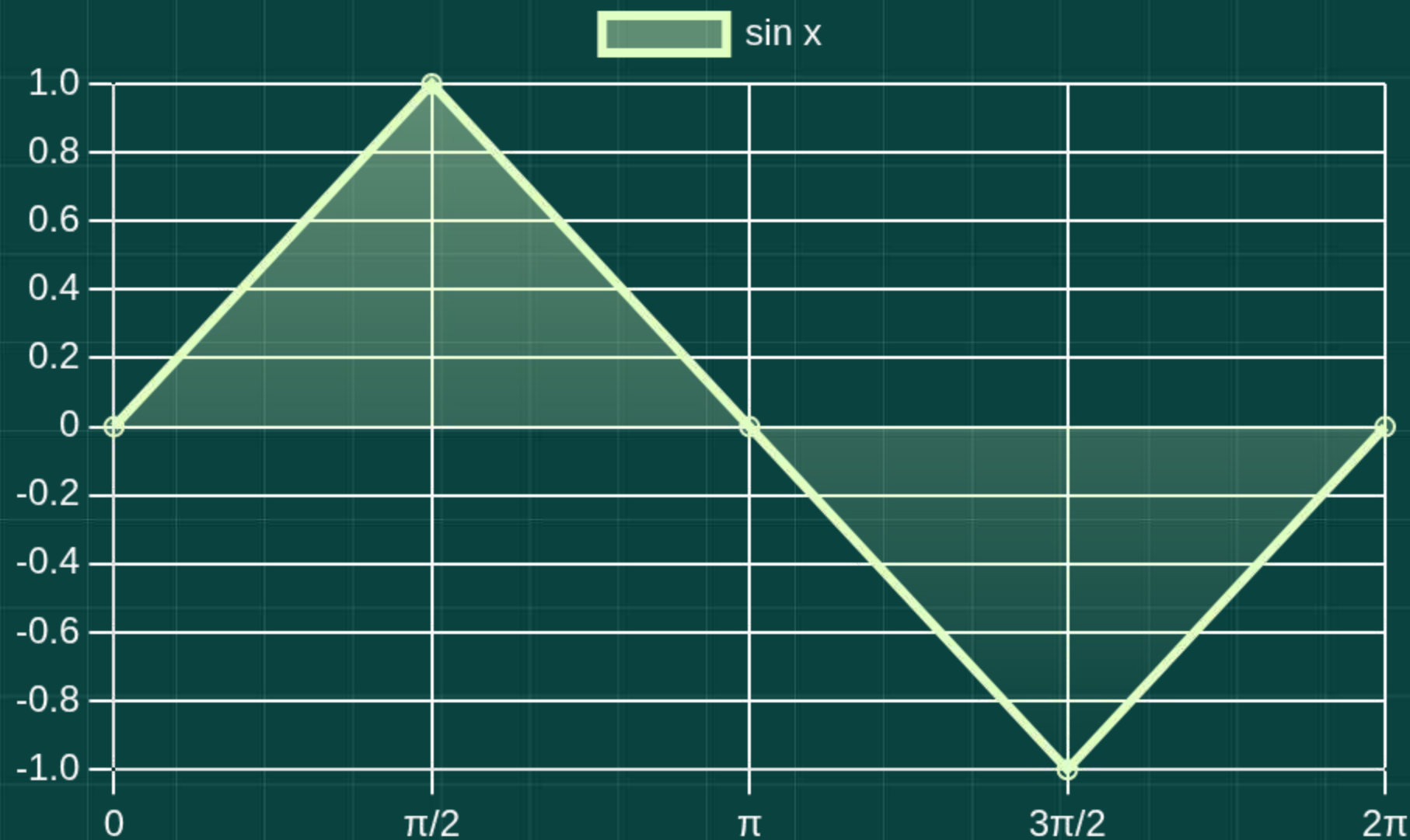


Минимум и завершение

Точки $(3\pi/2; -1)$ и $(2\pi; 0)$ завершают один период. Между ними кривая плавно опускается до минимума и затем возвращается к исходному уровню.



Значения синуса в ключевых угловых точках



Эти точки образуют один полный цикл синусоиды и позволяют быстро проверить правильность построения графика.

Последовательность значений показывает симметричный подъём и спад функции: от нуля к максимуму, через ноль к минимуму и обратно.



Табличные значения функции $y = \sin x$ в стандартных углах

Через этот промежуток значения функции полностью повторяются, поэтому график состоит из одинаковых волн.

Школьный курс алгебры, тема «Периодические функции»



2π

— наименьший положительный период синуса.

Нечётность и симметрия графика

9

1

Формула нечётности

Для синуса выполняется равенство $\sin(-x) = -\sin x$. Оно означает, что при смене знака аргумента значение функции меняет знак, сохраняя одинаковую по модулю высоту.

3

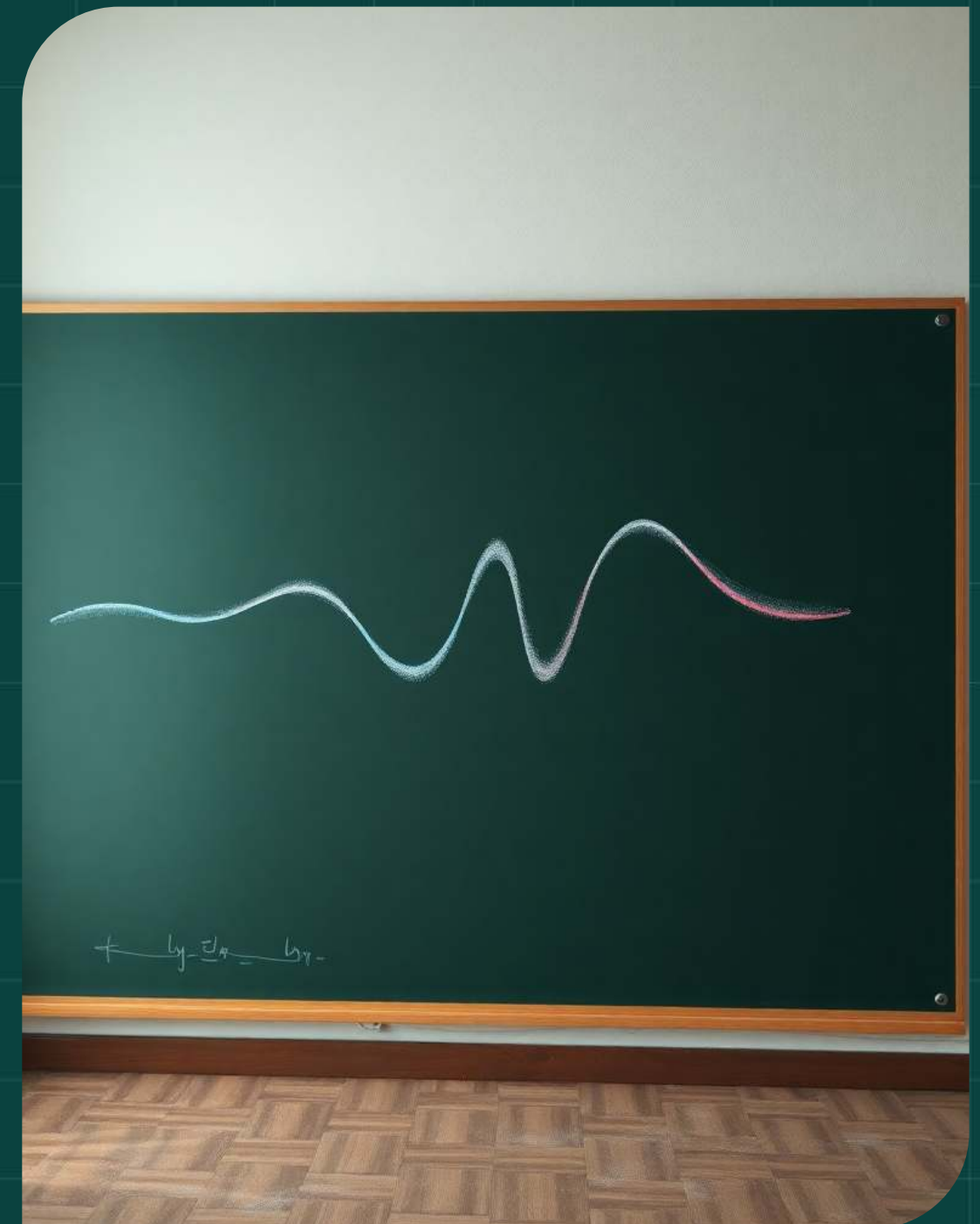
Практический вывод

Благодаря этой симметрии достаточно построить часть графика на положительных x , а затем отразить её относительно начала координат. Это экономит время и уменьшает число ошибок.

2

Симметрия графика

График функции симметричен относительно начала координат. Если точке с координатами $(x; y)$ соответствует одна точка, то точке $(-x; -y)$ соответствует парная.



Нули, максимумы и минимумы функции

Элемент	Формула	Значение
Нули	$x = \pi k$	0
Максимумы	$x = \pi/2 + 2\pi k$	1
Минимумы	$x = 3\pi/2 + 2\pi k$	-1

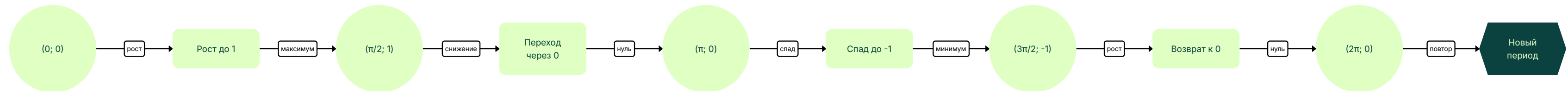
Опорные точки экстремумов и нулей задают форму синусоиды на каждом периоде и помогают быстро восстановить весь график.

Нули, максимумы и минимумы повторяются через один и тот же шаг, поэтому по ним легко распознавать и строить каждый новый период.



Движение синусоиды за один период

Путь точки при изменении x от 0 до 2π и повторении той же схемы на следующем интервале



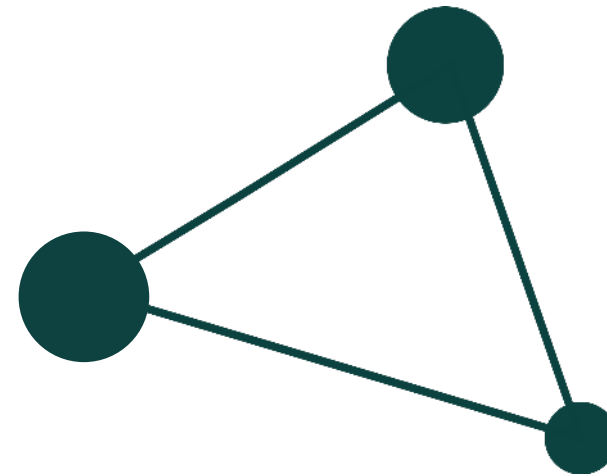
Промежутки возрастания и убывания

12

1

Рост до максимума

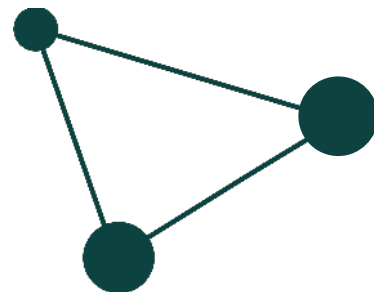
На отрезке от 0 до $\pi/2$ синус увеличивается, потому что значения функции последовательно поднимаются от 0 к 1. Это самый наглядный участок восхождения графика.



2

Убывание к минимуму

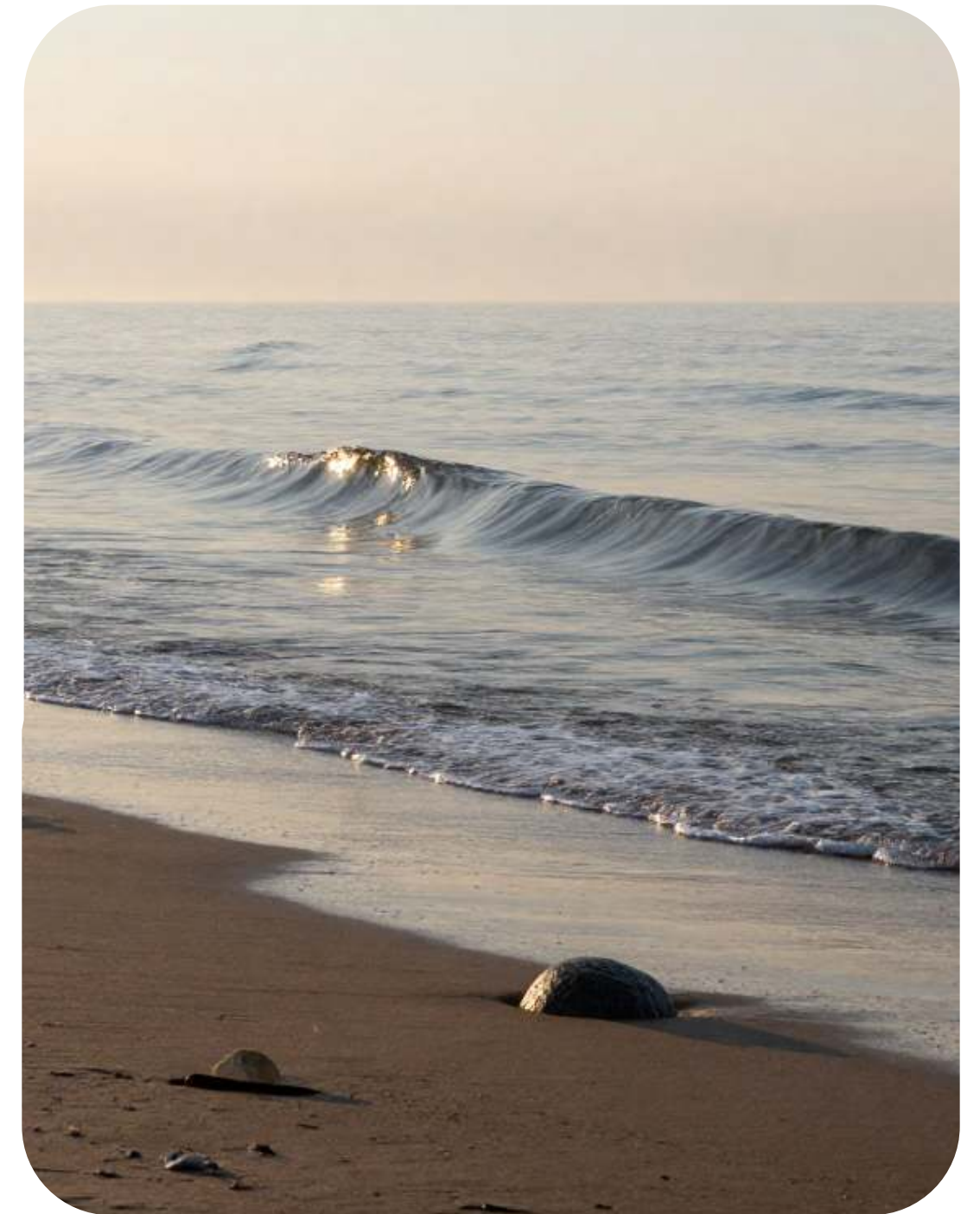
На промежутке от $\pi/2$ до $3\pi/2$ график идёт вниз: сначала проходит через ось Ox , затем достигает значения -1. Здесь функция теряет высоту без скачков и разрывов.



3

Возврат к исходному уровню

На отрезке от $3\pi/2$ до 2π синус снова возрастает и возвращается к нулю. Этот участок завершает один период и подготавливает повторение той же формы дальше.



Как связаны синус и косинус



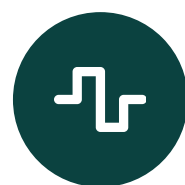
Формула связи

Связь функций выражается тождеством $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$. Оно показывает, что синус и косинус описывают одну и ту же закономерность, но с разным отсчётом угла.



Сдвиг графика

График $y = \sin x$ можно получить из графика $y = \cos x$ простым сдвигом вдоль оси x на $\pi/2$. Поэтому обе кривые совпадают по форме, но смещены относительно друг друга.



Общие свойства

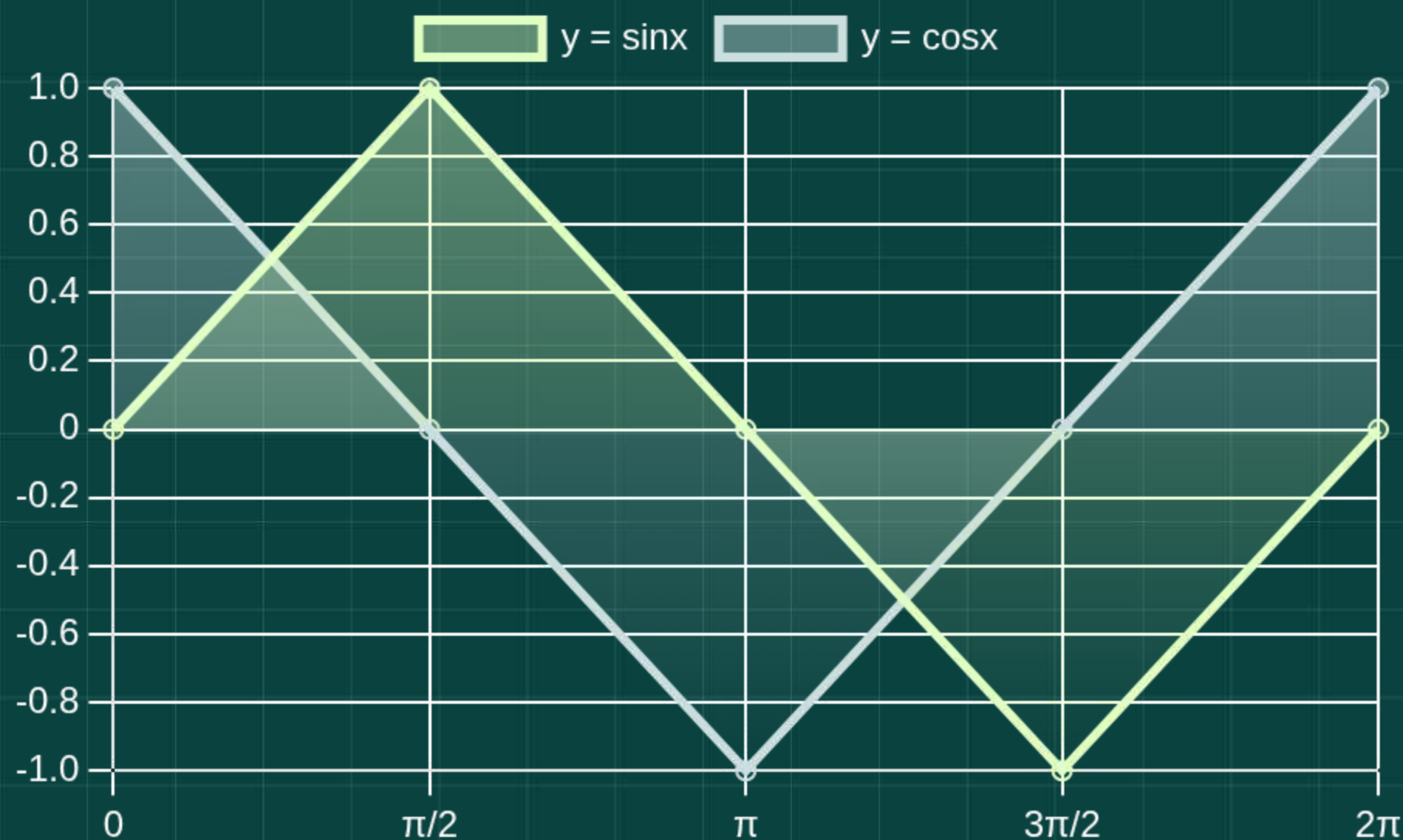
У обеих функций одинаковая амплитуда, одинаковый период 2π и один и тот же диапазон значений от -1 до 1 . Это делает их взаимозаменяемыми в построениях и вычислениях.



Разные начальные точки

Различие заметно уже при $x = 0$: синус проходит через начало координат, а косинус начинается со значения 1 . Именно эта стартовая разница и создаёт визуальный сдвиг графиков.

Сравнение графиков $y = \sin x$ и $y = \cos x$



На одном поле хорошо видно, что обе функции имеют одинаковый размах, но начинают цикл в разных точках. Это помогает запомнить их взаимный сдвиг.

Синус и косинус различаются фазой, но совпадают по форме, периоду и диапазону значений. Для анализа графиков достаточно знать одну из этих функций.



Теоретические значения стандартных тригонометрических функций

Преобразование графика синуса

15

1

Амплитуда

Коэффициент a растягивает или сжимает график по вертикали. Его модуль задаёт амплитуду: чем больше $|a|$, тем выше поднимаются вершины и глубже опускаются впадины.

2

Период

Коэффициент b изменяет частоту повторения. Период функции равен $2\pi/|b|$, поэтому при увеличении $|b|$ график становится более «сжатым» вдоль оси x .

3

Сдвиг по оси x

Параметр c отвечает за горизонтальное смещение синусоиды. Он меняет положение характерных точек, но не нарушает общую форму и не влияет на амплитуду.

4

Вертикальный сдвиг

Параметр d поднимает или опускает весь график целиком. После такого преобразования средняя линия функции уже не совпадает с осью Ox , а проходит на уровне $y = d$.

Значения синуса в стандартных углах

x	sinx
0	0
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\pi/2$	1
π	0
$3\pi/2$	-1

Опорные значения синуса для часто используемых углов.

Эти значения позволяют быстро строить график синуса и проверять ответы в тригонометрических уравнениях без вычислений по общей формуле.

Производная функции $y = \sin x$

17

- Основная формула

Производная синуса равна $\cos x$. Это означает, что скорость изменения функции в каждой точке определяется значением косинуса, а не самой синусоиды.

- Где функция растёт

Если $\cos x > 0$, график синуса идёт вверх. Такие участки легко заметить на промежутках, где производная положительна и наклон касательной направлен вверх.

- Где функция убывает

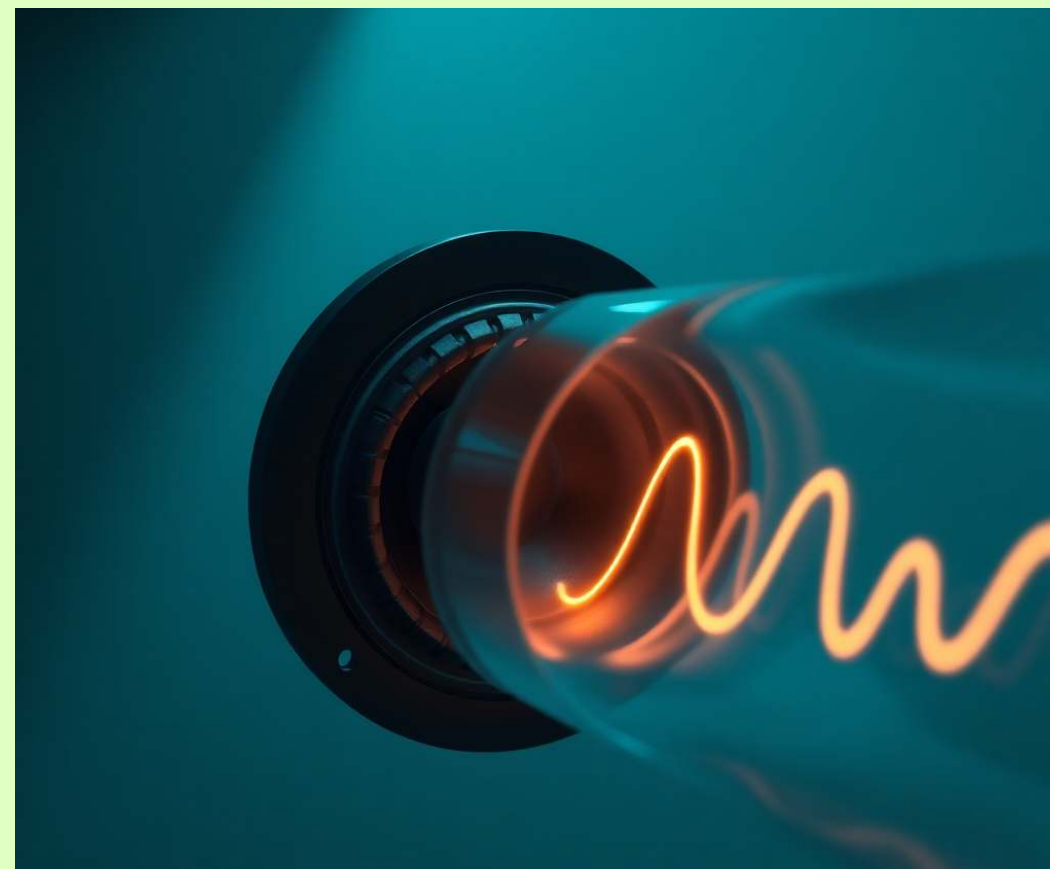
Если $\cos x < 0$, значение производной отрицательно, и синус убывает. В точках $x = \pi/2 + \pi k$ производная обращается в ноль, что соответствует локальным экстремумам.

Синус в реальных колебаниях и волнах



Маятник и пружина

При малых отклонениях движение маятника и колебания груза на пружине близки к синусоиде. Такая модель удобна, потому что точно описывает повторяемость движения и позволяет заранее оценивать положение тела в любой момент времени.



Звук и электрический сигнал

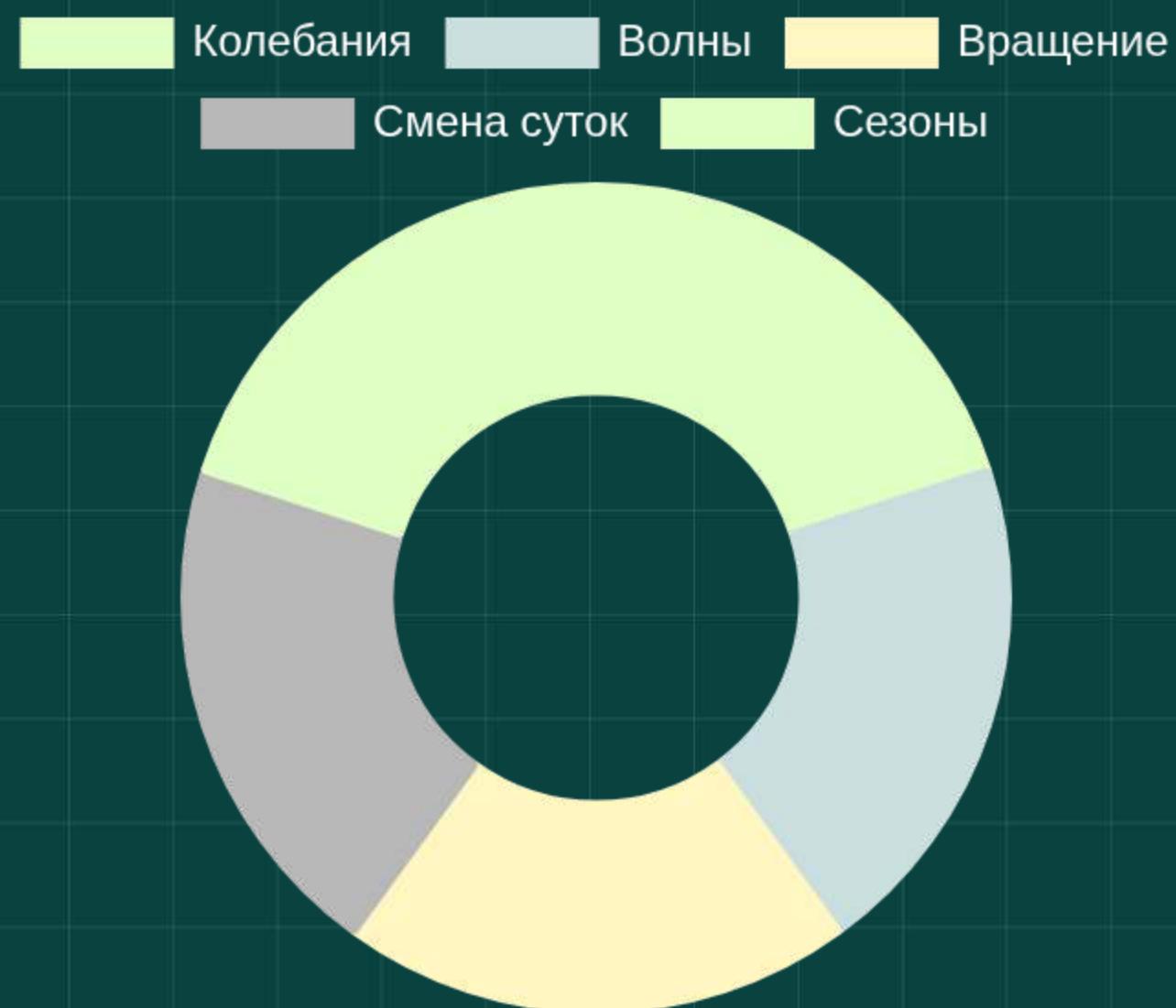
Синусоидальная форма лежит в основе многих звуковых и электрических процессов. В переменном токе и в чистом тоне легко увидеть чередование подъёмов и спадов, а амплитуда показывает силу сигнала.



Волны вокруг нас

Поверхностные волны на воде, колебания струны и многие циклические изменения в природе также удобно изображать синусом. Этот график помогает сравнивать процессы с разной скоростью, но одинаковой периодичностью.

Периодические процессы, описываемые синусом

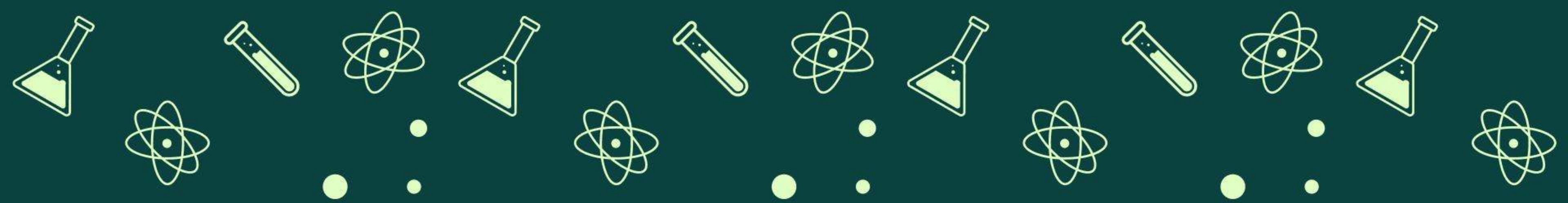


Синус удобен для описания разных циклов, потому что одинаково хорошо передаёт повторяемость и плавное изменение величины. На практике это облегчает сравнение процессов разной природы.

Несмотря на различия между природными и техническими явлениями, их объединяет один принцип — регулярное повторение. Именно поэтому синус остаётся универсальной моделью периодичности.



Схематическая классификация примеров из школьного курса алгебры и физики



Что важно запомнить о функции $y = \sin x$

Функция $y = \sin x$ определена при любом x , принимает значения только от -1 до 1 , имеет период 2π и обладает нечётной симметрией. Эти свойства делают её базовой моделью периодических процессов.