

Объемы и поверхности тел вращения

Цилиндр, конус, усеченный конус и шар: учимся считать объем и поверхности.



От рисунка на плоскости — к формуле в пространстве

Тело вращения возникает, когда фигуру вращают вокруг оси. В 10 классе опираемся на окружность, круг, треугольник и прямоугольник, а вычисления ведем через радиус, высоту, образующую и соотношения по диаметру.



Цилиндр: элементы и основные формулы

Прямой круговой цилиндр образуют два равных параллельных основания — круги радиуса r — и образующие, перпендикулярные основаниям. Ось проходит через центры кругов.

Площадь основания определяется формулой $S_{\text{осн}} = \pi r^2$. Боковая поверхность имеет вид развертки прямоугольника: $S_{\text{бок}} = 2\pi r h$, где h — высота цилиндра.

Полный объем цилиндра выражается так: $V = \pi r^2 h$. Эти формулы связывают плоские элементы (круг) с объемом в пространстве и удобны для расчетов вместимости.

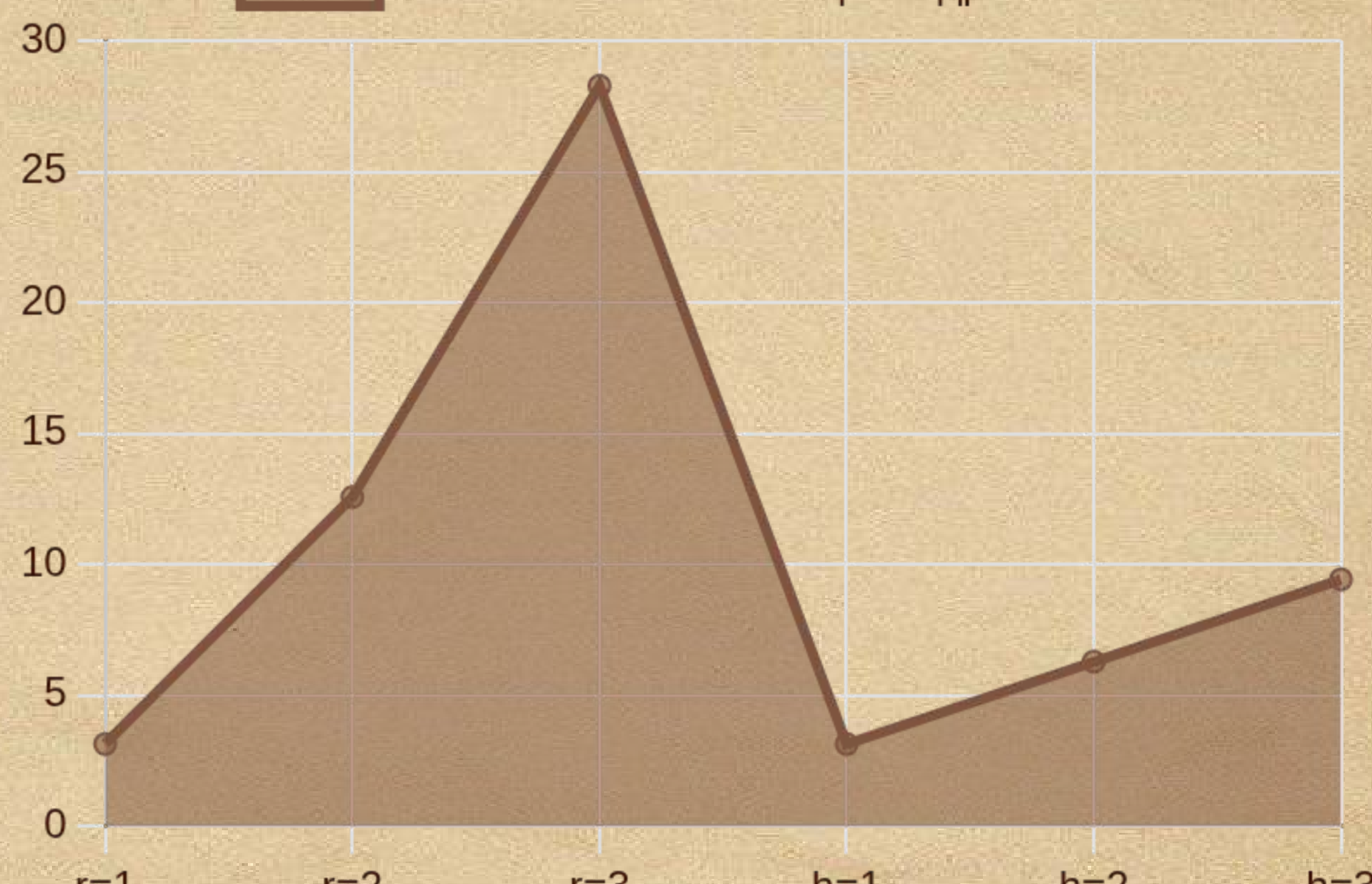
Как изменяется объем цилиндра при изменении радиуса и высоты

При фиксированном h объем растет как $\pi \cdot (r^2)$, то есть радиус влияет через квадрат. При фиксированном r объем изменяется пропорционально высоте.

Сравнение показывает: увеличение радиуса дает более резкий рост, чем линейное увеличение высоты. Поэтому в задачах чаще чувствительны к r .

Расчеты по формуле $V = \pi r^2 h$ ($\pi \approx 3,14159$), дата: 13.05.2026

Зависимость объема цилиндра от r и h



Конус: радиус, высота и образующая

Определяющие параметры прямого конуса

Круговой конус задается радиусом основания r , высотой h и образующей l . Для прямого конуса выполняется соотношение $l^2 = r^2 + h^2$, вытекающее из треугольника между вершиной и основанием.

Формулы для боковой и полной поверхности и объема

Площадь боковой поверхности равна $S_{\text{бок}} = \pi r l$. Полная поверхность: $S_{\text{полн}} = \pi r(l + r)$, а объем: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. Эти выражения позволяют вычислять вместимость конусообразных сосудов и расход материала.



Усеченный конус как часть полного конуса

Усеченный конус получается при отсечении вершины полного конуса плоскостью, параллельной основанию. Его задают радиусами оснований R и r , высотой h и образующей l .

Объем вычисляется по формуле $V = 1/3 \pi h(R^2 + Rr + r^2)$. Боковая поверхность: $S_{\text{бок}} = \pi(R + r)l$. Формулы учитывают обе окружности «сверху» и «снизу».

Такая форма встречается в моделях стаканов, абажуров, ведер и в элементах машин. Поэтому умение считать объем и площадь помогает при конструировании и подборе покрытий.

Сравнение основных формул тел вращения

Подсказка для задач: какие параметры нужны и как связаны объем и поверхности с радиусами, высотой и образующей.

У разных тел меняется «набор входных данных»: у шара только r , у цилиндра — r и h , у конуса добавляется образующая l . Для усеченного конуса требуются два радиуса R и r .

Фигура	Элементы	V (объем)	$S_{\text{бок}}$	$S_{\text{полн}}$
Цилиндр	r, h	$\pi r^2 h$	$2\pi r h$	$2\pi r(r+h)$
Конус	r, h, l	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$\pi r l$	$\pi r(l+r)$
Усеч. конус	R, r, h, l	$\frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$	$\pi(R+r)l$	$\pi(R+r)l + \pi(R^2 + r^2)$
Шар	r	$\frac{4}{3}\pi r^3$	—	$4\pi r^2$

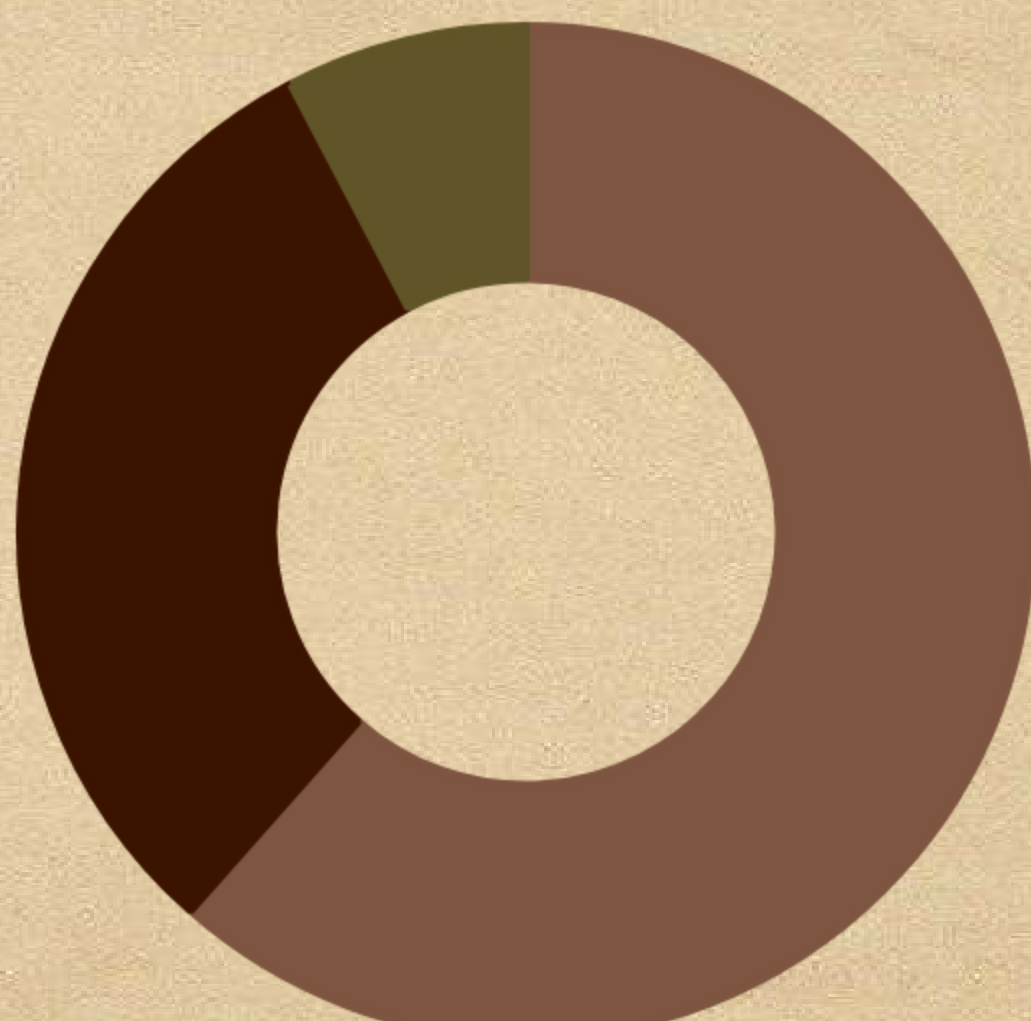
Сводные формулы из курса стереометрии (обобщение известных выражений).

Шар: масштабирование объема и площади поверхности

Если радиус увеличить в 2 раза, то в формулах V и S меняется степень r : у объема — куб, у площади — квадрат. Поэтому темпы роста различаются.

Объем растет быстрее площади: при $r \rightarrow 2r$ объем увеличивается в 8 раз, а поверхность — в 4 раза. Это помогает оценивать масштаб в практических расчетах.

$r \rightarrow 2r: V$ $r \rightarrow 2r: S$ Кейс: исходный r



Сравнение по формулам шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$; дата: 13.05.2026

Метод сечения и принцип Кавальери

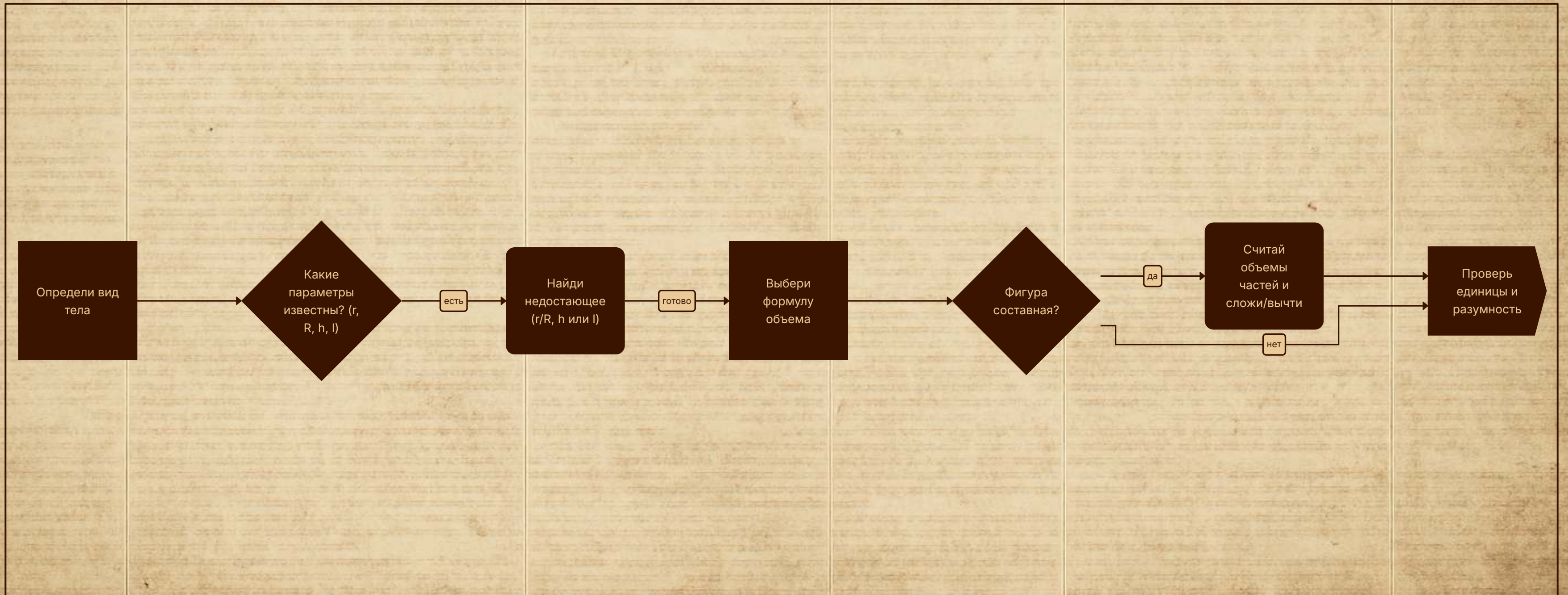
Объем тела
удобно
рассматривать как
сумму бесконечно
тонких «слоев»
после разрезания
на сечения. Тогда
задача сводится к
сравнению
площадей этих
сечений.

Принцип
Кавальери
утверждает: если
два тела имеют
одинаковую
высоту и площади
соответствующих
сечений на каждом
уровне равны, то
их объемы равны.
Образуется
строгий мост
между плоскостью
и пространством.

В выводах формул
тел вращения эта
идея помогает
объяснить, почему
в результате
появляются
множители
площади
основания и
высоты (или
радиусы в нужных
степенях).

Алгоритм решения задач на объем тел вращения

Логика подбора формулы: от вида тела и известных параметров к расчету и проверке результата.



Площади поверхностей: что входит в расчет

Полная поверхность тела вращения включает боковую поверхность и, если они есть, основания. Для цилиндра и конуса учитываются круги оснований; для шара оснований нет.

Поэтому для шара полная и боковая поверхности совпадают. При выборе формулы важно понимать, что именно требуется по условию: общая площадь или только площадь внешнего «обтекания».

В прикладных задачах часто нужна боковая поверхность: ее площадь напрямую связывают с окраской, облицовкой и расходом покрытия, когда торцевые части не участвуют в отделке.

Площадь поверхности при одинаковом радиусе

При одинаковом r у цилиндра и конуса площадь зависит не только от радиуса, но и от высоты или образующей l : меняется геометрия «растяжки» боковой поверхности.

Диаграмма показывает: для шара достаточно одного параметра r , тогда как цилиндр и конус по-разному наращивают площадь за счет высоты и образующей.

Рассчитано по формулам $S_{\text{шар}}=4\pi r^2$, $S_{\text{бок(цилиндр)}}=2\pi r h$, $S_{\text{полн(цилиндр)}}=2\pi r(h+r)$, $S_{\text{бок(конус)}}=\pi r l$, $S_{\text{полн(конус)}}=\pi r(l+r)$; принято $l=h=1$ для сопоставления.



Развертки тел вращения

- Развертка цилиндра состоит из прямоугольника и двух равных кругов: высота цилиндра становится стороной прямоугольника, а ширина соответствует длине окружности основания.
- Развертка конуса — это сектор круга и одно основание: радиус сектора равен образующей l , а угол определяется радиусом основания r . У усеченного конуса появляется кольцевой сектор и два круга оснований.



Типичные задачи и практические модели

Объект	Модель	Формула	Что находим
Сосуд	Цилиндр/конус	V	вместимость
Дорожный конус	Усеченный конус	V ; $S_{\text{бок}}$	объем или площадь окраски
Мяч	Шар	S	площадь поверхности
Труба/рукав	Цилиндр	$S_{\text{бок}}$	расход материала
Резервуар	Составная фигура	V	объем жидкости

Подбор геометрической модели к реальному объекту помогает выбрать нужную формулу и правильно интерпретировать результат как вместимость, расход материала или площадь покрытия.

Самые «частые» выборы формулы: для вместимости берут объем, для отделки — боковую поверхность, для сферических деталей — зависимость только от радиуса.

Классификация задач по типовым моделям школьного курса (стереометрия).

Составные тела и разность объемов

Сложные изделия удобнее описывать как сумму или разность простых тел вращения. Тогда задача сводится к вычислению нескольких объемов по базовым формулам и их объединению.

Детали с отверстиями часто моделируют как разность: берут объем «внешнего» тела и вычитают объем вырезанной части. Для этого коническое отверстие заменяют соответствующим телом вращения.

Например, резервуар может состоять из цилиндрической части и полусферических «полюсов». Отдельно находят объем цилиндра и объем полусферы, после чего складывают результаты.

При вычислениях важно одинаково определять радиусы и высоты: у составных фигур они относятся к разным частям. Порядок действий обычно: выделить части, найти V каждой, затем сложить/вычесть.

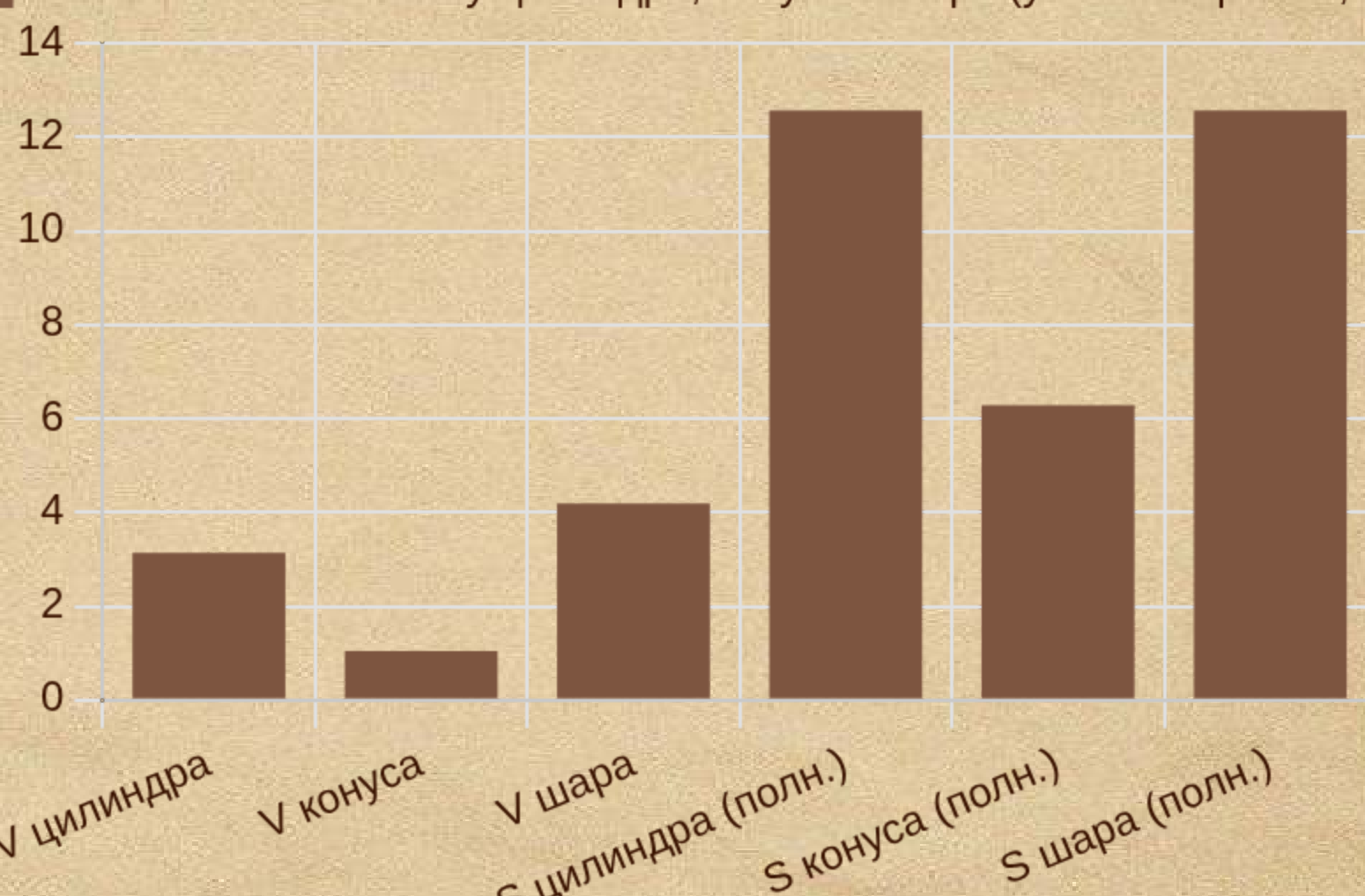
Сравнение объемов и площадей у разных тел

При равных r и h видны разные «коэффициенты формы»: объем конуса в три раза меньше объема цилиндра при одинаковых r и h , а шар масштабируется иначе.

Сильнее всего различия проявляются в объеме: зависимость от r для шара кубическая, а для цилиндра и конуса линейная по высоте. Форма определяет результат даже при одинаковых размерах.

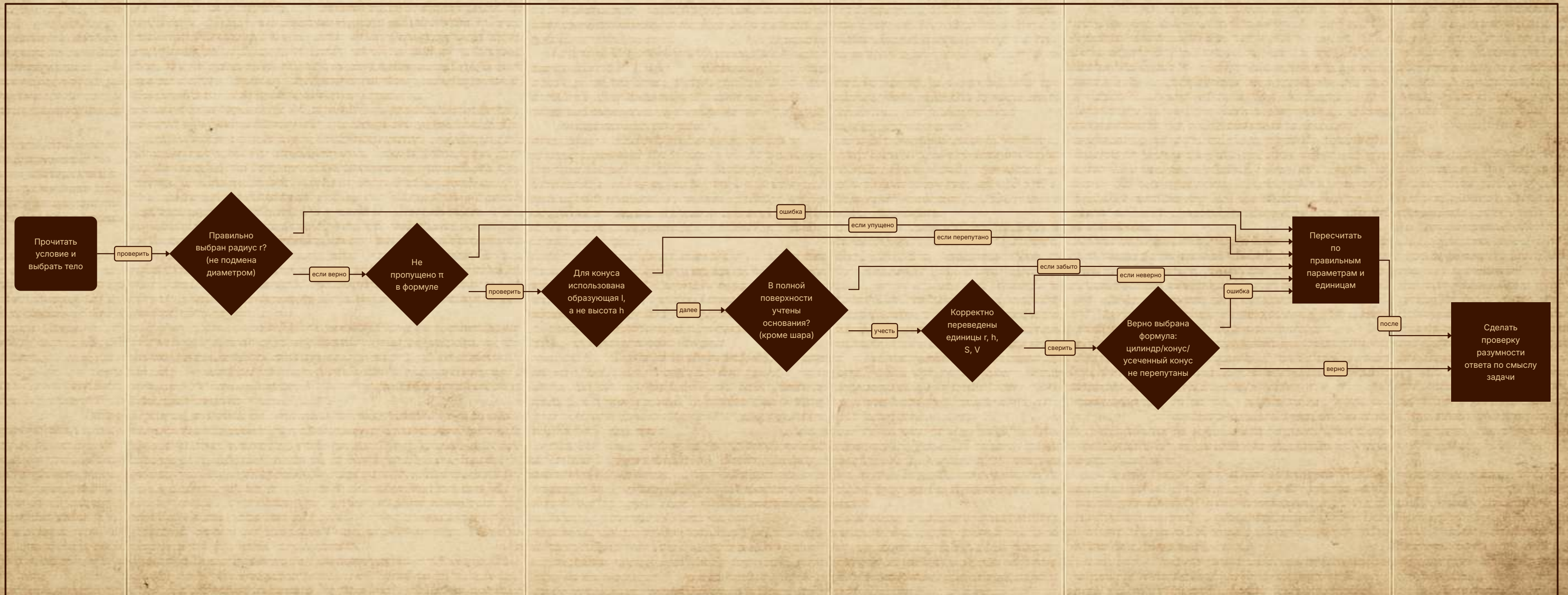
Рассчитано по формулам $V(\text{цилиндр})=\pi r^2 h$, $V(\text{конус})=1/3\pi r^2 h$, $V(\text{шар})=4/3\pi r^3$ и $S(\text{цилиндр})=2\pi r(h+r)$, $S(\text{конус})=\pi r(l+r)$, $S(\text{шар})=4\pi r^2$; для сопоставления взято $r=1$, $h=1$, $l=1$.

■ Сопоставление V и S у цилиндра, конуса и шара (условно при $r=1$, $h=1$)



Типичные ошибки в задачах на тела вращения

Наиболее частые сбои при выборе параметров и формул; последствия — систематическая погрешность в ответе.



Исторический и научный контекст формул

Формулы объемов тел вращения опираются на античную геометрию и идеи, развивавшиеся в трудах по измерению площадей и пространственных фигур. Они показывают, как плоская геометрия «переходит» в пространственную.

Особое место занимает Архимед: его результаты для шара и цилиндра не только давали точные соотношения, но и формировали подход к вычислениям через сравнение и предельные рассуждения.

Сегодня эти же зависимости применяются в инженерных расчетах — при проектировании резервуаров, колес, куполов, оптических деталей и технических корпусов, где важны вместимость и расход материала.

Единицы измерения и пересчет величин

Величина	Единицы	Соотношение
Длина	мм, см, м	1 м=100 см
Площадь	мм ² , см ² , м ²	1 м ² =10 000 см ²
Объем	мм ³ , см ³ , м ³	1 м ³ =1 000 000 см ³
Жидкость	л	1 л=1000 см ³ ; 1 м ³ =1000 л

Точный перевод единиц обязателен, потому что формулы тел вращения связывают радиусы, высоты и площади/объемы напрямую. Даже небольшая ошибка в масштабах приводит к большому сдвигу результата.

Площадь масштабируется квадратом длины, а объем — кубом: при переходе между метрами и сантиметрами степени меняются, поэтому пересчет нельзя делать «на глаз».

Федеральные/учебные справочные материалы по единицам СИ и метрическим соотношениям (школьный курс).

Announcement

Offered

Announcement

Offices

Making A

THE PLAN

Bus

Trade Rev

They

Issue

Точная геометрия для реальных расчетов

Тела вращения описываются радиусом, высотой и образующей, а их объемы и площади вычисляются точными формулами. Эта связь планиметрии и стереометрии помогает решать прикладные задачи: вместимость, материал и пространственные характеристики объектов.

Точная геометрия для реальных расчетов

Тела вращения описываются радиусом, высотой и образующей, а их объемы и площади вычисляются точными формулами. Эта связь планиметрии и стереометрии помогает решать прикладные задачи: вместимость, материал и пространственные характеристики объектов.

Bus

Trade Rev

The

Issue

Making A

THE PLAN MAN