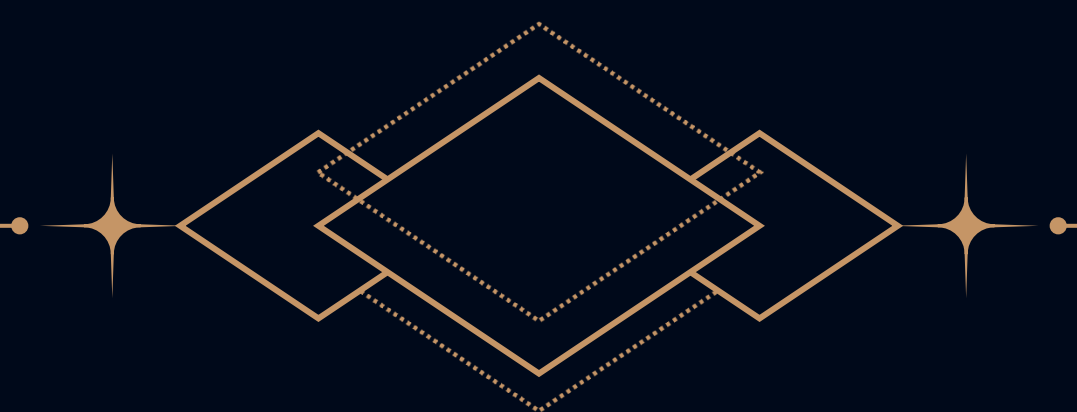


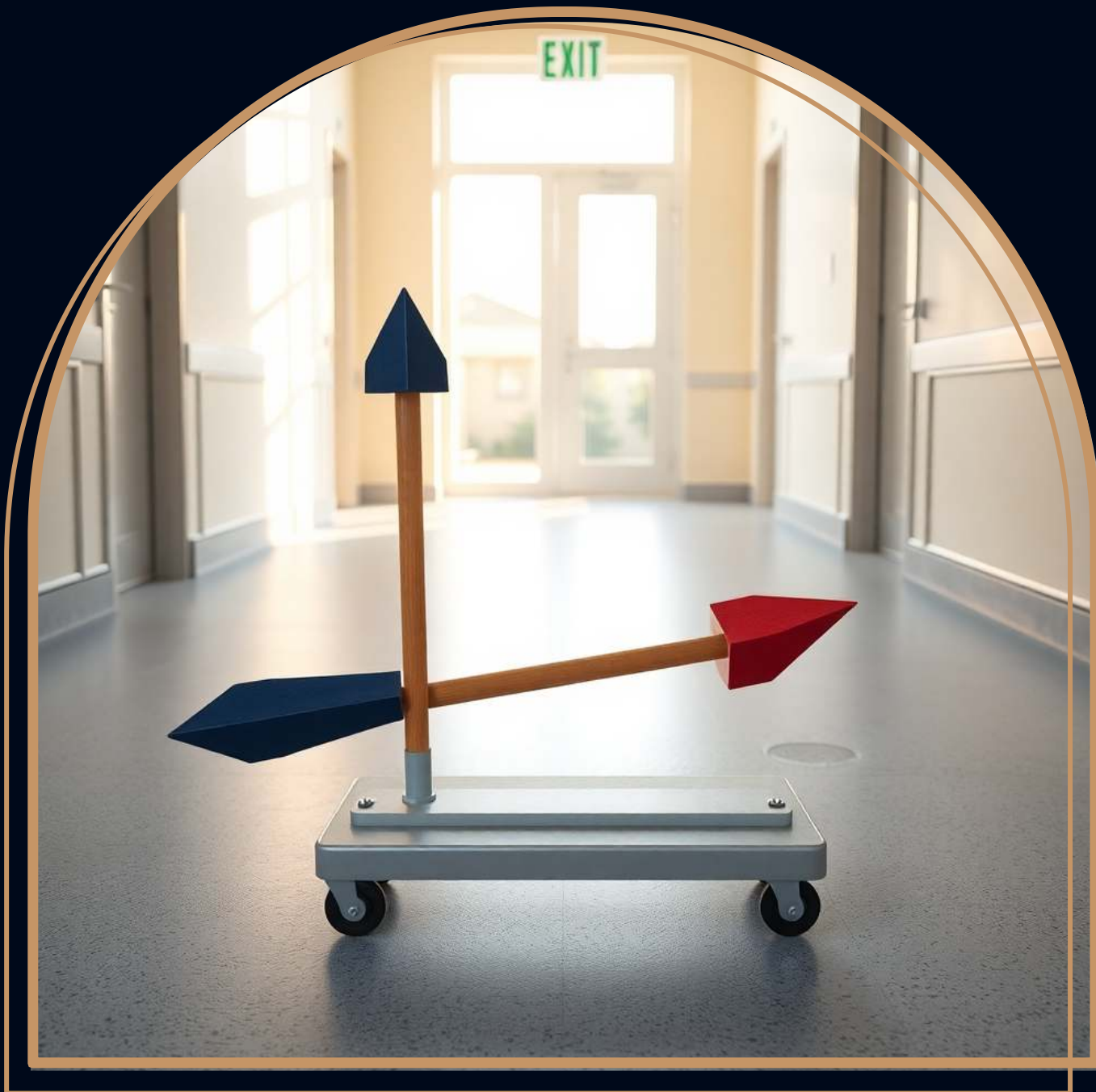


Скалярное произведение векторов: главное о теме

Число, которое связывает длину, направление
и угол между векторами.



Скалярное произведение в школьной программе



Эта тема объединяет векторы, координаты и углы. Она помогает увидеть, как алгебраические формулы работают вместе с геометрией и почему одно вычисление может описывать положение фигур и направление движения.



У прямого угла скалярное произведение равно нулю — это ключевой ориентир для проверки перпендикулярности.



90°

даёт нулевой результат, потому что косинус прямого угла равен нулю.

Определение скалярного произведения через формулу $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$

Геометрический смысл скалярного произведения

Острый угол

Если угол между векторами острый, косинус положителен. Поэтому и скалярное произведение получается положительным: векторы как будто направлены в одну сторону хотя бы частично.

Тупой угол

Когда угол тупой, косинус отрицателен, поэтому результат становится отрицательным. Это показывает, что векторы направлены скорее в разные стороны, чем в одну.

Прямой угол

При угле 90° косинус равен нулю, значит, скалярное произведение тоже равно нулю. Это самый важный случай для проверки перпендикулярности в задачах.

Длина и направление

Скалярное произведение зависит не только от длин векторов, но и от их взаимного расположения. Поэтому оно объединяет геометрию направления и обычные числовые вычисления.



Основные формулы темы



В таблице собраны самые важные записи: от геометрического определения до координатных формул в плоскости и пространстве.

Одна идея может быть записана по-разному: через угол между векторами или через их координаты.



Формула	Запись	Смысл
Определение	$a \cdot b = a \cdot b \cdot \cos \alpha$	через угол
Сам на себя	$a \cdot a = a ^2$	квадрат длины
Плоскость	$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$	2D-вычисление
Пространство	$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$	3D-вычисление

Определение и координатные формулы скалярного произведения

Координатная формула в 2D и 3D

1. Векторы на плоскости

Если векторы заданы парой координат, скалярное произведение находят по формуле $x_1x_2 + y_1y_2$. Здесь каждая координата участвует в вычислении отдельно, а затем результаты складываются.

2. Векторы в пространстве

Для трёхмерных векторов к сумме добавляется третья пара координат: $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Формула остаётся похожей, но учитывает ещё одно измерение.

3. Почему это удобно

Координатный способ особенно полезен, когда угол не дан напрямую. Не нужно чертить транспортиром: достаточно подставить числа из записи векторов и выполнить обычные действия.

4. Что можно узнать

По найденному значению можно сравнить векторы, проверить, образуют ли они прямой угол, или затем вычислить угол по формуле косинуса.

Как меняется скалярное произведение при разных углах



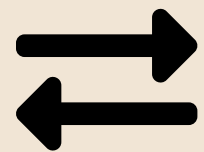
При одинаковых длинах векторов значение полностью зависит от косинуса угла, поэтому график отражает именно изменение направления.

Чем больше угол, тем меньше $\cos \alpha$; нулевой результат соответствует прямому углу, а отрицательный — тупому.



Значения косинуса для углов 0° , 60° , 90° , 120° , 180°

Свойства скалярного произведения



Перемена мест

Порядок векторов можно менять местами: результат не изменится. Это свойство помогает считать выражения быстрее и не бояться перестановки множителей в задаче.



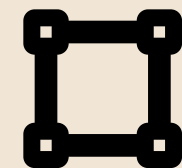
Раскрытие скобок

Скалярное произведение распределяется по сложению. Поэтому выражения вида $(a + b) \cdot c$ можно заменить суммой двух произведений и упростить вычисления.



Умножение на число

Если один вектор умножен на число, это число можно вынести за скобки. Так удобно работать с длинными выражениями и сравнивать результаты.

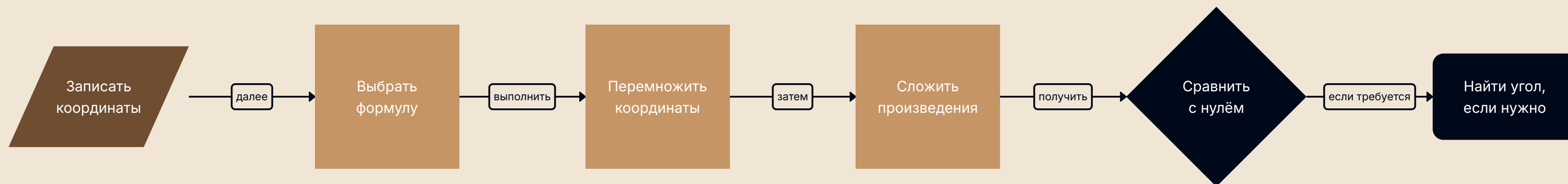


Применение в задачах

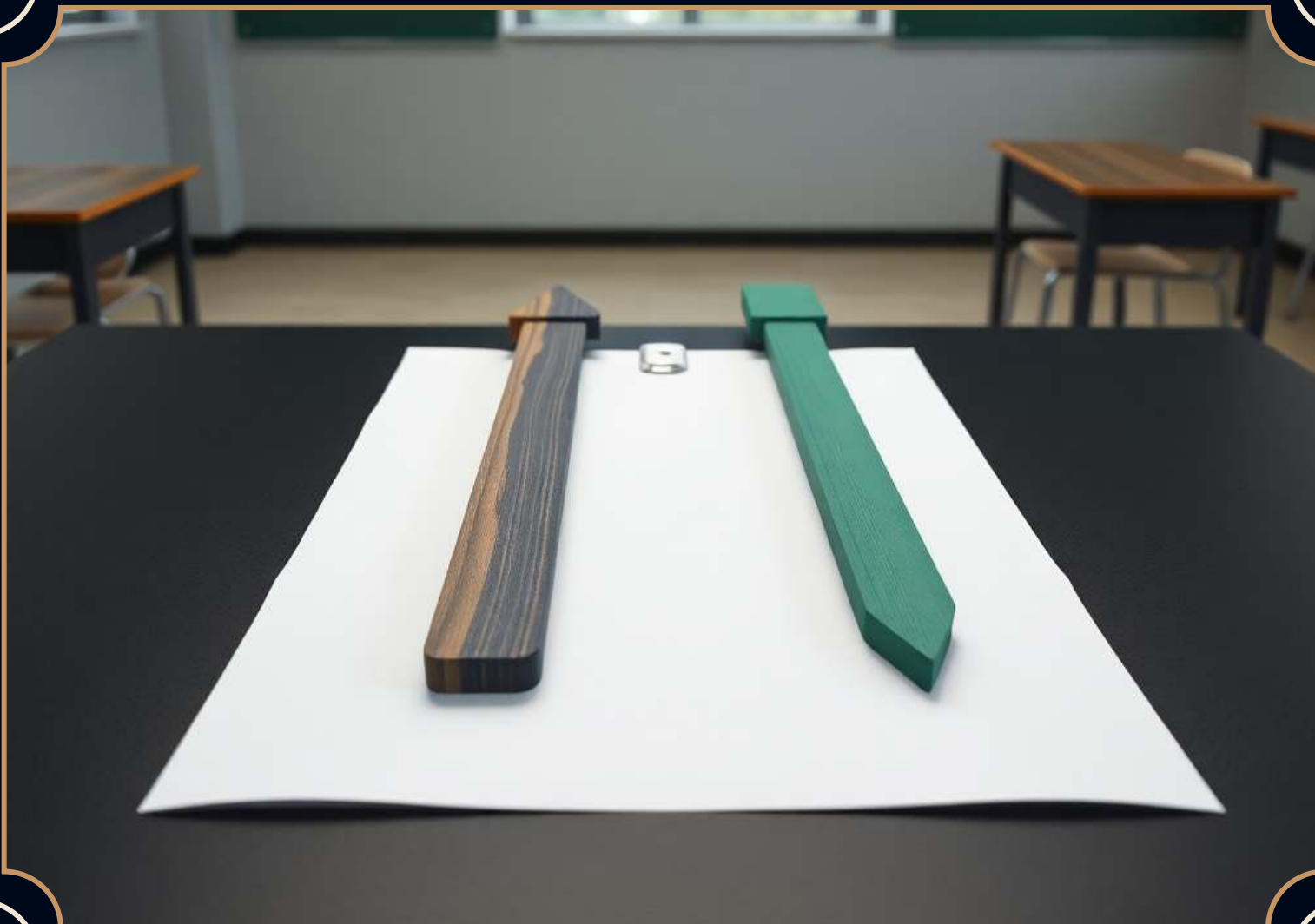
Свойства нужны не ради заучивания, а для преобразований. Они помогают находить неизвестные величины, проверять равенства и упрощать векторные выражения в алгебре и геометрии.

Алгоритм вычисления скалярного произведения

Последовательность действий по координатам и проверке результата



Признак перпендикулярности векторов



Нулевой результат

Если скалярное произведение равно нулю, векторы образуют прямой угол. Это самый надёжный способ проверить перпендикулярность, особенно когда рисунок не даёт точного ответа.

Связь с косинусом

Нулевое значение появляется потому, что $\cos 90^\circ = 0$. Значит, при прямом угле длины векторов остаются, но их направление не даёт вклада в результат.

Важная оговорка

Ноль не означает, что векторы обязательно нулевые. Чаще всего он говорит только о том, что направления взаимно перпендикулярны и угол между ними прямой.

Как найти угол между векторами

01

Вычислите
произведение

Сначала найдите скалярное произведение векторов по их координатам. Именно это число станет основой для дальнейших вычислений и покажет, как направлены векторы относительно друг друга.

02

Найдите длины

Затем вычислите длины каждого вектора. Они нужны в знаменателе формулы, поэтому важно аккуратно подставить координаты и не перепутать квадрат суммы с суммой квадратов.

03

Получите косинус

После этого разделите скалярное произведение на произведение длин: $\cos \alpha = (a \cdot b) / (|a| \cdot |b|)$. Так вы получите значение косинуса, по которому можно определить угол.

04

Определите угол

Если косинус положительный, угол острый; если равен нулю, угол прямой; если отрицательный, угол тупой. Затем найдите сам угол по таблице косинусов или калькулятору.

Пример вычисления по координатам

Вектор	Координаты	Действие	Результат
a	(2, 1)	$2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4)$	2
b	(3, -4)	Подстановка в формулу	—

Пример показывает, как координатная формула даёт точный числовой результат и позволяет сразу сделать вывод о взаимном расположении векторов.

Результат положительный, значит угол между векторами острый. Если модуль ответа мал, векторы расположены почти под прямым углом.

Составлено по школьному примеру для темы скалярного произведения.

Работа силы как пример применения

1. Формула работы

В физике скалярное произведение удобно описывает работу силы: $A = F \cdot s = |F| \cdot |s| \cdot \cos \alpha$. Оно связывает величину силы, перемещение и направление движения в одном выражении.

2. Когда работа больше

Если сила направлена туда же, куда движется тело, косинус равен 1. Тогда работа становится наибольшей, потому что вся сила помогает движению, а не мешает ему.

3. Когда работа равна нулю

Если сила перпендикулярна движению, косинус равен нулю, и работа исчезает. Этот случай хорошо показывает, что важна не только величина силы, но и её направление.

Знак скалярного произведения и тип угла



Знак результата помогает быстро понять взаимное расположение векторов даже без подробных вычислений угла.

Положительное значение связано с острым углом, нулевое — с прямым, отрицательное — с тупым. Это отражает знак косинуса.



Обобщение свойств скалярного произведения и косинуса угла между векторами.

Типичные ошибки при работе со скалярным произведением

Путают длины и координаты

Иногда вместо координат перемножают только длины векторов. Это неверно, потому что координатная формула требует учитывать каждую соответствующую пару чисел и их знаки.

Забывают минус

Отрицательная координата часто теряется при вычислениях. Даже один пропущенный минус меняет ответ, поэтому все числа нужно переписывать внимательно и проверять по шагам.

Выбирают не ту формулу

В пространстве нельзя пользоваться формулой для плоскости, если у вектора есть третья координата. Перед вычислением важно понять, в каком измерении записаны данные.

Смешивают разные записи

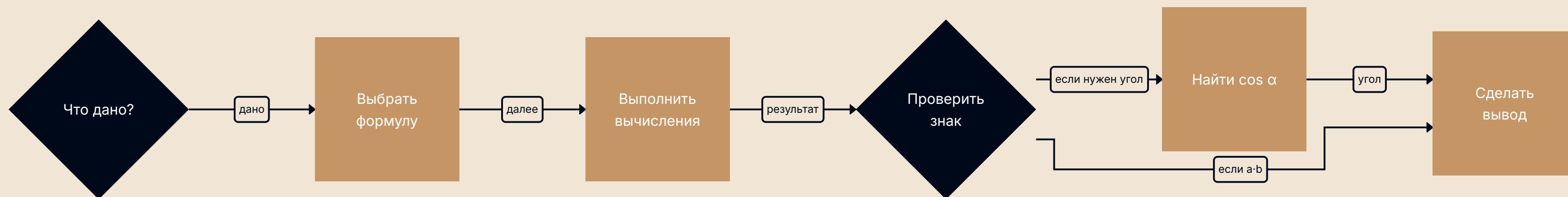
Некоторые считают, что $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ и $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ — одно и то же. На самом деле скалярное произведение зависит ещё и от угла между векторами.

Неверно толкуют ноль

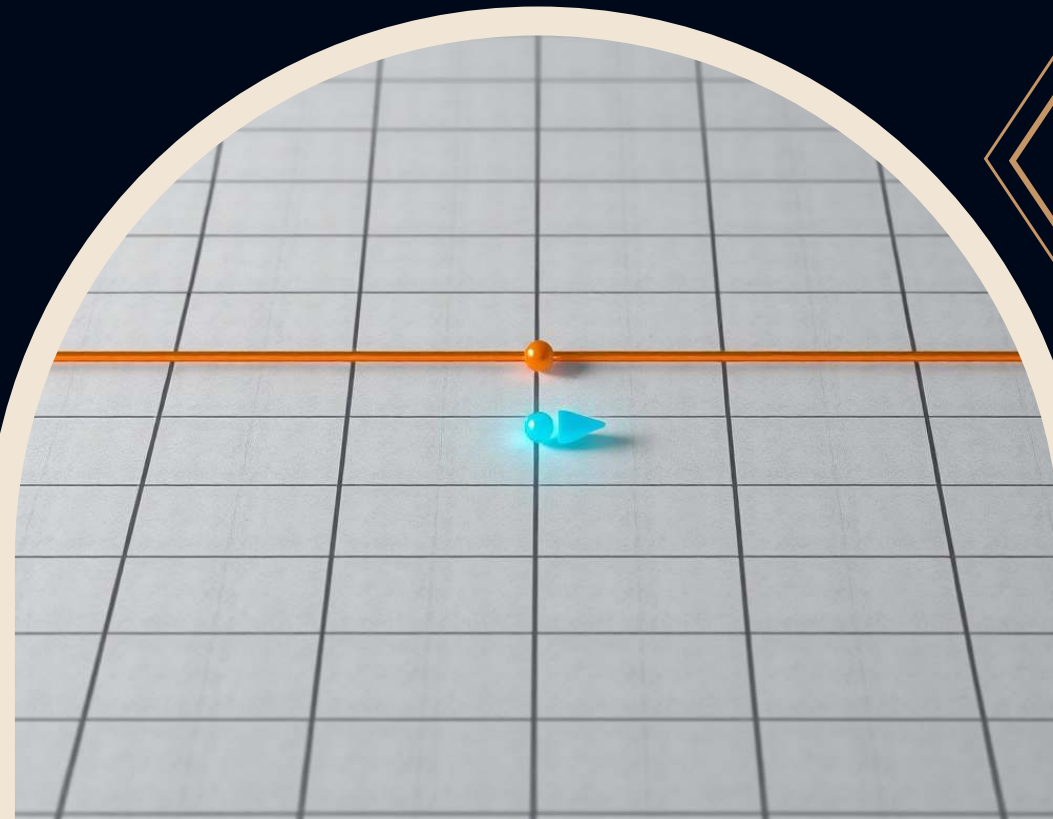
Если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, это не означает, что векторы нулевые. Чаще всего такой результат говорит о перпендикулярности, поэтому нужно смотреть на смысл ответа.

Как проверять решение задачи

Пошаговая схема для задач на скалярное произведение и угол между векторами

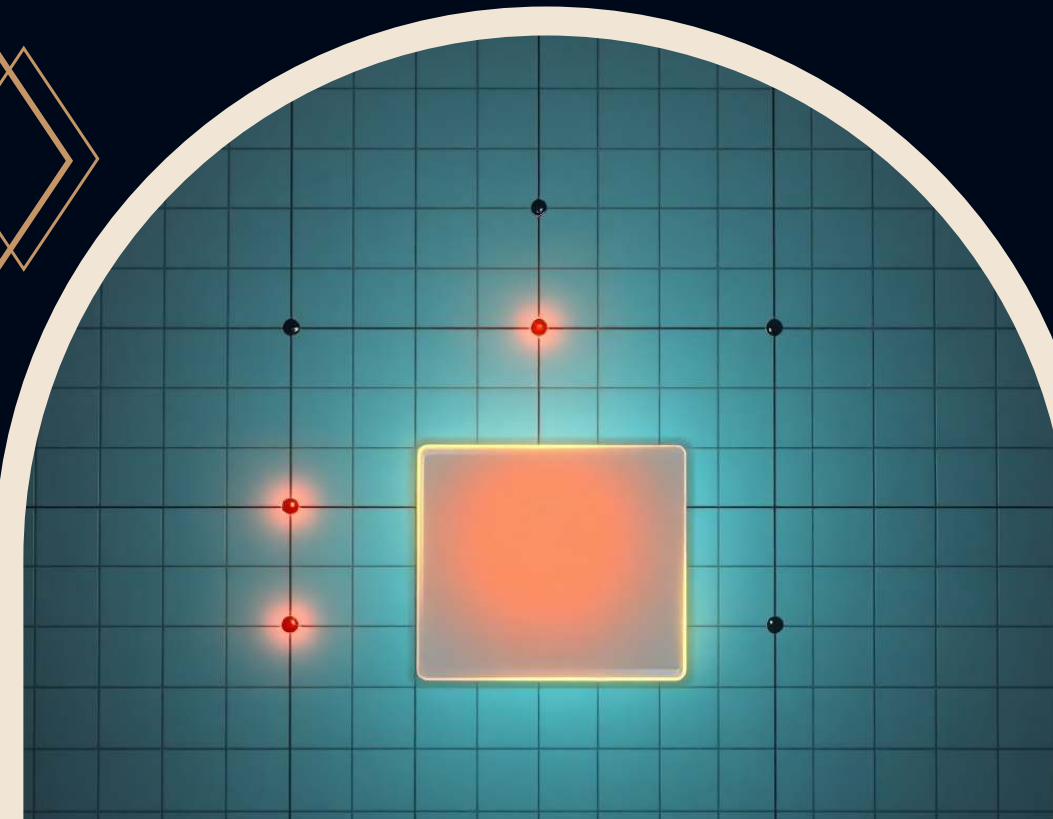


Скалярное произведение на координатной плоскости



Два вектора на одной сетке

На координатной плоскости удобно рисовать оба вектора с общим началом. Так сразу видно их направление, а рядом можно подписать координаты, чтобы связать чертёж с формулой $x_1x_2 + y_1y_2$.



Формула, которая оживает на рисунке

Когда векторы изображены на сетке, вычисления перестают быть абстрактными. Каждое число из координат становится частью наглядной картины, где алгебра помогает увидеть геометрический смысл без лишних догадок.

Где применяется скалярное произведение



Одна и та же идея помогает решать задачи из разных предметов: от чертежей на плоскости до описания движения и обработки данных.

Скалярное произведение особенно полезно там, где важны и величина, и направление. Поэтому оно встречается в геометрии, физике, информатике и робототехнике.



Учебное обобщение типичных областей применения скалярного произведения.

Формулы, которые нужно запомнить

01

Определение

Главная формула темы:
 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$. Она показывает, как длины векторов и угол между ними объединяются в одно скалярное значение.

02

Квадрат длины

Если умножить вектор на самого себя, получится квадрат его длины: $a \cdot a = |a|^2$. Это удобно при проверке вычислений и нахождении модулей.

03

Формула в плоскости

Для двумерных векторов используют запись $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$. Она позволяет быстро считать результат по координатам без измерения угла.

04

Формула в пространстве

В трёхмерном случае добавляется третья координата: $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Принцип остаётся тем же.

05

Прямой угол

Если векторы перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю: $a \cdot b = 0$. Это главный признак прямого угла, который часто используют в задачах.



Скалярное произведение — мост между числом и направлением

Скалярное произведение помогает увидеть в формулах геометрию: длины, направление и угол. Оно делает вычисления точными, а выводы о векторах — быстрыми и понятными.

