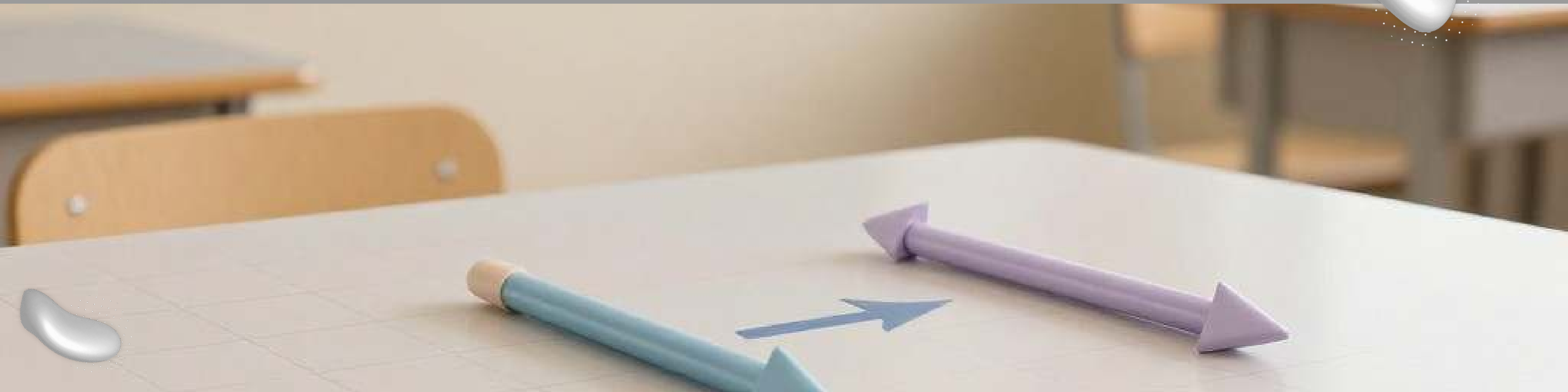


Свойства операции сложения векторов на плоскости

Сложение векторов помогает находить итоговое смещение по нескольким шагам и проверять вычисления.



Где встречается сложение векторов

Оно работает в геометрии, физике и даже навигации: складывая направления, получают общий результат. На координатной плоскости векторы рисуют стрелками, а их сумма показывает итог нескольких действий. В 9 классе это связано с работой в координатах.



Что такое вектор на плоскости

1



Вектор задаётся началом и концом, а также длиной и направлением. Он показывает, куда и насколько нужно переместиться по плоскости.

2



Равные векторы имеют одинаковую длину и одно направление, даже если они расположены в разных местах. Поэтому их можно переносить, не меняя смысл.

3



Координаты вектора записывают парой чисел $(x; y)$, где x и y — его проекции на оси Ox и Oy . Нулевой вектор имеет длину 0 и направления не имеет.



Правило треугольника

- При сложении двух векторов второй откладывают от конца первого. Тогда сумма изображается вектором, проведённым от начала первого к концу второго.
- Такой рисунок наглядно показывает последовательное перемещение по двум направлениям. Обычно на схеме видны два исходных вектора и один результирующий, образующие треугольник.

Два способа сложения двух векторов

Схема отражает пошаговое построение суммы на плоскости

5



Основные свойства сложения векторов

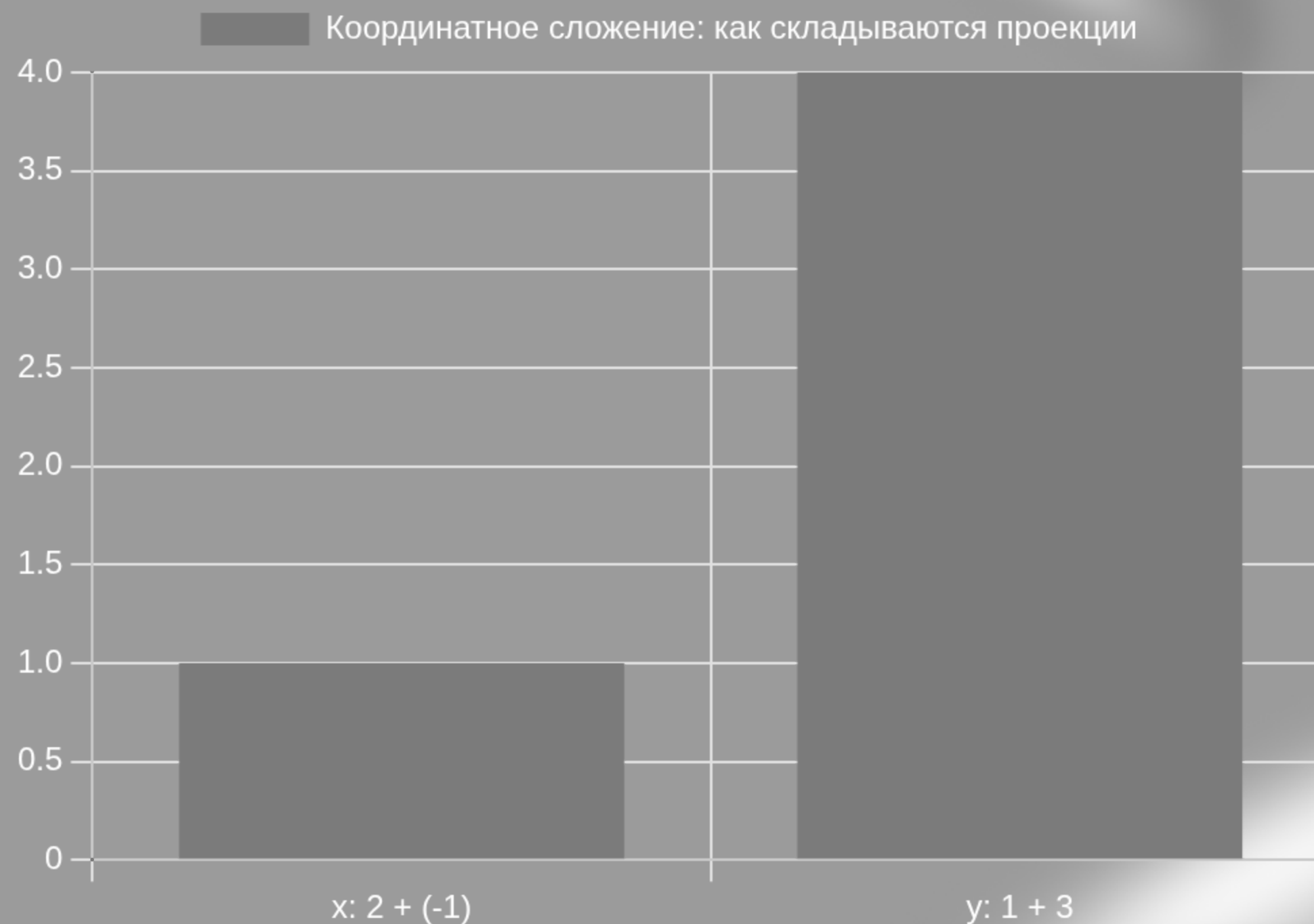
Свойство	Запись	Смысл
Переместительное	$a+b=b+a$	Порядок слагаемых не важен
Сочетательное	$(a+b)+c=a+(b+c)$	Можно менять группировку
Нулевой вектор	$a+0=a$	Сумма не меняется
Противоположный	$a+(-a)=0$	Векторы взаимно компенсируются

- Свойства помогают вычислять суммы и использовать проверки, как при сложении чисел.
- Эти правила позволяют аккуратно преобразовывать выражения и быстрее находить результат, не запутываясь в построениях.

Сложение по координатам

7

- Каждая координата складывается отдельно: x -координаты дают новую x , y -координаты — новую y . Это особенно удобно для задач на координаты.
- Покоординатный подход упрощает вычисления: достаточно аккуратно сложить соответствующие проекции, не строя сложные чертежи.



Пример вычислений по координатам $(2;1)$ и $(-1;3)$


$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

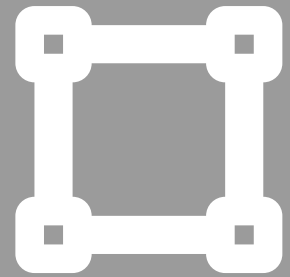
**Порядок записи двух векторов не
влияет на итоговую сумму.**

Геометрически конечная точка получается той же, если
выполнить одно перемещение, а затем другое — или
поменять их местами. Это помогает упростить выражения и
проверять ответы.

Свойства операции сложения векторов, школьный курс

Сочетательное свойство

9



Любая группировка

Для векторов a , b и c верно $(a+b)+c=a+(b+c)$. Это значит, что сумму трёх векторов можно считать, как удобно по скобкам, без изменения результата.



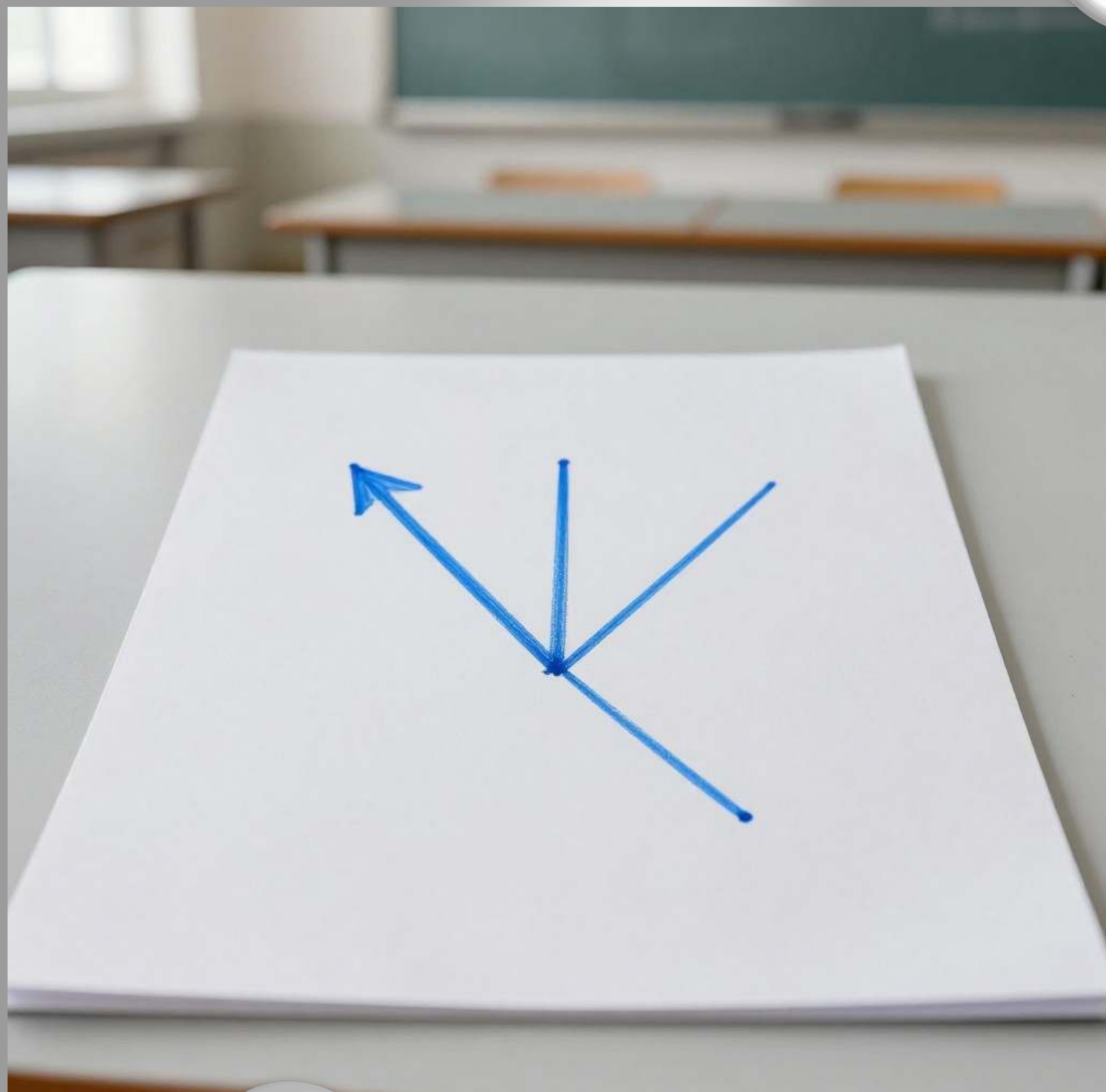
Сложение последовательных шагов

Когда движения идут одно за другим, сочетательное свойство позволяет объединять участки в любом порядке. Итоговое смещение остаётся одинаковым, хотя промежуточные построения отличаются.



Удобно для вычислений

Свойство помогает аккуратно переносить скобки в выражениях и уменьшать ошибки. Если результат одинаков после разной группировки, вычисления, скорее всего, верны.



Нулевой вектор

- 1 Нулевой вектор обозначает отсутствие перемещения: его длина равна 0, поэтому направления у него нет. На чертеже его часто изображают как точку или очень короткую стрелку.
- 2 При сложении с любым вектором нулевой не меняет результат: $a+0=a$. Это удобно для проверок: добавление нулевого члена в вычисления оставляет сумму прежней.



Противоположные векторы

- Противоположные векторы имеют одинаковую длину, но направлены в противоположные стороны. Для любого вектора a можно построить вектор $-a$, который в точности «отменяет» движение.
- Если сложить a и $-a$, получится нулевой вектор. Геометрически это означает: сначала идём в одном направлении, а затем возвращаемся обратно по тому же пути.

Почему порядок сложения не меняет результат

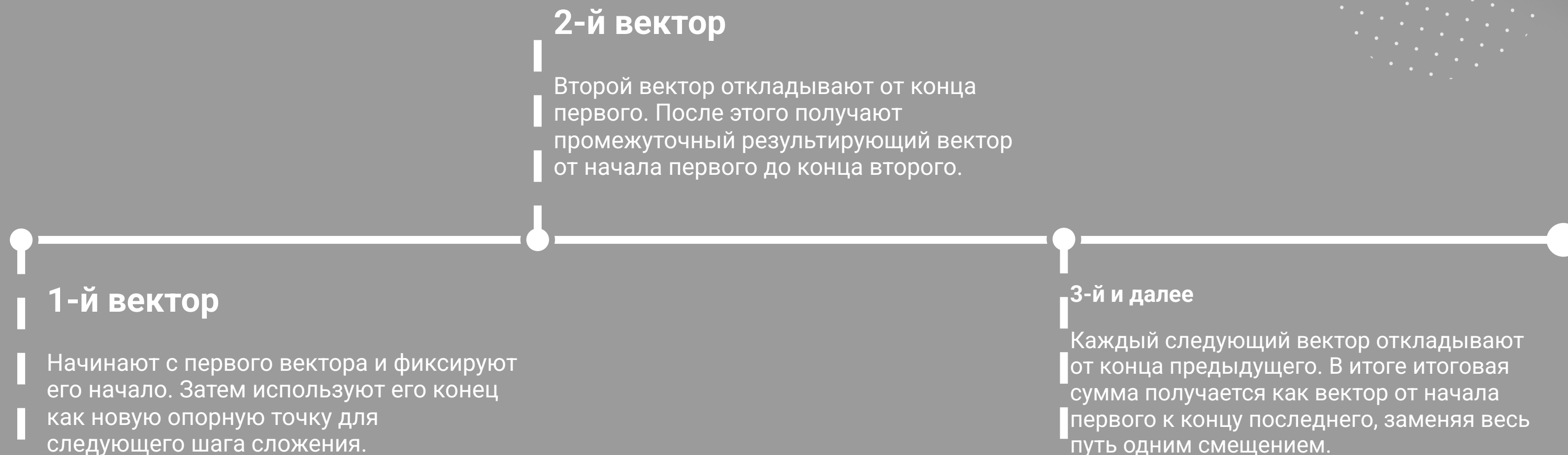
- На координатной плоскости перестановка слагаемых даёт один и тот же итоговый вектор: меняется только запись, а конечная точка остаётся прежней.
- Если отметить начало и конец суммы для пары векторов, получатся совпадающие точки. Это подтверждает переместительное свойство на конкретных координатах.



Расчёт по данным примера: $a=(3;2)$, $b=(1;-4)$ (без сторонних источников).

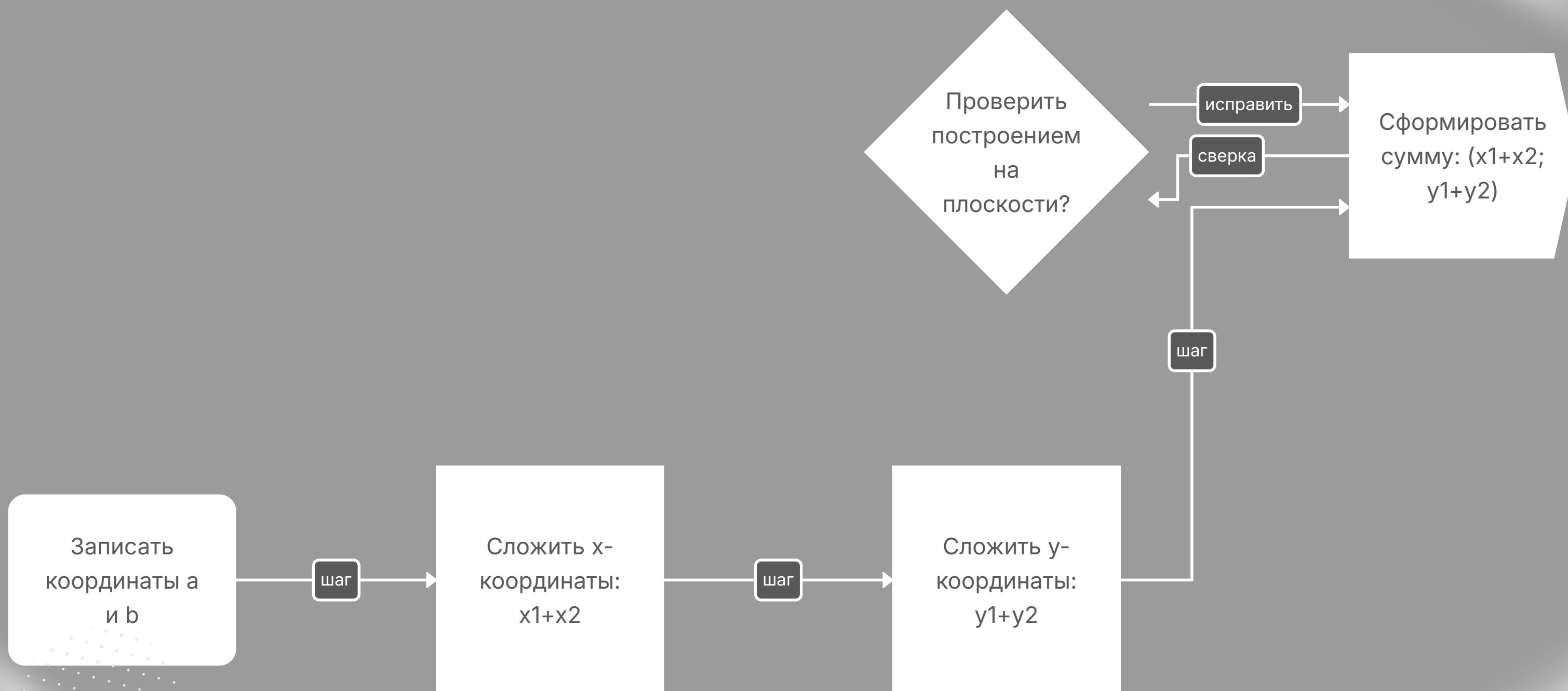
Сложение нескольких векторов

13



Алгоритм сложения векторов по координатам

Для векторов $a=(x_1;y_1)$ и $b=(x_2;y_2)$ сумма равна $(x_1+x_2; y_1+y_2)$ — вычисления затем сверяют построением.



Геометрический смысл суммы

15

Итоговое перемещение

Сумма векторов показывает итоговое перемещение из начальной точки в конечную. Если пройти один путь, а затем продолжить другим, итоговая «прямая линия» соединяет старт и финиш.

Путь и результирующий вектор

На рисунке это удобно видеть через ломаную и один результирующий вектор. В школьных задачах такая схема похожа на движение по двум «улицам» с поворотом.



Примеры сложения векторов

16

- Во всех трёх примерах координаты складываются по отдельности: сначала x , затем y . Поэтому разные пары векторов приводят к новым точкам векторной суммы.
- Сравнение результатов показывает один принцип: итоговый вектор определяется двумя независимыми суммами проекций. Значит, путь выбора порядка сложения координат не влияет.



Расчёт по заданным примерам: $(2;5) + (-1;3) = (1;8)$, $(4;-2) + (0;6) = (4;4)$, $(-3;1) + (5;-1) = (2;0)$.

Частые ошибки при сложении векторов

- Три распространённых ошибки связаны с направлением, знаком и тем, что у вектора важны обе координаты. Ниже — как их избежать при решении задач.
- Если опираться на координатный смысл сложения (x с x , y с y) и не забывать про знак, ошибки резко сокращаются.

Ошибка	Почему неверно	Как правильно
Складывать только длины	У вектора важны направление и ориентация	Складывать координаты и учитывать направление
Путать сумму и вычитание	Получается другой результирующий вектор	Вычитание заменять сложением с противоположным
Игнорировать нулевой вектор	Теряется контроль вычислений	Помнить: $a+0=a$ и проверять результат

Где применяется сложение векторов



Физика и движение

Сложение векторов используют, чтобы находить суммарное перемещение и разбирать последовательные участки движения: два отрезка пути заменяют одним результирующим вектором.



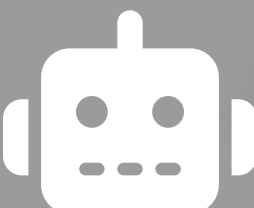
Силы и скорости

В физике векторы позволяют складывать силы и скорости, получая общий эффект. При этом свойства сложения помогают аккуратно преобразовывать выражения и проверять ответы.



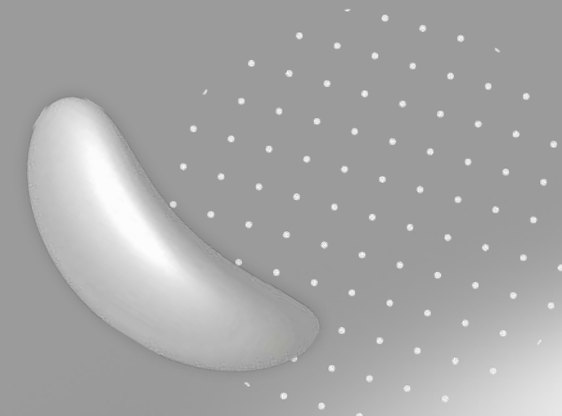
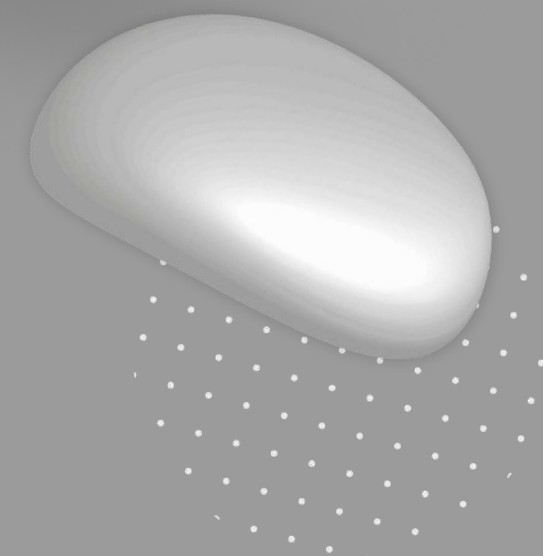
География и навигация

На картах путь можно описывать цепочкой направлений. Итоговая траектория находится как сумма векторов, что упрощает расчёты маршрута.



Робототехника и компьютерная графика

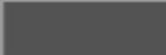
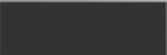
Движение объектов и построение траекторий на экране основываются на векторных операциях. Сумма задаёт, куда окажется объект после серии действий.



Сравнение свойств на одном примере

19

- Рассматривая один набор векторов, можно одновременно убедиться в основных свойствах: переместительном, сочетательном, наличии нулевого и противоположного.
- Когда все четыре условия выполняются на одних и тех же координатах, это подтверждает корректность вычислений и понимание геометрического смысла суммы.

 $a+b=b+a$  $(a+b)+c=a+(b+c)$  $a+0=a$  $a+(-a)=0$



Пример из задания: $a=(2;1)$, $b=(-1;3)$, $c=(0;-2)$. Пары равенств проверены по координатам.

Сложение векторов — понятные правила и ясный смысл

Сложение векторов на плоскости опирается на чёткие свойства: переместительное и сочетательное позволяют менять порядок, а нулевой и противоположный векторы помогают проверять вычисления. Поэтому векторы — удобный инструмент для задач на движение и геометрию.