

Тетраэдр, куб и октаэдр: основные правильные многогранники

Три правильных многогранника объединяют симметрию, формулу Эйлера и практические модели объёма.



Место этих фигур в курсе геометрии 11 класса



В 11 классе тетраэдр, куб и октаэдр — ключевые примеры высокой симметрии. Через них сравнивают форму и элементы многогранников, осваивают развёртки, формулу Эйлера и идею дуальности.

Тетраэдр: простейший правильный многогранник

Правильный тетраэдр составлен из 4 равносторонних треугольников: всего 6 рёбер и 4 вершины. В каждой вершине сходятся по 3 грани, что задаёт «жёсткую» симметрию.

Связь между числом вершин, рёбер и граней проверяется формулой Эйлера. Для тетраэдра получаем: $4 - 6 + 4 = 2$ — это базовый ориентир при подсчётах.

При ребре длины a его площадь поверхности равна $S = \sqrt{3} \cdot a^2$, а объём — $V = a^3 / (6\sqrt{2})$. Эти выражения помогают решать задачи на площади и объёмы без лишних построений.

Куб (гексаэдр): самая знакомая правильная фигура

Размеры и элементы куба

Куб имеет 6 квадратных граней, 12 рёбер и 8 вершин, а в каждой вершине сходятся 3 грани. При ребре a площадь поверхности равна $S = 6a^2$.

Зачем куб в школьной геометрии

Объём куба равен $V = a^3$. Куб становится «эталоном» для задач на пространственные тела: по нему удобно сравнивать развёртки, диагонали и проявления симметрии.



Октаэдр: фигура из восьми равносторонних треугольников

Правильный октаэдр состоит из 8 равносторонних треугольников: 12 рёбер и 6 вершин. В каждой вершине сходятся 4 грани, поэтому форма выглядит более «плотной», чем у тетраэдра.

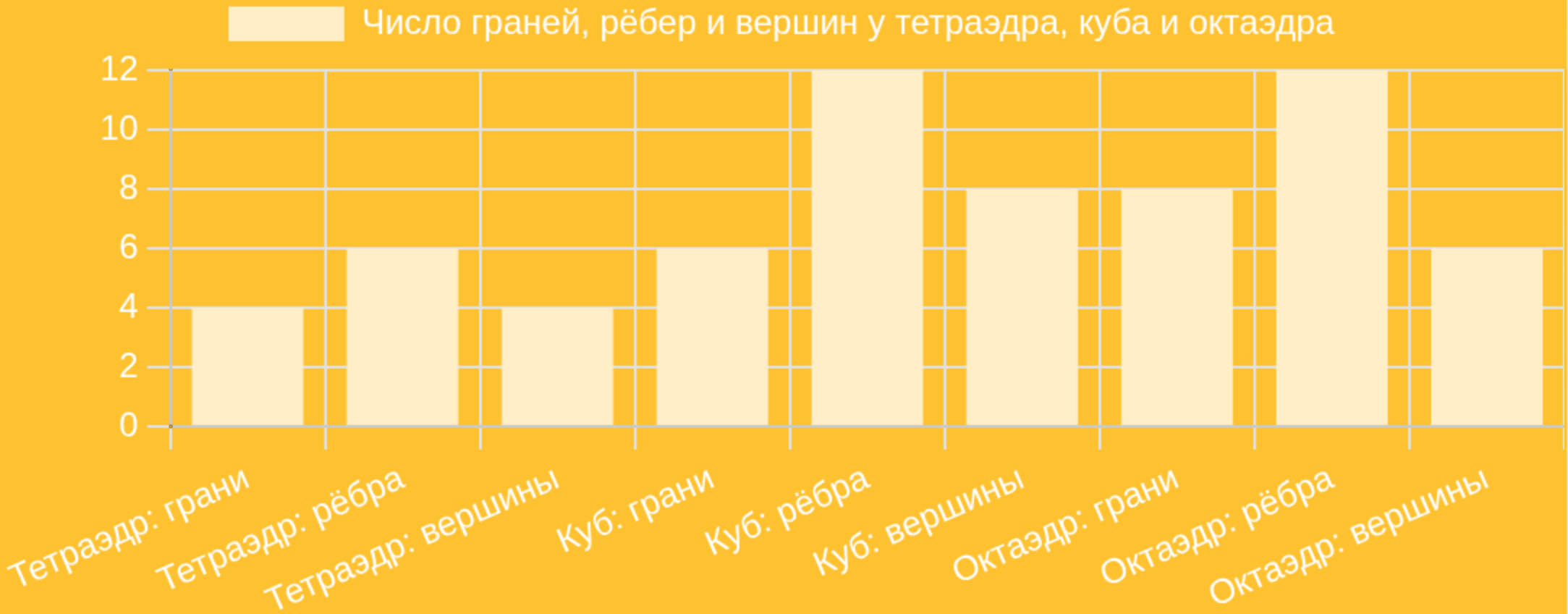
Для октаэдра выполняется формула Эйлера в виде $6 - 12 + 8 = 2$. Такая проверка помогает убедиться, что при подсчёте элементов фигуры не допущены ошибки.

Если длина ребра равна a , то площадь поверхности октаэдра $S = 2\sqrt{3} \cdot a^2$, а объём $V = \sqrt{2} \cdot a^3 / 3$. Эти формулы дают быстрый переход от размеров к характеристикам тела.

Сравнение трёх многогранников по числу элементов

Во всех трёх фигурах одна и та же геометрическая идея даёт разную «комбинаторику» элементов: рёбра растут сильнее всего у куба и октаэдра.

Одинаковое число рёбер у куба и октаэдра подчёркивает их близость по структуре, хотя количество граней и вершин различается.



Школьная геометрия: свойства правильных многогранников, формула Эйлера (на основе перечисления элементов).

Основные характеристики тетраэдра, куба и октаэдра

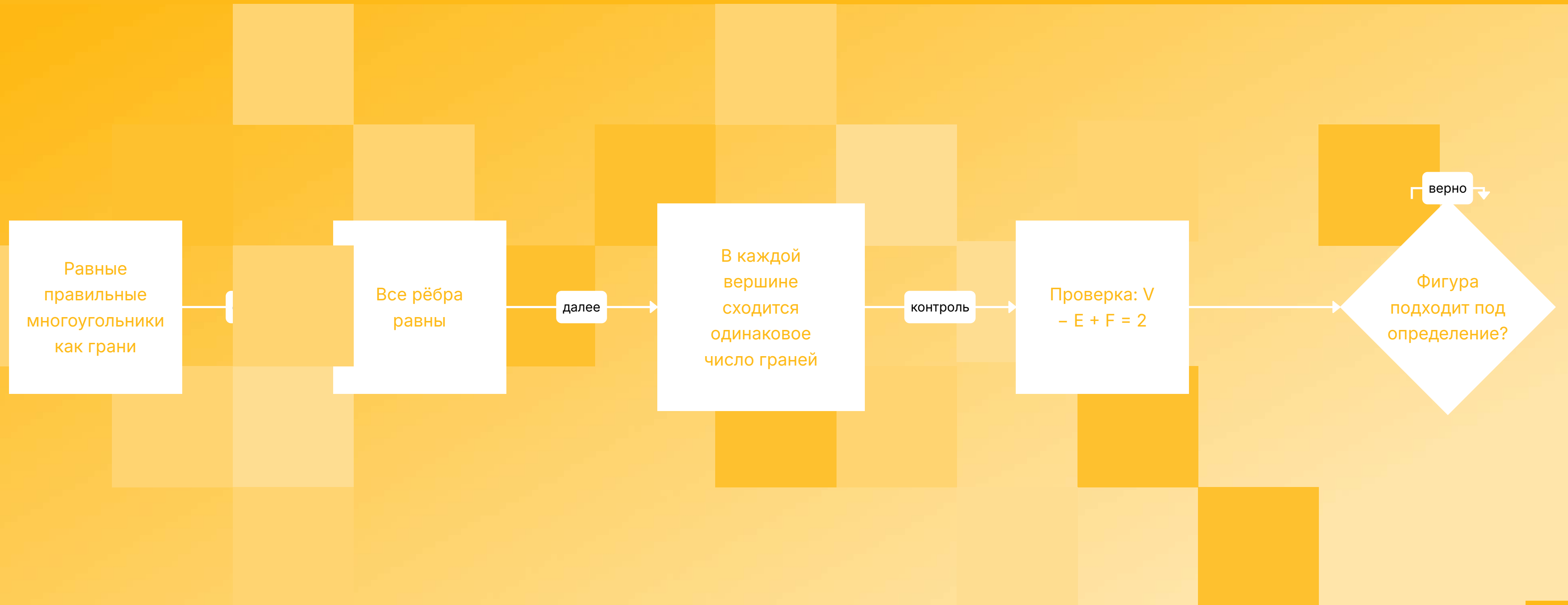
Многогранник	Число граней	Тип грани	Число рёбер	Число вершин	Грани в вершине
Тетраэдр	4	Равносторонний треугольник	6	4	3
Куб	6	Квадрат	12	8	3
Октаэдр	8	Равносторонний треугольник	12	6	4

Сопоставление параметров удобно начинать с числа граней и типа граней, а затем переходить к рёбрам и вершинам.

Различия проявляются в «локальной» вершине: у октаэдра в вершине сходятся 4 грани, поэтому он отличается от куба и тетраэдра по угловой структуре.

Признаки правильного многогранника

Логика проверки: сначала «одинаковость» граней и рёбер, затем контроль элементов через формулу Эйлера.



2

**Она связывает три
ключевых числа и помогает
проверять подсчёт
элементов.**

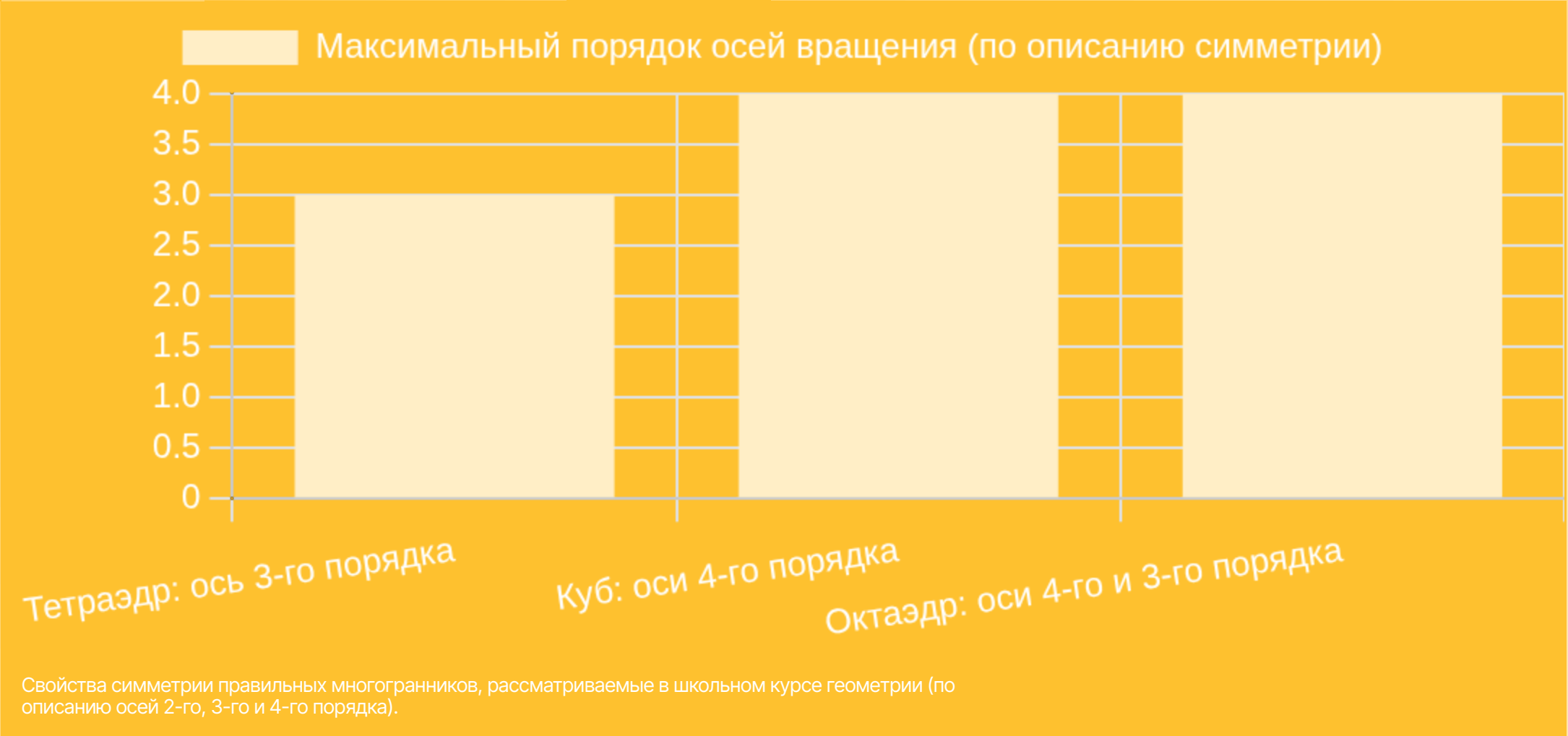
Для любого выпуклого многогранника выполняется соотношение $V - E + F = 2$, где V — число вершин, E — число рёбер, F — число граней.

Классический результат школьной стереометрии: формула Эйлера для выпуклых многогранников (используется при подсчёте вершин, рёбер и граней).

Симметрия трёх многогранников

Куб и октаэдр обладают более «богатой» симметрией: их оси вращения достигают более высоких порядков, чем у тетраэдра.

Сравнение по порядкам осей показывает, почему куб и октаэдр легче «узнавать» по вращательным преобразованиям, а тетраэдр — проще и скромнее по симметрии.



Дуальность куба и октаэдра

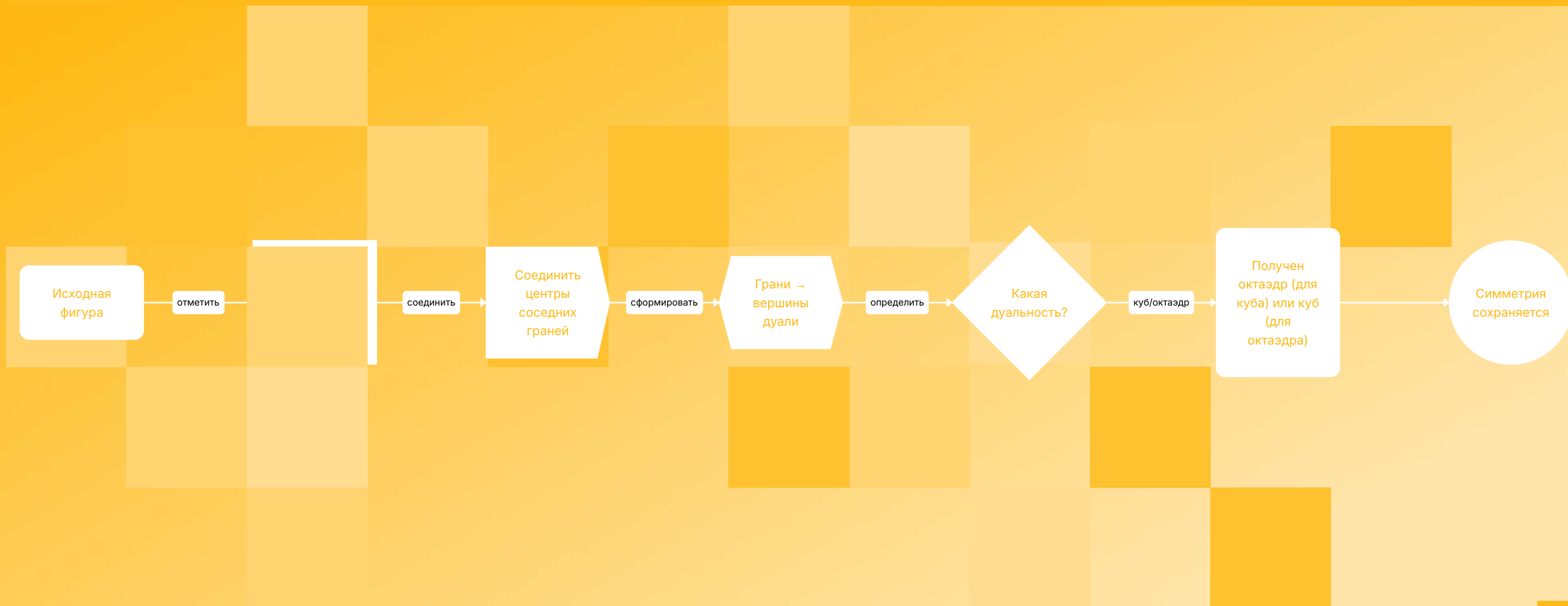
Куб и октаэдр образуют дуальную пару: в этой связи центры граней одного многогранника становятся вершинами другого. Поэтому «геометрический смысл» меняется местами: то, что было вершиной, становится гранью, и наоборот.

У куба 6 граней и 8 вершин, а у октаэдра — 8 граней и 6 вершин. Дуальность сохраняет симметрию фигуры, но перестраивает роли элементов, что удобно для проверки подсчётов и для понимания структуры правильных тел.



Построение дуальной фигуры по центрам граней

Схема опирается на идею: вершины дуали соответствуют граням исходного многогранника, поэтому строим рёбра дуали по соседству граней.



Формулы площади поверхности и объёма

Для куба со стороной ребра a площадь поверхности равна $S = 6a^2$, а объём — $V = a^3$. Эти выражения особенно удобны при сравнении с другими правильными телами, когда задают одинаковое a .

У правильного тетраэдра со стороной ребра a площадь поверхности находится как $S = \sqrt{3}a^2$, а объём — $V = a^3/(6\sqrt{2})$. Формулы хорошо показывают, как «уменьшение» числа граней влияет на объём.

Для правильного октаэдра при ребре a площадь поверхности составляет $S = 2\sqrt{3}a^2$, а объём — $V = \sqrt{2}a^3/3$. Поскольку граней восемь, поверхность растёт заметнее, но и объём распределён иначе.

Используя эти формулы вместе, можно сравнивать тела при одинаковой длине ребра, решать задачи на вычисление площади и объёма и проверять, что геометрическая идея симметрии согласуется с расчётами.

Сравнение объёмов при одинаковом ребре

При одинаковой длине ребра линейные размеры у тел равны, но объём зависит от того, сколько «пространства» заключают грани разного типа и как сходятся рёбра в вершинах.

Диаграмма подтверждает порядок: куб даёт максимальный объём, тетраэдр — минимальный, а октаэдр занимает промежуточное положение. Это отражает разную плотность упаковки пространства правильными треугольниками и квадратами.



Развёртки трёх многогранников



Куб: 6 квадратов

Развёртка куба образуется из шести равных квадратов, которые соединяются по сторонам так, чтобы при сборке все пары соседних квадратов образовали рёбра. В учебных моделях это помогает аккуратно считать площадь поверхности.



Тетраэдр: 4 равносторонних треугольника

Развёртка тетраэдра состоит из четырёх равносторонних треугольников. При склеивании три треугольника сходятся в каждой вершине, а центральная «геометрическая сборка» напоминает простую симметричную пирамиду.



Октаэдр: 8 равносторонних треугольников

Развёртка октаэдра включает восемь равносторонних треугольников. Соседство граней задаёт рёбра, поэтому при сборке важно строго совместить стороны: тогда модель получится правильной, а поверхность — равномерной.

Углы и вершины правильных многогранников

Многогранник	Угол грани	Граней в вершине	Особенности вершины
Тетраэдр	60°	3	Самая острая
Куб	90°	3	Три квадрата
Октаэдр	60°	4	Более «плотная»

Школьная геометрия: свойства правильных многогранников и многогранных углов.

Таблица сопоставляет величину угла грани, число граней, сходящихся в вершине, и то, как именно формируется «пространственный» угол. По сочетанию этих параметров различаются тетраэдр, куб и октаэдр.

Больше граней в вершине — «плотнее» пространственный угол: у октаэдра он формируется четырьмя треугольниками, тогда как у тетраэдра и куба — тремя. Поэтому формы заметно различаются даже при равных по симметрии телах.

Где встречаются тетраэдр, куб и октаэдр

Метан как тетраэдр

В молекуле метана CH_4 атом углерода находится в центре, а четыре атома водорода «расходятся» к вершинам правильного тетраэдра. Такое распределение помогает объяснять устойчивость структуры и наглядно связывает школьную геометрию с химией.



Поваренная соль и кубическая решётка

Кристаллы поваренной соли NaCl имеют упорядоченную структуру, которую часто моделируют с использованием кубической решётки. На практике это проявляется в регулярности формы кристаллов и позволяет строить понятные модели для сравнения расстояний и направлений в материале.



Октаэдр в минералах и координационных моделях

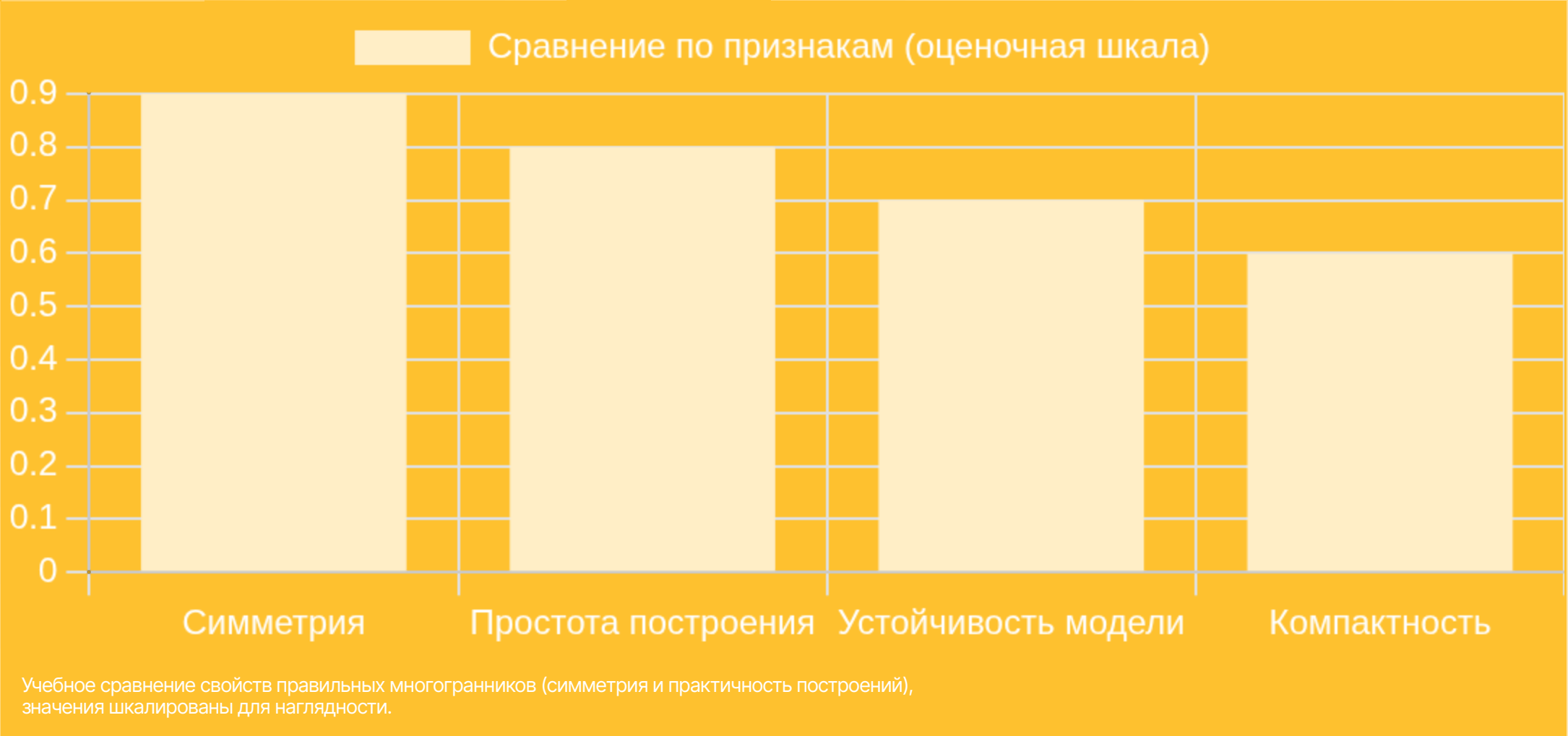
Во многих минералах и в задачах координационной химии встречаются схемы, где положения частиц удобно представлять вершинами октаэдра. Поэтому октаэдр часто используют в учебных рисунках и макетах: он хорошо передаёт «восемь точек» вокруг центра.



Сравнение свойств: симметрия, устойчивость, компактность

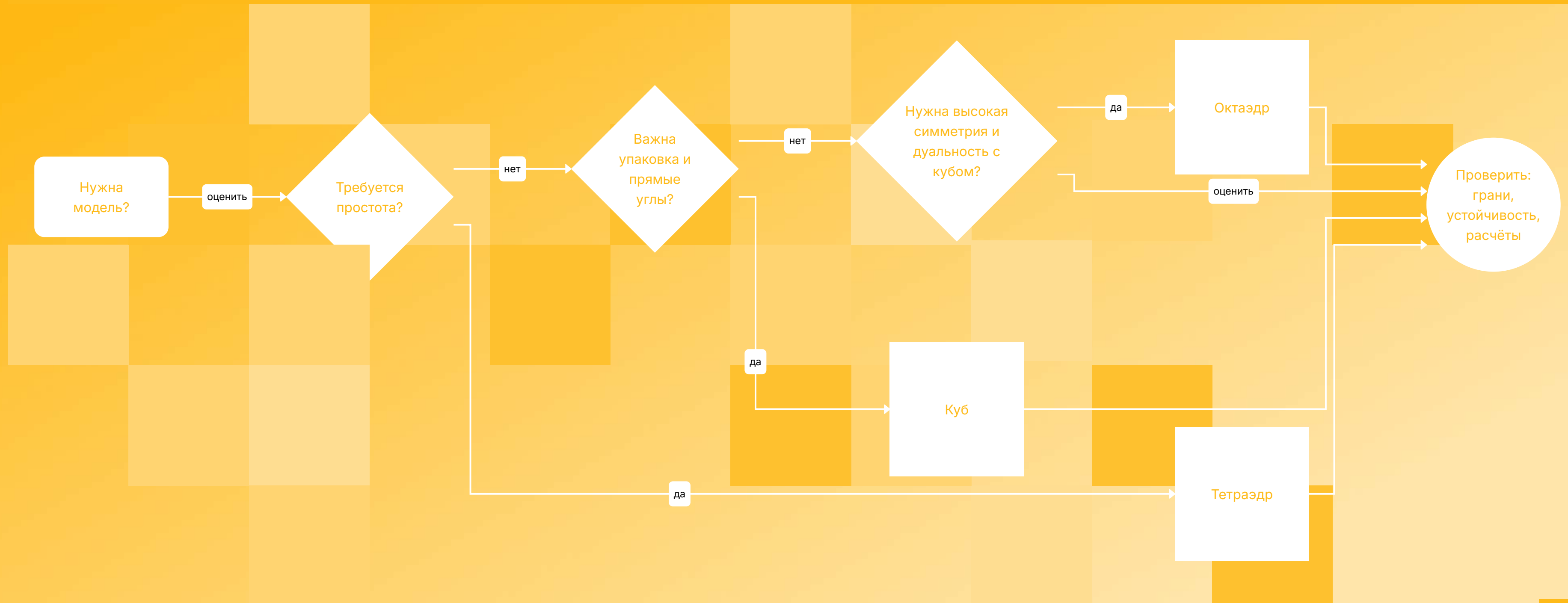
При равных по «классности» правильных формах набор выигрышных свойств различается: разные многогранники лучше подходят для задач разных типов — от моделирования до анализа симметрии.

Оценки согласуются с идеей из курса: октаэдр чаще выигрывает по симметрии, куб — по удобству описания и устойчивости модели, а тетраэдр — по минимальному числу граней и простоте конструкции.



Выбор многогранника под задачу

Схема помогает связать цель решения (простота, решётка, симметрия и дуальность) с наиболее подходящим правильным телом.



Итоги: три правильных многогранника и одна общая геометрическая идея

Тетраэдр, куб и октаэдр связывают между собой числа граней, рёбер и вершин, типы граней и симметрию. Для всех выполняется формула Эйлера, а куб и октаэдр дуальны; это даёт опору теории и практике.