

Функция $y = k/x$ и её график

Обратная пропорциональность: формула, точки и гипербола.



Обратная пропорциональность вокруг нас



Когда одна величина растёт, а другая уменьшается, мы часто видим обратную пропорциональность: в работе, покупках и движении.

Определение функции $y = k/x$

01

Формула зависимости

Функция задаётся выражением $y = k/x$, где k — любое число, кроме нуля. Оно определяет, насколько быстро меняется значение y при изменении x .

02

Ограничение для x

Независимая переменная x может принимать любые действительные значения, кроме нуля. Деление на 0 невозможно, поэтому $x = 0$ исключается из рассмотрения.

03

Как меняются значения

Если x становится больше, то y уменьшается; если x уменьшается, то y возрастает по модулю. Значения связаны так, что их произведение остаётся постоянным.

04

Почему $k \neq 0$

При $k = 0$ получается $y = 0$ для всех допустимых x , и это уже не обратная пропорциональность. Здесь важен именно ненулевой коэффициент k .

Значения функции при разных x

Сравнение значений для двух коэффициентов показывает, как знак k влияет на расположение точек.

При смене знака k точки переходят в другие четверти, хотя правило $y = k/x$ остаётся тем же.

x	k = 2	k = -2
-4	-0,5	0,5
-1	-2	2
1	2	-2
4	0,5	-0,5

Как выглядит график функции

Две ветви



График функции $y = k/x$ состоит из двух отдельных ветвей. Они не соединяются, а располагаются в противоположных частях координатной плоскости.

Зависимость от знака k



Если k положительно, ветви находятся в первой и третьей четвертях. Если k отрицательно, они переходят во вторую и четвёртую четверти.

Поведение около осей

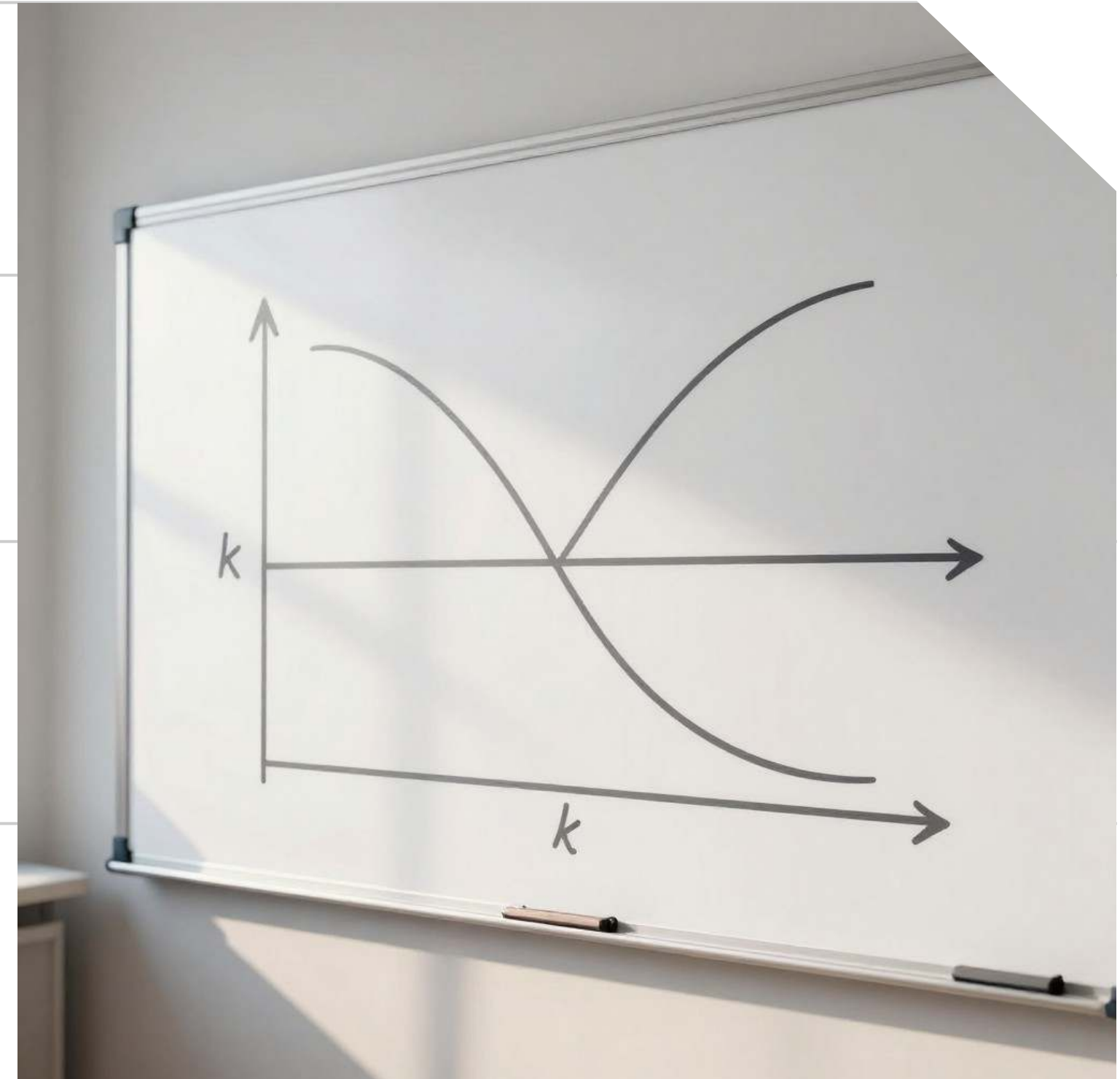


При x , близком к нулю, значение y по модулю резко увеличивается. Чем больше $|x|$, тем ближе график подходит к осям координат.

Точки на графике



Чтобы построить график, сначала отмечают несколько точек по таблице значений. Затем через них проводят плавные ветви, не соединяя их прямой линией.

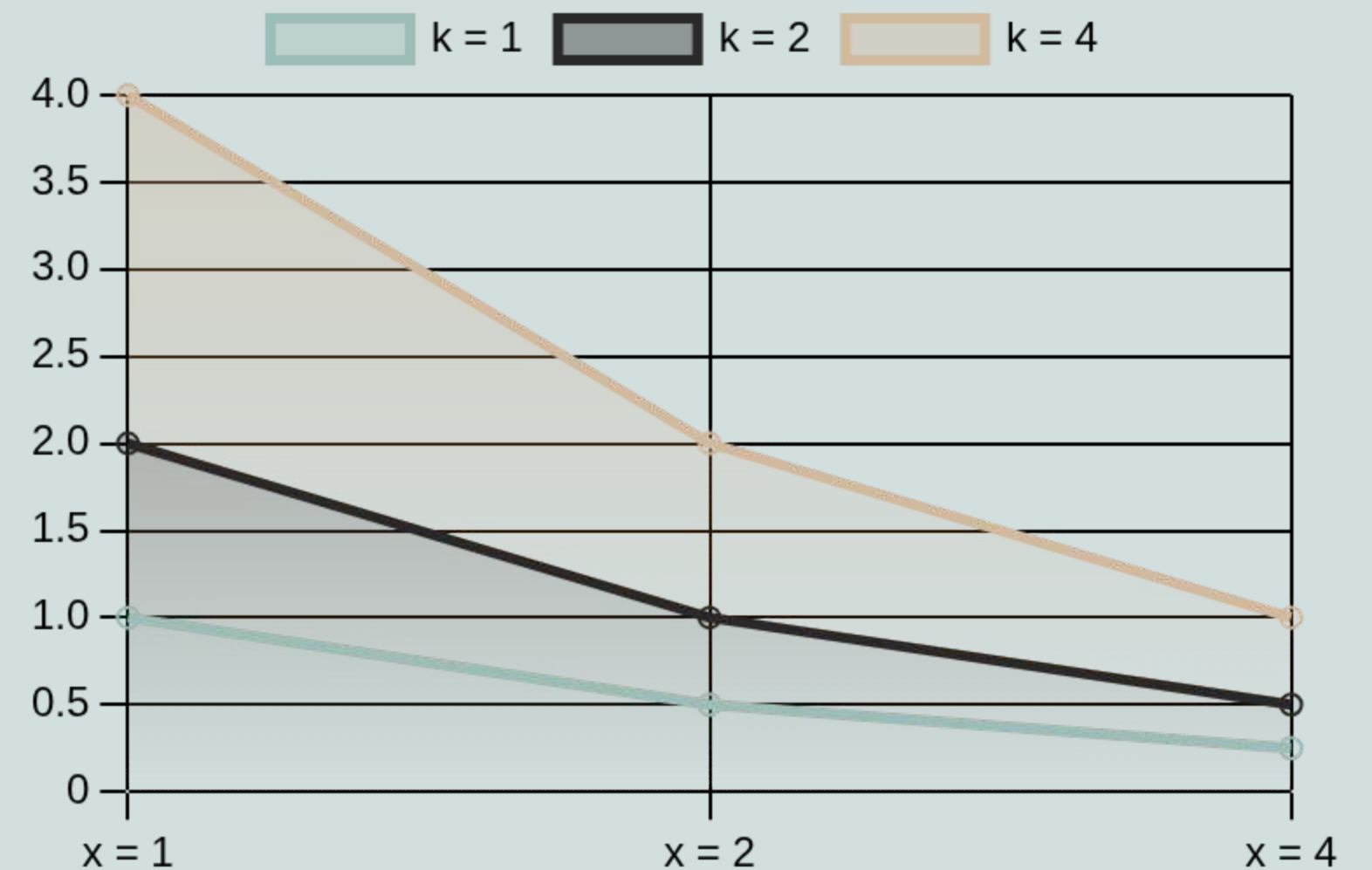


Как меняется y при изменении k

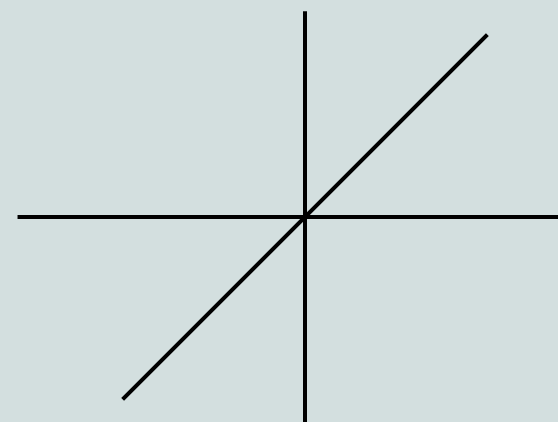
На одном и том же наборе x видно, как коэффициент k масштабирует значения функции и меняет высоту точек.

Чем больше $|k|$, тем больше значения y при одинаковом x и тем дальше ветви от осей.

Вычисления по формуле $y = k/x$ для $k = 1, 2, 4$.



Ноль исключён по разным причинам: при $x = 0$ нельзя делить, а $y = 0$ не получается при $k \neq 0$.

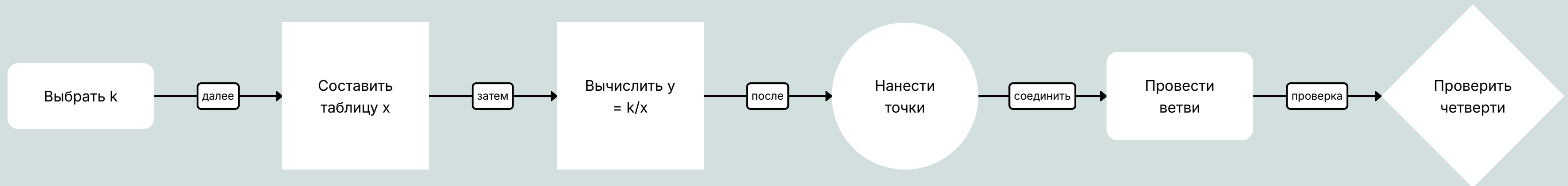


0

не входит ни в область определения, ни в область значений функции $y = k/x$.

Построение графика по точкам

Последовательность действий при построении гиперболы по формуле $y = k/x$.



Симметрия графика



Центральная симметрия

График функции $y = k/x$ симметричен относительно начала координат. Если точка принадлежит графику, то точка с противоположными координатами тоже принадлежит ему.



Парные точки в таблице

Это свойство удобно замечать в таблице значений: например, при $k = 2$ точки $(2; 1)$ и $(-2; -1)$ образуют симметричную пару и лежат на одном графике.

Гипербола на координатной плоскости



Оси и ветви

На рисунке видны координатные оси и две ветви гиперболы. Точки, найденные по таблице, помогают понять, как строится график на плоскости.

Линии приближения

Оси $x = 0$ и $y = 0$ график не пересекает. Он только приближается к ним всё сильнее, когда x становится очень маленьким или очень большим.

Связь со знаком k

Подписи четвертей показывают, где окажутся ветви при положительном и отрицательном k . Это помогает быстро проверить правильность построения.

Опорные точки

Отмеченные точки делают форму графика наглядной. По ним легко увидеть, что гипербола состоит из двух плавных частей, а не из одной линии.

Знаки x и y при разных значениях k

k	Знаки x и y	Четверти
$k > 0$	одинаковые	I и III
$k < 0$	разные	II и IV

Сравнение показывает, как знак коэффициента влияет на расположение точек графика $y = k/x$ на координатной плоскости.

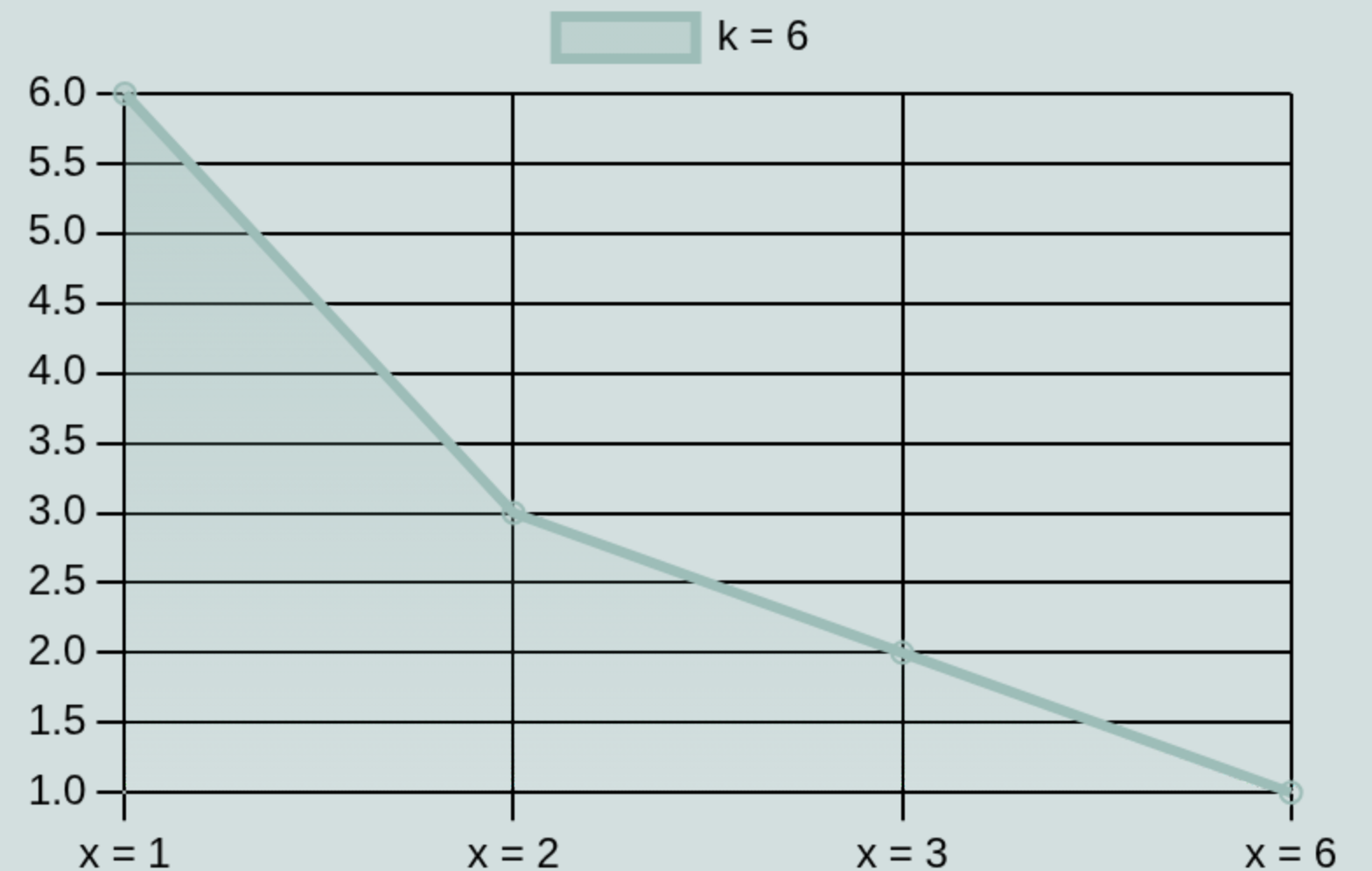
Знак k сразу подсказывает, где искать точки: при $k > 0$ — в I и III четвертях, при $k < 0$ — во II и IV.

Как меняется y при увеличении x

Точки показывают, что при росте x значения y уменьшаются не случайно, а по строгому правилу обратной пропорциональности.

Если x увеличивается в несколько раз, то y уменьшается во столько же раз. Это отличительный признак зависимости $y = k/x$.

Вычисления по формуле $y = 6/x$.



Асимптоты графика

Ось x



Прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой: при больших значениях $|x|$ график всё ближе подходит к оси x , но не пересекает её.

Ось y



Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой: при приближении x к нулю модуль y быстро растёт, и ветви уходят всё дальше.

Приближение к осям



Гипербола не касается осей координат, потому что при $x = 0$ функция не определена, а значение $y = 0$ при $k \neq 0$ невозможно.

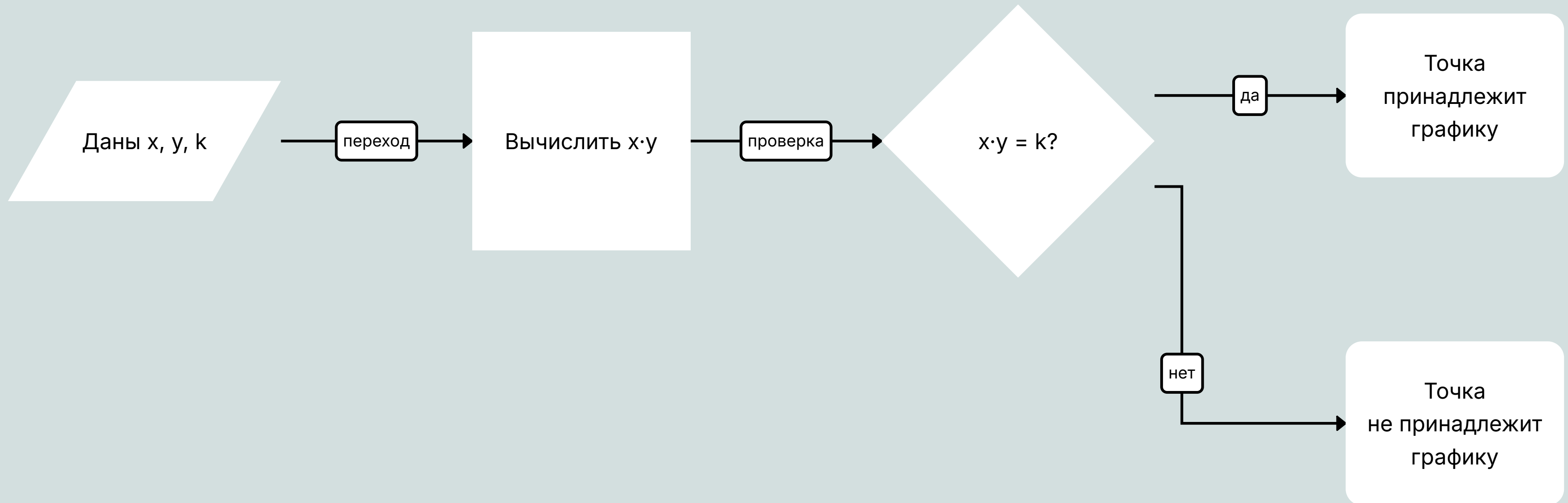
Поведение ветвей



Чем дальше точка от начала координат по оси x , тем меньше по модулю становится y . Это помогает мысленно рисовать форму графика без лишних вычислений.

Как проверить точку на графике

Схема показывает, как по значениям x , y и k быстро определить, принадлежит ли точка графику функции $y = k/x$.



Типичные ошибки при работе с графиком

Таблица помогает быстро отличить верные правила построения графика от распространённых ошибок.

Главные ошибки связаны с областью определения, формой графика и неверным определением четвертей. Эти правила стоит проверять каждый раз при построении.

Ошибка	Как правильно
$x = 0$ допустимо	$x \neq 0$
Все точки соединяют	Две плавные ветви
Путают знак k	Знаки четвертей совпадают с правилом

Задачи из повседневной жизни

Покупки и цена

Когда сумма денег фиксирована, подорожание одного предмета уменьшает их количество. Здесь цена и количество связаны обратной пропорциональностью, потому что их произведение задаёт общую сумму.

Работа и время

Если одну и ту же работу выполняют больше людей, время обычно уменьшается. При этом произведение числа работников и времени остаётся постоянным, если объём работы не меняется.

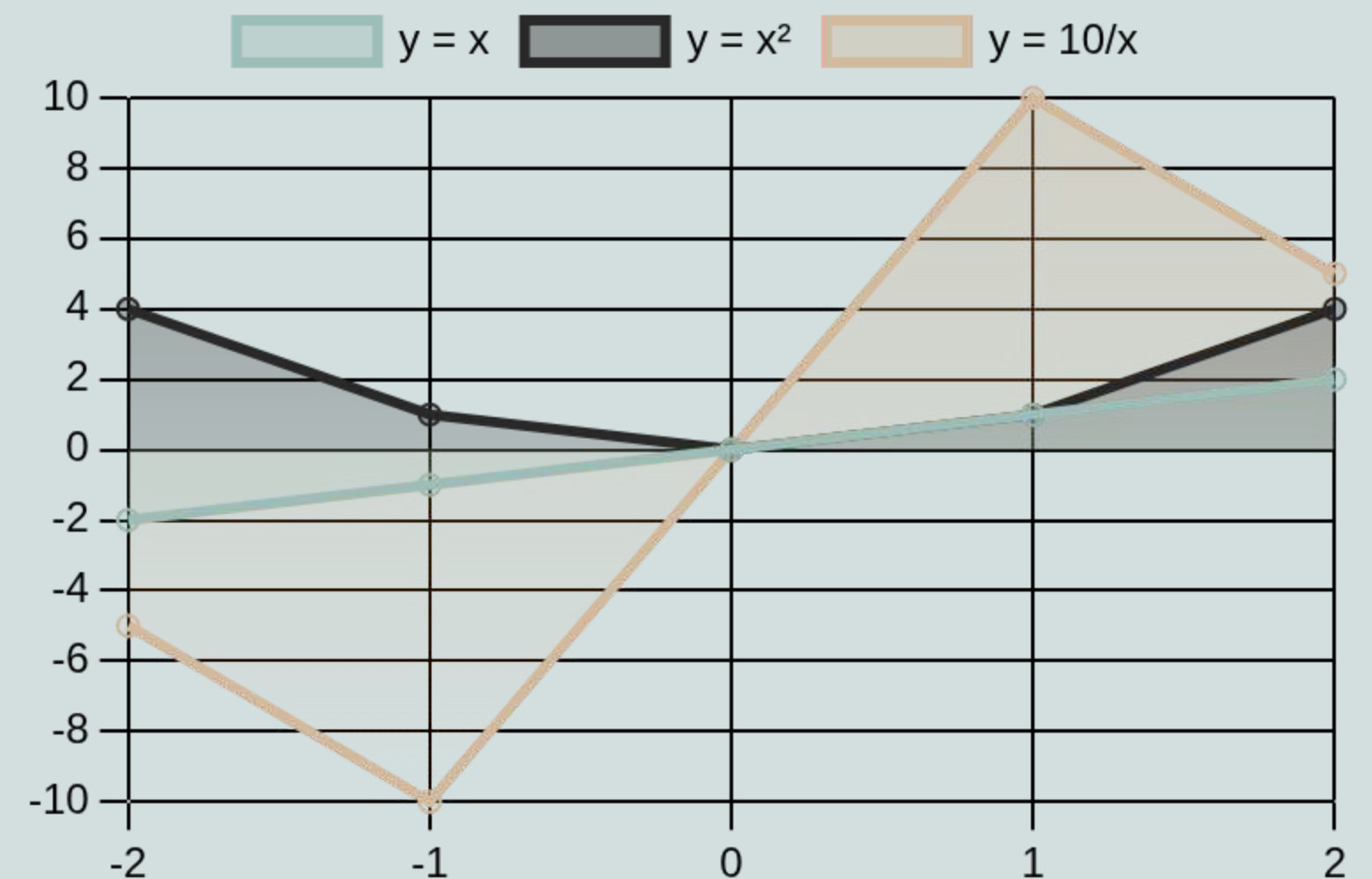
Скорость и путь

При одинаковом расстоянии чем больше скорость, тем меньше время в пути. Это удобный пример зависимости $y = k/x$, которую легко увидеть в реальных задачах.

Сравнение функции $y = x$, $y = x^2$ и $y = 10/x$

На одном поле видно, как по-разному ведут себя линейная, квадратичная и обратная зависимости при одинаковых значениях x .

График $y = 10/x$ резко отличается от прямой и параболы: он не цельный, а состоит из двух отдельных ветвей.



Вычисления по формулам $y = x$, $y = x^2$ и $y = 10/x$.

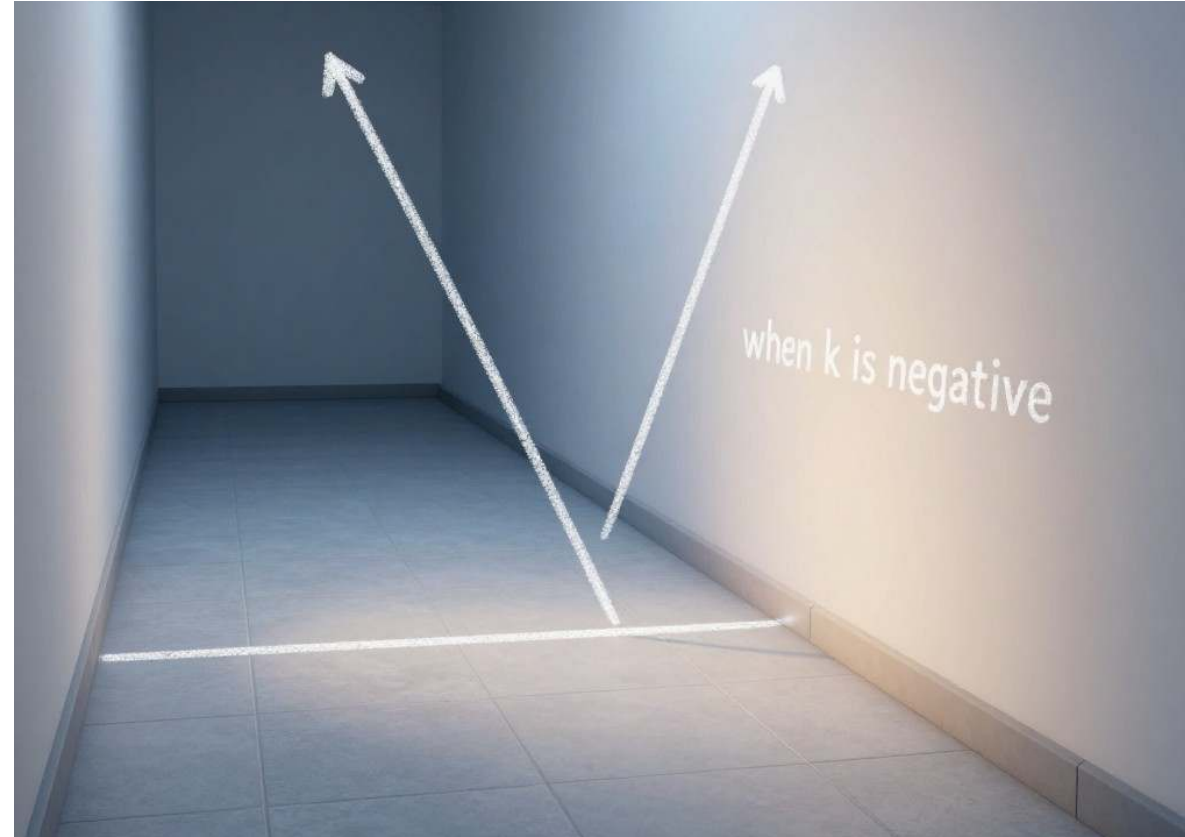
Влияние числа k на вид графика



01

Когда k становится больше

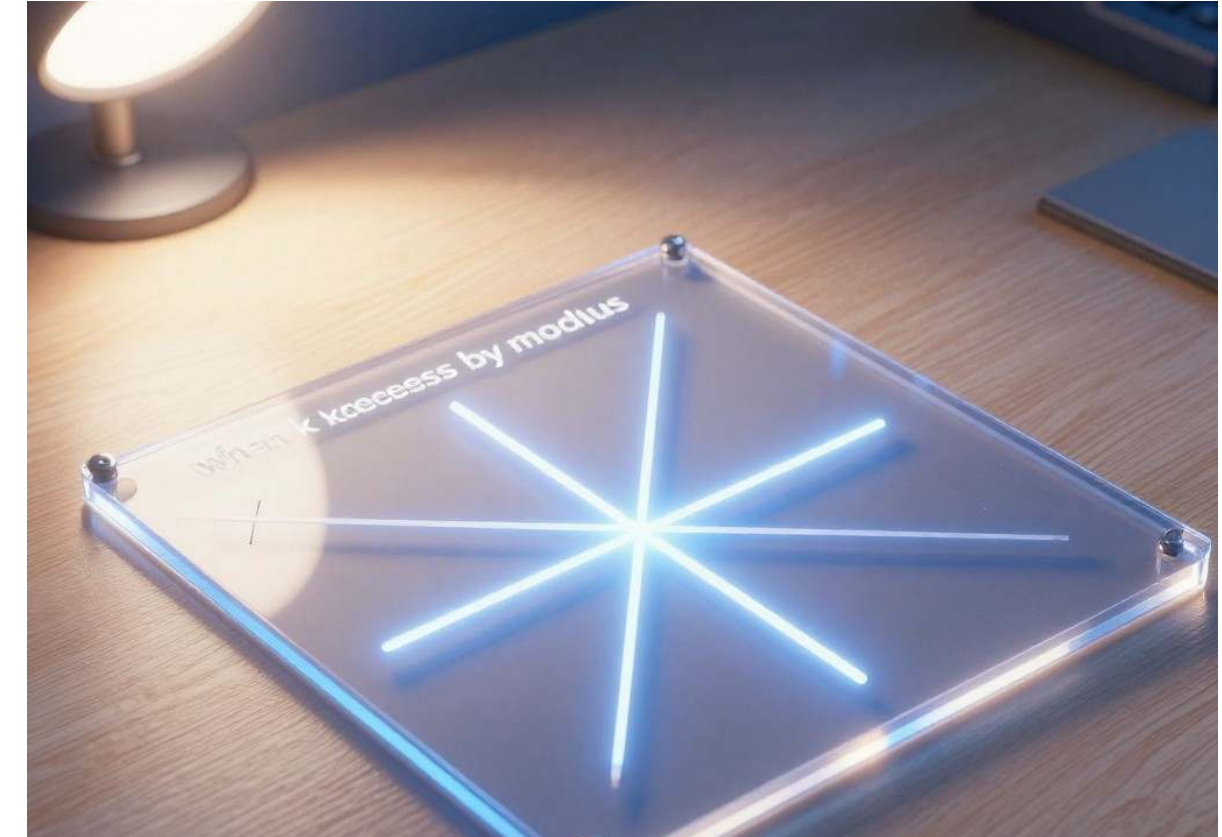
При увеличении модуля k точки графика удаляются от осей координат. Ветви гиперболы как будто «растягиваются» наружу, сохраняя ту же форму. Поэтому график $y = 2/x$ расположен дальше от осей, чем $y = 1/x$.



02

Когда k отрицательное

Если $k < 0$, ветви переходят в другие четверти, но сама гипербола остаётся узнаваемой. На рисунке это хорошо видно на графике $y = -2/x$: форма та же, а расположение зеркально меняется.

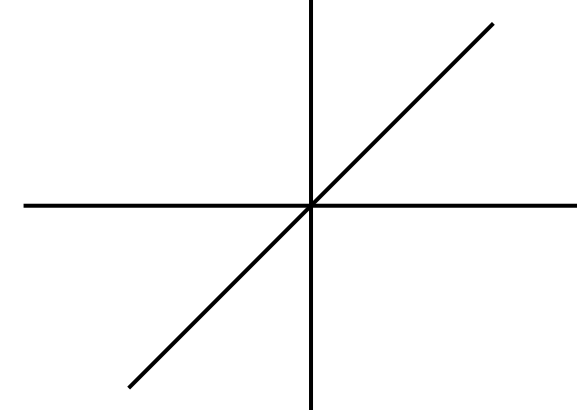


03

Когда k уменьшается по модулю

Чем меньше $|k|$, тем ближе график подходит к осям. На сравнении видно, что $y = 1/x$ проходит ближе к координатным осям, чем более «широкие» графики с большим $|k|$.

Главные свойства функции $y = k/x$



01

1. Область определения

Функция определена для всех действительных x , кроме нуля. Именно поэтому при построении графика точка с абсциссой 0 всегда исключается.

02

2. Вид графика

График функции — гипербола, состоящая из двух отдельных ветвей. Они не соединяются между собой и располагаются в разных частях координатной плоскости.

03

3. Асимптоты

Оси координат $x = 0$ и $y = 0$ являются асимптотами. График приближается к ним всё ближе, но не пересекает и не касается их.

04

4. Роль знака k

Знак коэффициента определяет четверти, в которых лежат ветви: при $k > 0$ — I и III, при $k < 0$ — II и IV. Это помогает быстро ориентироваться на плоскости.

05

5. Постоянное произведение

Для любой точки графика выполняется равенство $x \cdot y = k$. Это главное свойство позволяет находить точки, проверять ответы и строить график по таблице значений.

Функция $y = k/x$: главное без лишних деталей

Функция $y = k/x$ показывает обратную пропорциональность: одна величина растёт, а другая уменьшается. Запомните гиперболу, асимптоты и правило $x \cdot y = k$ — они сразу помогают решать задачи.