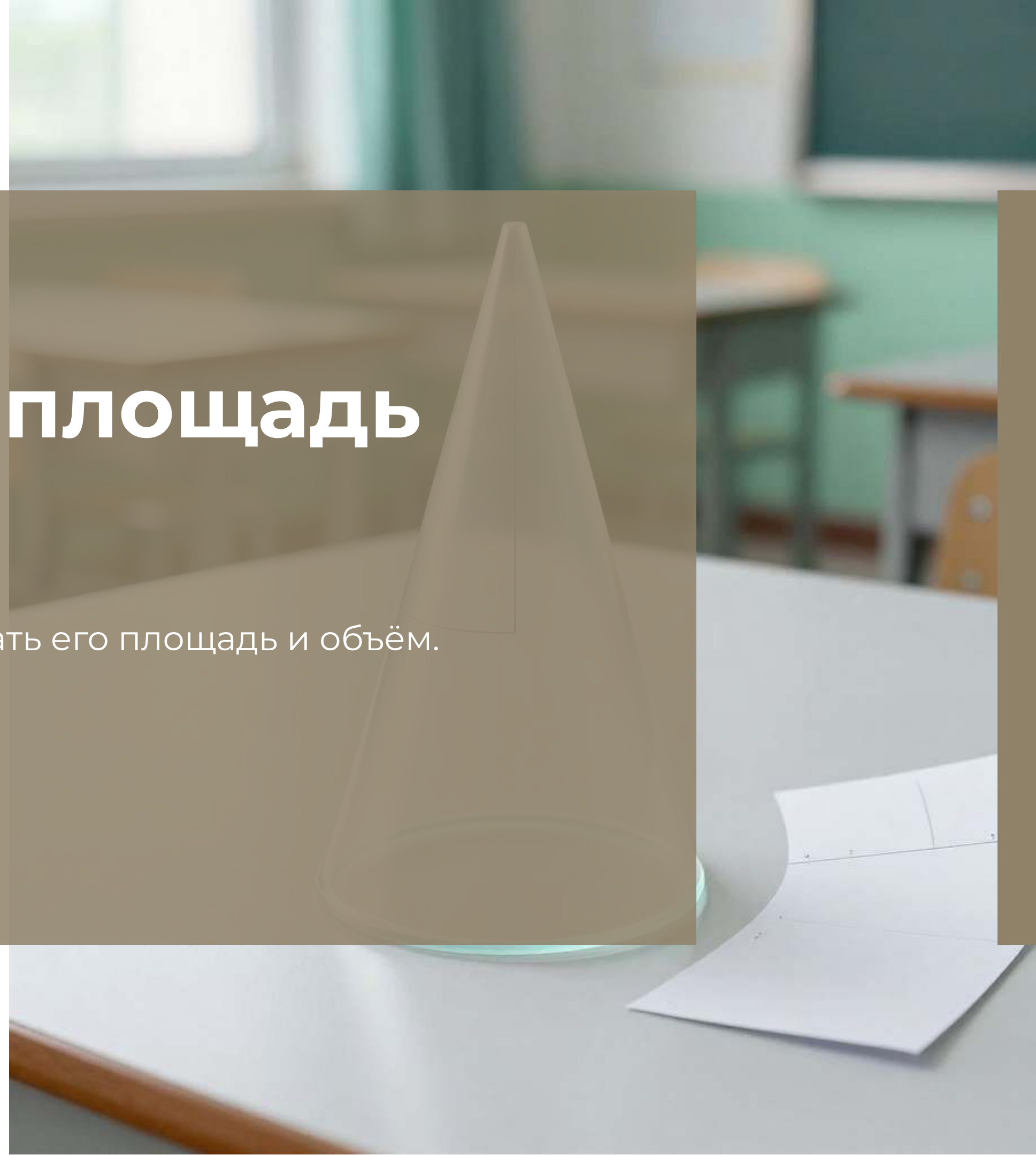


Конус: элементы, площадь и объём

Разберём устройство конуса и научимся считать его площадь и объём.



Где встречается конус и зачем он нужен

Конусы окружают нас чаще, чем кажется: от воронки до крыши башни. На их примере удобно учиться читать чертёж, понимать обозначения и уверенно применять формулы площади и объёма.



Что такое конус

○ Круглое основание

Конус — это пространственное тело с круглым основанием и одной вершиной. Все отрезки, соединяющие вершину с точками основания, образуют его боковую поверхность.

○ Вид сбоку

Если смотреть на конус сбоку, видно, что его форма напоминает наклонённую «шапочку». Именно поэтому в задачах важно различать основание, высоту и образующую.

○ Прямой конус

У прямого конуса вершина находится над центром основания, а ось проходит через этот центр. Именно такой конус чаще всего рассматривают в школьных формулах.

○ Что важно на чертеже

При решении задач нужно уметь находить длины и площади по рисунку. Для этого заранее отмечают все элементы фигуры и подписывают их одинаковыми обозначениями.

Элементы конуса и обозначения

01

1. Вершина

Вершина — это единственная верхняя точка конуса. От неё к основанию идут все боковые образующие, поэтому именно с вершины удобно начинать разбор рисунка.

02

2. Основание

Основание конуса всегда круглое. На чертеже его изображают окружностью, а внутри отмечают центр, через который проходит ось прямого конуса.

03

3. Высота h

Высота h — это отрезок от вершины до плоскости основания под прямым углом. Она показывает, насколько конус «вытянут» вверх.

04

4. Радиус и образующая

Радиус r идёт от центра основания до окружности, а образующая l соединяет вершину с краем основания по боковой поверхности.

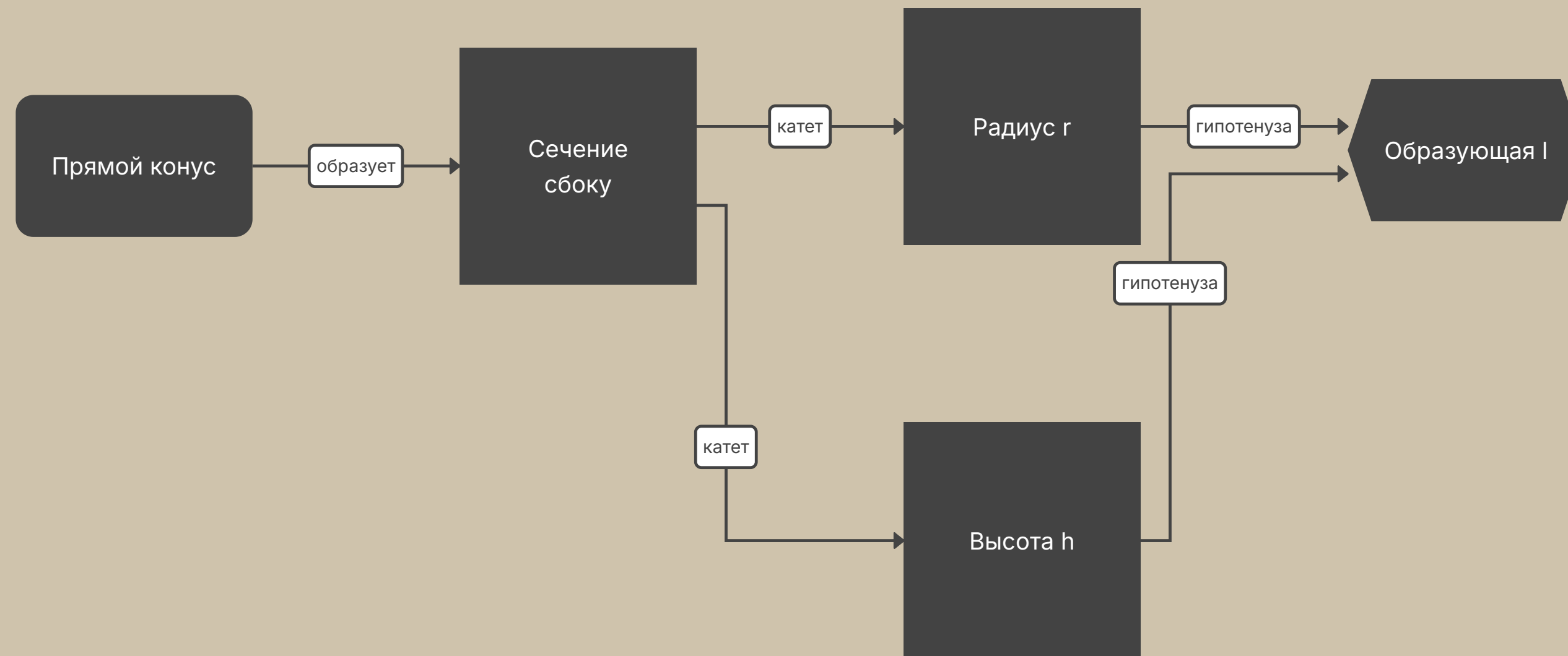
05

5. Диаметр d

Диаметр d проходит через центр основания и равен удвоенному радиусу: $d=2r$. Это важно, потому что в формулах используют именно радиус, а не диаметр.

Связь высоты, радиуса и образующей

Боковой вид прямого конуса даёт прямоугольный треугольник, который связывает три главные величины.



6, 8 и 10

см — это стороны прямоугольного треугольника в примере, где образующая найдена по Пифагору.

В прямом конусе образующая, высота и радиус связаны теоремой Пифагора. Это позволяет находить неизвестную длину по двум данным величинам.

Расчёт по теореме Пифагора

Развёртка боковой поверхности

○ Форма развёртки

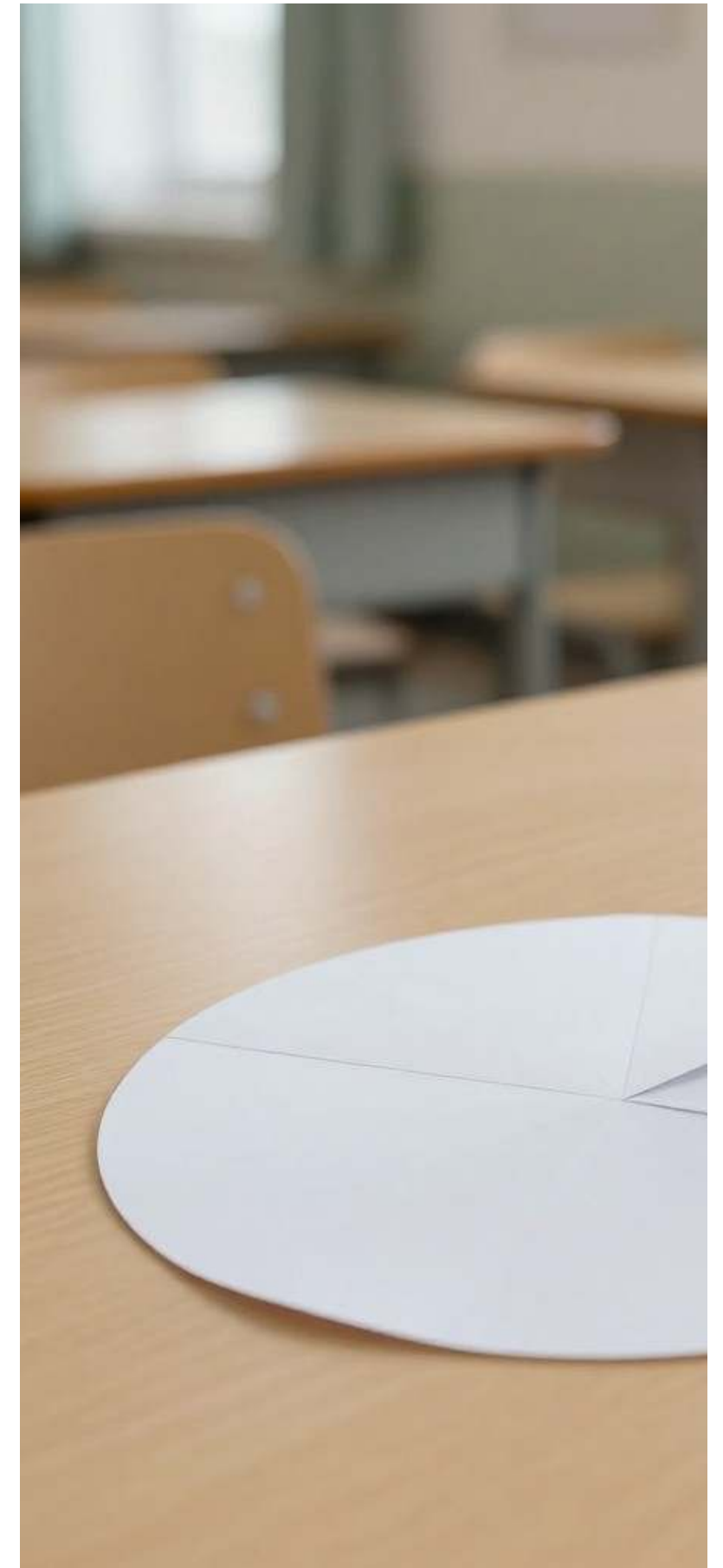
Если развернуть боковую поверхность прямого конуса, получится сектор круга. Его радиус совпадает с образующей l , поэтому именно эта длина задаёт размер сектора.

○ Дуга и основание

Длина дуги сектора равна длине окружности основания. Значит, дуга развёртки связана с радиусом основания формулой $2\pi r$ и не может быть длиннее или короче произвольно.

○ Как появляется формула

Из равенства дуги и окружности основания получают формулу площади боковой поверхности. Это удобно, потому что площадь можно выразить через две измеряемые величины — r и l .



Формула площади боковой поверхности

1

1. Основная формула

Запомните основную формулу: $S_{\text{бок}} = \pi r l$. Она показывает площадь только боковой части конуса и не включает круг основания.

2

2. Какие величины нужны

В формулу подставляют радиус основания r и образующую l . Оба значения должны быть в одинаковых единицах длины, например в сантиметрах.

3

3. Единицы ответа

Если длины заданы в сантиметрах, ответ получают в квадратных сантиметрах. Для метров результат записывают в м^2 , потому что площадь всегда измеряется в квадратных единицах.

4

4. Что не забыть

Эта формула подходит только для боковой поверхности. Чтобы найти полную поверхность, к ней добавляют площадь основания, а не умножают всё ещё раз.

Пример: площадь боковой поверхности

Покажем вычисление площади боковой поверхности на коротком примере с подстановкой в формулу.

В формулу подставляют только известные длины, а итог записывают в квадратных единицах.

Дано	Подстановка	Ответ
$r=5 \text{ см}, l=13 \text{ см}$	$\pi \cdot 5 \cdot 13$	$65\pi \text{ см}^2$
—	—	$\approx 204,2 \text{ см}^2$

Подстановка в формулу $S_{\text{бок}} = \pi r l$

2

слагаемых включает полная
поверхность конуса.

Полная поверхность складывается
из боковой части и основания,
поэтому формула включает два
слагаемых.

Формула полной поверхности конуса

Состав полной поверхности конуса

Сравним две части полной поверхности конуса: боковую поверхность и основание. Для $r=5$ см и $l=13$ см удобно видеть, как складываются площади.

Полная поверхность получается сложением двух площадей: боковой части и основания. При данных r и l площадь основания добавляют отдельно.

Часть	Формула	Значение
Боковая	$\pi r l$	$65\pi \text{ см}^2$
Основание	πr^2	$25\pi \text{ см}^2$
Полная	сумма	$90\pi \text{ см}^2$

Подстановка в формулы $S_{\text{бок}}=\pi r l$ и $S_{\text{полн}}=S_{\text{бок}}+\pi r^2$

Откуда берётся формула объёма

○ Сравнение с цилиндром

Если к основанию конуса приставить такой же по высоте цилиндр, станет видно: объём конуса занимает только треть этого тела при одинаковых основании и высоте.

○ Почему есть $1/3$

Именно поэтому формула объёма конуса включает множитель $1/3$. Остальные части записи сохраняют параметры основания и высоту: $\pi r^2 h$, где r берут в квадрате.

○ Единицы измерения

При вычислениях важно помнить разницу между площадью и объёмом. Площадь измеряют в квадратных единицах, а объём — в кубических, потому что речь идёт о пространстве.



Вычисление объёма конуса

Вычислим объём по формуле $V = (1/3)\pi r^2 h$ и покажем, как подстановка идёт по шагам. Итог обязательно записывают с кубическими единицами.

Сначала радиус возводят в квадрат, затем умножают на высоту и на $1/3$. Объём всегда записывают в кубических единицах.

Дано	Подстановка	Ответ
$r = 4 \text{ см}$	$(1/3) \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 9$	$48\pi \text{ см}^3$
$h = 9 \text{ см}$	$(1/3) \cdot \pi \cdot 16 \cdot 9$	$\approx 150,8 \text{ см}^3$

Вычисление по формуле $V = (1/3)\pi r^2 h$

Радиус и диаметр: не путать

01

Смотрим на условие

Сначала определите, что дано в условии: диаметр или радиус. Эти величины связаны просто: радиус всегда вдвое меньше диаметра, поэтому их нельзя считать равными.

02

Находим радиус

Если указан диаметр, делите его пополам: $r=d/2$. Например, при $d=12$ см радиус равен 6 см, и только это значение подставляют в формулы.

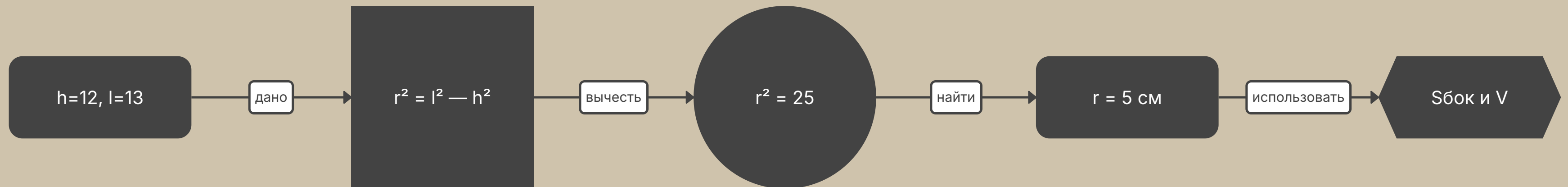
03

Избегаем ошибки

Частая ошибка — подставить диаметр вместо радиуса. Тогда ответ получится неверным, потому что формулы площади и объёма конуса построены именно через r , а не через d .

По высоте и образующей находим радиус

Рассуждение по данным $h=12$ см и $l=13$ см позволяет сначала найти радиус, а затем сразу вычислить площадь боковой поверхности и объём.



Проверка вычислений на одном примере

Проверим расчёты на одной задаче и убедимся, что все формулы согласованы между собой. Здесь удобно сравнить Пифагора, площадь и объём.

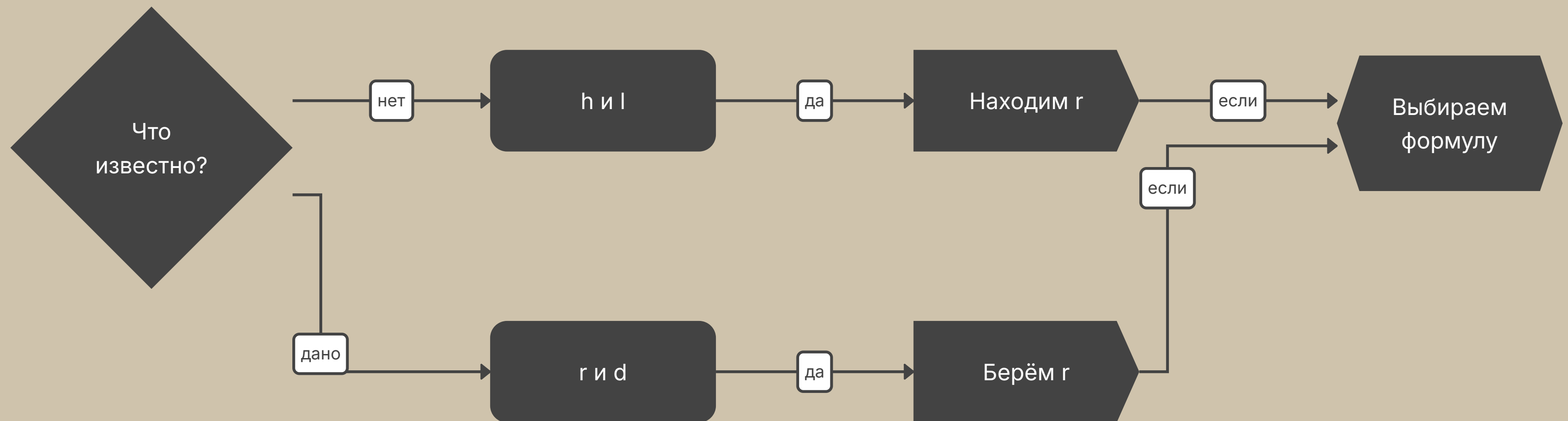
Если значения h , r и l согласованы, формулы дают логичный ответ. Совпадение по Пифагору подтверждает правильность исходных данных.

Проверка	Действие	Результат
Пифагор	$7^2 + 24^2$	25^2
$S_{бок}$	$\pi \cdot 7 \cdot 25$	$175\pi \text{ м}^2$
V	$(1/3)\pi \cdot 7^2 \cdot 24$	$392\pi \text{ м}^3$

Проверка по формулам $l^2 = h^2 + r^2$, $S_{бок} = \pi r l$, $V = (1/3)\pi r^2 h$

Выбор первого шага в задаче

Первый шаг зависит от того, какие величины даны в условии: радиус, диаметр, высота или образующая.



Три главные формулы конуса

Три основные формулы удобно сравнивать рядом: так легче заметить, где используется радиус, где добавляется основание, а где появляется высота.

Формулы отличаются набором величин: площадь боковой поверхности зависит от r и l , полная — ещё и от основания, объём — от r^2 и h .

Величина	Формула	Что нужно
$S_{бок}$	πrl	r и l
$S_{полн}$	$\pi rl + \pi r^2$	r и l
V	$(1/3)\pi r^2 h$	r и h

Сравнение формул площади и объёма конуса

Проверка ответа и типичные ошибки

○ Единицы измерения

Сначала посмотрите на единицы: для площади подходят см^2 или м^2 , а для объёма — см^3 или м^3 . Неправильные единицы сразу показывают ошибку в решении.

○ Верная формула

Сравните ответ с нужной формулой. Для боковой поверхности берут только $\pi r l$, для полной добавляют πr^2 , а для объёма используют именно $(1/3)\pi r^2 h$.

○ Радиус вместо диаметра

Проверьте, не подставили ли диаметр вместо радиуса. Если в условии дан диаметр, его нужно сначала разделить пополам, иначе формула даст завышенный результат.

○ Проверка рисунка

Полезно ещё раз взглянуть на чертёж: вершина, основание, высота и образующая должны быть отмечены правильно. Тогда легче заметить, хватает ли данных для вычислений.

Конус: главное, что нужно запомнить

Конус удобно изучать через три величины: радиус, высоту и образующую. Если помнить формулы площади и объёма, правильно читать чертёж и не забывать про единицы, задачи решаются уверенно.