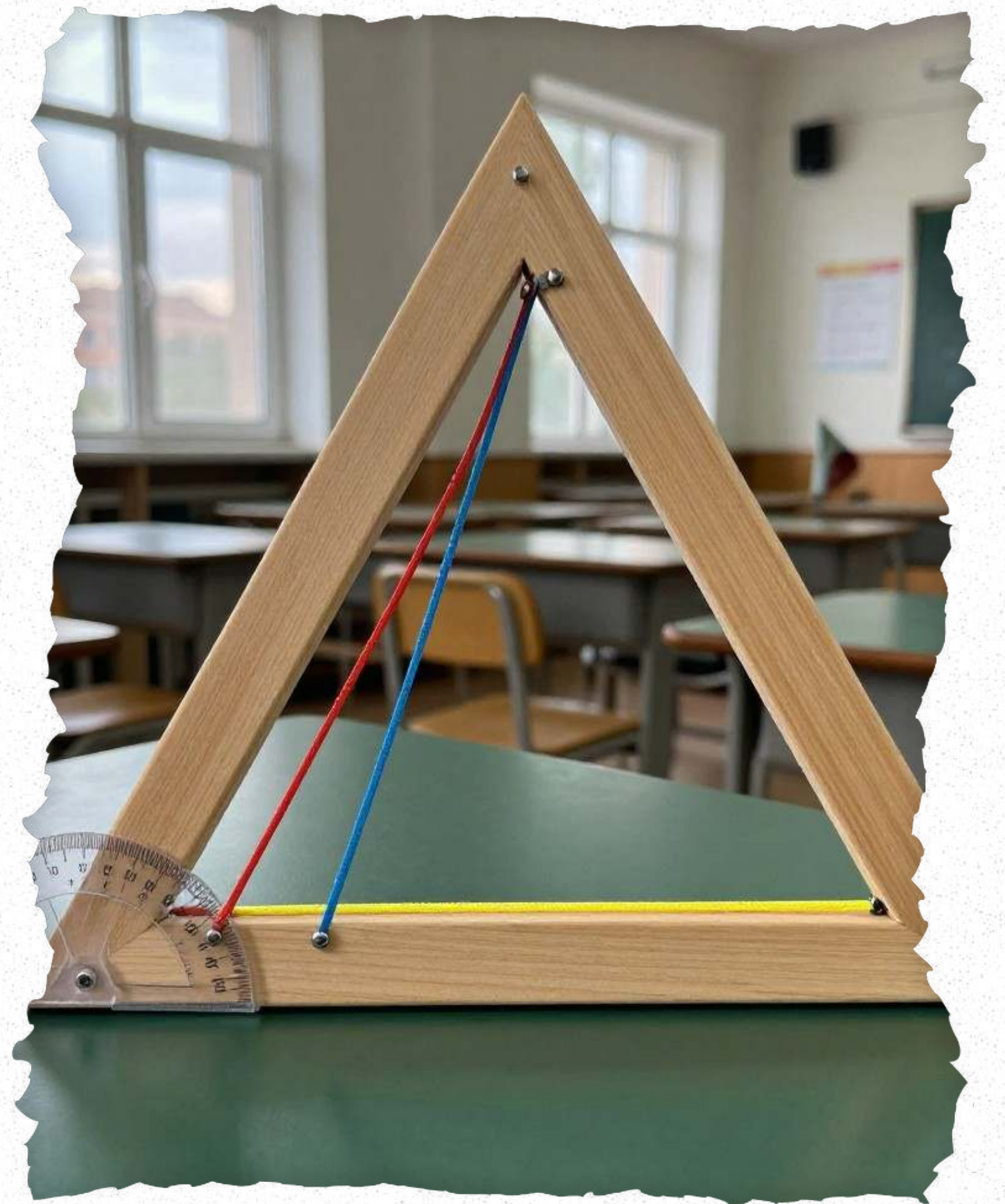


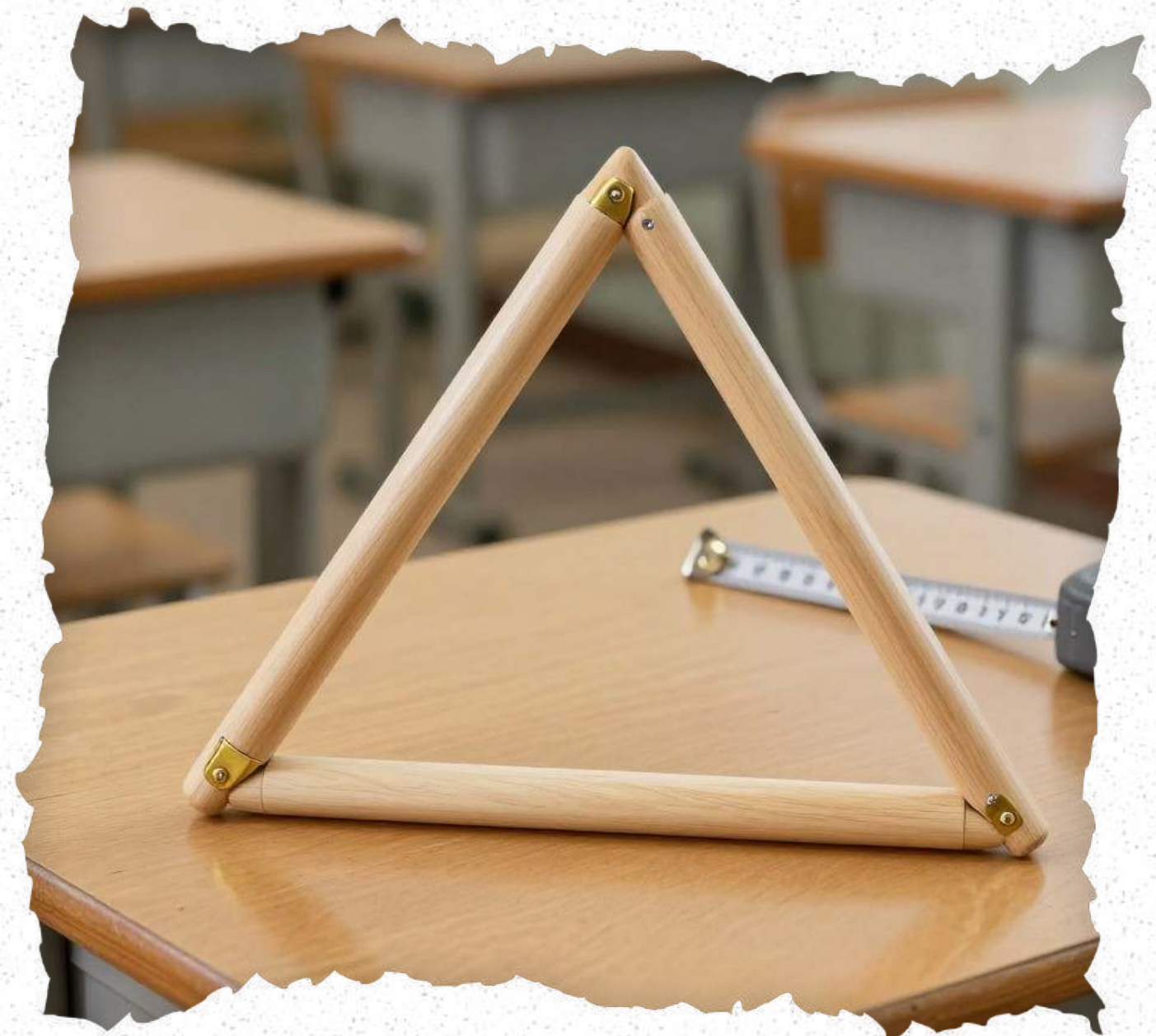
Теорема косинусов: связь сторон и углов в треугольнике

Формула, которая работает для любого треугольника и находит неизвестное.



Когда Пифагора уже недостаточно

- Во многих задачах треугольник не является прямоугольным, поэтому нужна формула, связывающая стороны и угол между ними. Теорема косинусов помогает вычислять неизвестные элементы там, где привычная школьная формула уже не подходит.



Когда появляется задача на теорему косинусов

Даны две стороны и угол

Чаще всего в условии уже известны две стороны и угол между ними, а третью сторону нужно найти по общей формуле для любого треугольника.

Известны все три стороны

Иногда в задаче измерены только длины сторон, но требуется определить один из углов. Тогда теорема косинусов удобно преобразуется для нахождения угла.

Треугольник может быть любым

Формула работает в остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольниках, поэтому её используют там, где условия не ограничиваются одним частным случаем.

Нужна связь сторон и углов

Теорема косинусов нужна, когда важно связать размеры треугольника с величиной угла и получить точный ответ без дополнительных построений.

Основная формула для нахождения стороны

1. Записываем нужный вариант

Если известны стороны b и c и угол A между ними, используют формулу $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. Она даёт длину стороны, лежащей напротив этого угла.

2. Меняем обозначения при необходимости

Для других сторон записывают похожие формулы: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$ и $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$. Принцип остаётся тем же.

3. Смысл косинуса

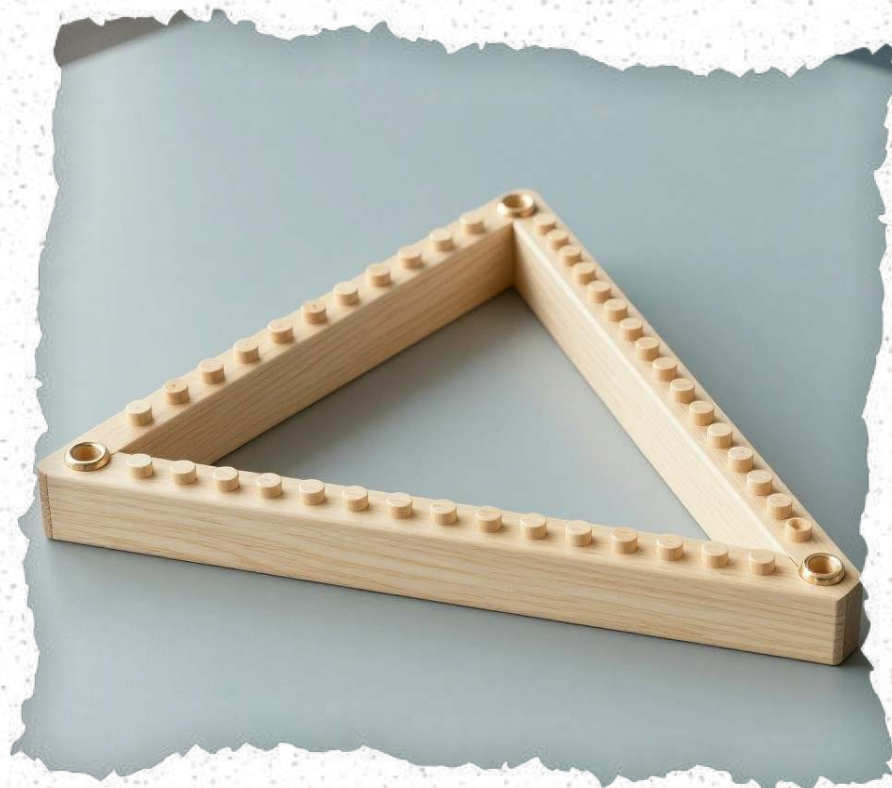
Значение $\cos A$ показывает, как именно угол влияет на результат. Чем меньше косинус, тем сильнее меняется длина стороны по сравнению с суммой квадратов двух других сторон.

4. Связь с Пифагором

При угле 90° $\cos A = 0$, поэтому формула превращается в $a^2 = b^2 + c^2$. Так теорема косинусов обобщает теорему Пифагора.

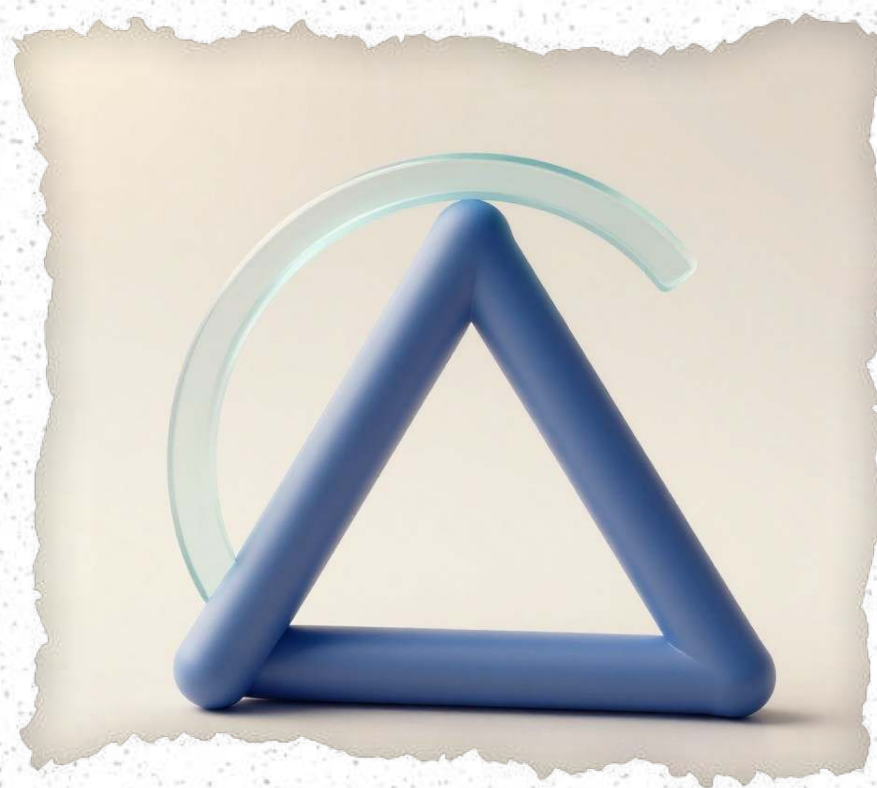


Обозначения сторон и углов в треугольнике



Стороны и их места

В записи треугольника маленькие буквы обозначают стороны, а большие — углы. Это помогает сразу понять, какая сторона лежит напротив какого угла и где искать нужные элементы на чертеже.



Угол и соседние стороны

Формула теоремы косинусов всегда соединяет одну сторону с двумя соседними сторонами и углом между ними. Поэтому важно видеть не только длины, но и их расположение на рисунке.



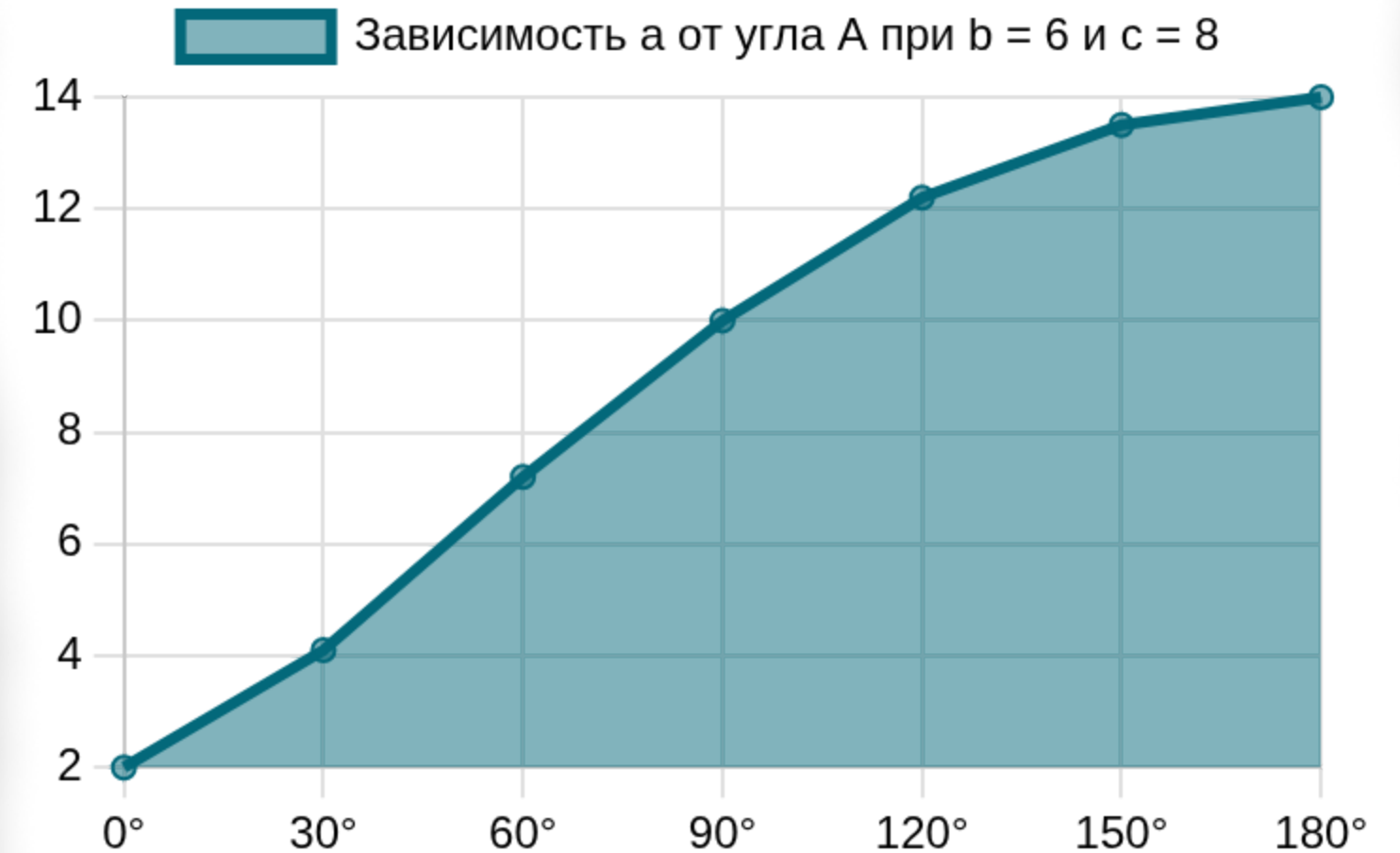
Почему это удобно

Когда обозначения уже знакомы, решение становится быстрее и аккуратнее. По одной записи легко определить, какие данные подставлять в формулу и какую величину нужно найти.

Как меняется сторона при изменении угла

При одинаковых сторонах угол между ними заметно изменяет длину противоположной стороны, поэтому одна и та же пара отрезков даёт разные результаты.

Чем больше угол, тем больше сторона a : влияние косинуса меняет результат от минимального значения до максимального.



Вычисления по формуле $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ при $b = 6$ и $c = 8$.

Порядок нахождения стороны по двум сторонам и углу

1. Выделить данные

Определяют, какие элементы даны в условии: две стороны и угол между ними. Это помогает сразу выбрать нужную формулу и не путать исходные данные.

2. Подставить значения

В формулу записывают известные стороны и нужный угол вместо буквенных обозначений. На этом шаге важно сохранить правильный порядок и не перепутать стороны.

3. Найти косинус

По таблице или вычислению определяют значение $\cos A$. Для точности нужно обратить внимание, в градусах задан угол или в другой мере.

4. Вычислить квадрат стороны

Сначала получают значение a^2 , аккуратно выполняя действия со знаками и скобками. Ошибка на этом этапе сразу приведёт к неверному результату.

5. Извлечь корень и проверить

После нахождения a^2 извлекают квадратный корень и получают длину стороны. Затем проверяют, подходит ли ответ по смыслу задачи и размерам треугольника.

Теорема Пифагора и теорема косинусов: сравнение

Сравнение показывает, в каких случаях применяют каждую формулу и что можно найти с их помощью.

Теорема косинусов охватывает больше ситуаций, чем теорема Пифагора, поэтому подходит для задач с любым треугольником.

Условие	Формула	Треугольник	Что найти
Известен прямой угол	$a^2 + b^2 = c^2$	Прямоугольный	Сторону
Даны 2 стороны и угол	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$	Любой	Сторону/ угол

Когда все стороны уже измерены, угол можно найти без дополнительных построений: сначала вычисляют $\cos A$, а затем определяют сам угол по его значению.

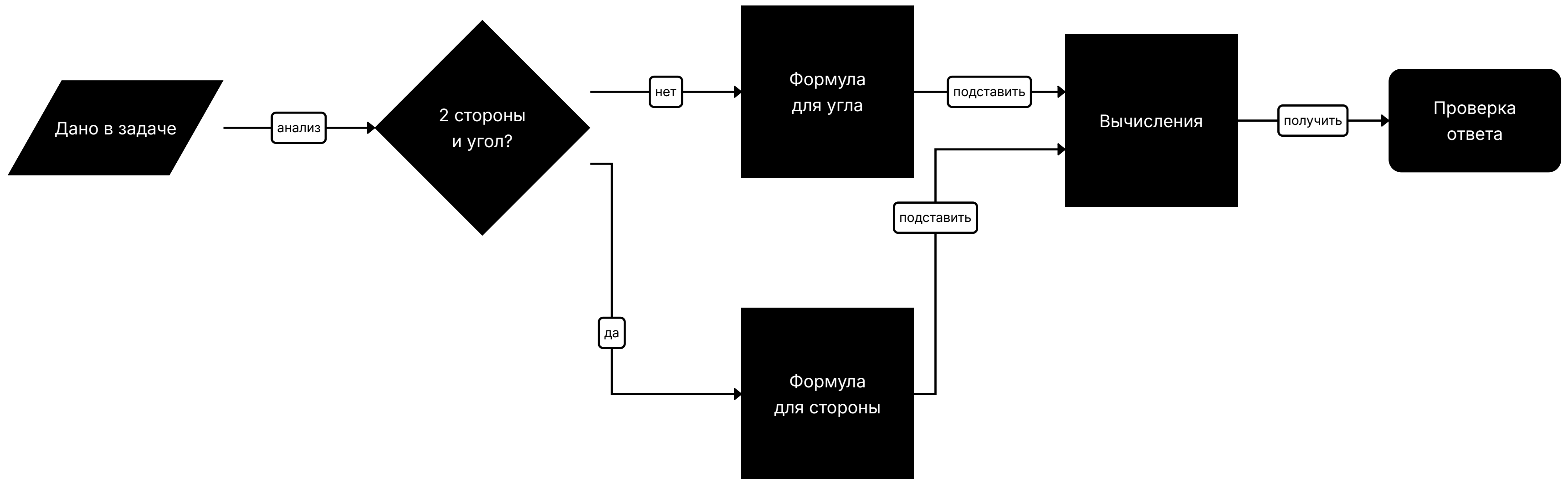
Преобразование теоремы косинусов в школьном курсе геометрии

3

**ИЗВЕСТНЫЕ СТОРОНЫ
ПОЗВОЛЯЮТ
ВОССТАНОВИТЬ
НЕИЗВЕСТНЫЙ УГОЛ
ПО ПРЕОБРАЗОВАННОЙ
ФОРМУЛЕ ТЕОРЕМЫ
КОСИНУСОВ.**

Алгоритм решения задач по теореме косинусов

Последовательность действий строится по данным задачи и выбору нужной формулы.



Практический пример: измерение расстояния

Два берега и один угол

На схеме отмечены две точки на местности, а между ними уже измерены 8 км и 11 км. Из точки наблюдения виден угол 60° , и по нему можно вычислить неизвестное расстояние без прямого прохода по маршруту.



Когда карта заменяет рулетку

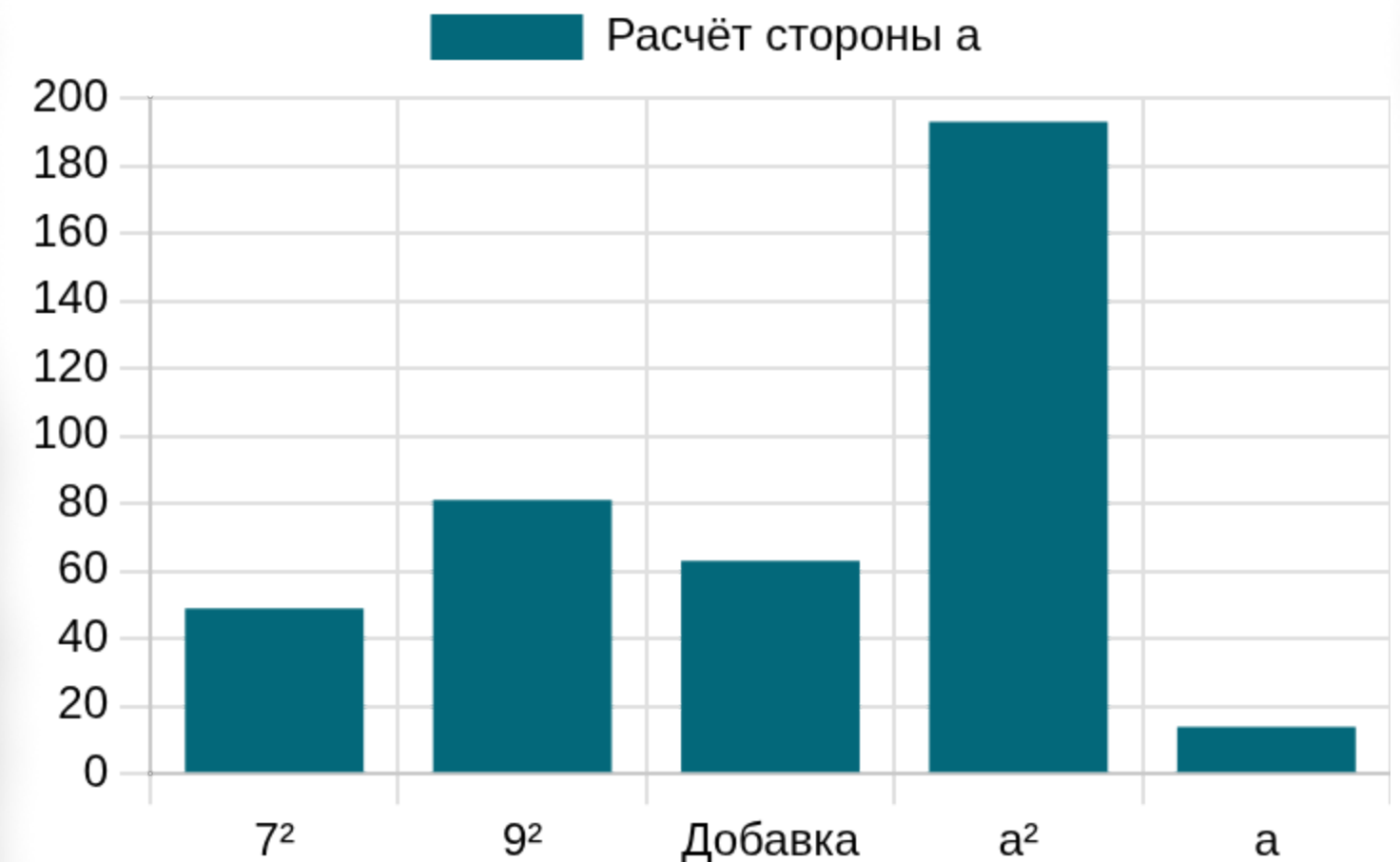
Иногда измерить отрезок напрямую трудно: мешают река, лес или большое расстояние. Тогда точки на карте соединяют линиями, а теорема косинусов помогает получить точный результат по уже известным данным и аккуратно подписанным отрезкам.



Пример вычисления стороны по формуле

Последовательность вычислений показывает, как отрицательный косинус превращает вычитание в прибавление.

После подстановки значений получается $a^2 = 193$, значит длина стороны примерно 13,9.



Школьный пример по формуле $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$; расчёт для 7, 9 и 120°

Особенности тупоугольного треугольника



Косинус становится отрицательным

Если угол больше 90° , его косинус отрицателен. Поэтому в формуле теоремы косинусов знак меняется, и результат для стороны увеличивается по сравнению с острыми углами.



Напротив тупого угла — самая длинная сторона

Сторона, лежащая напротив тупого угла, обычно получается самой длинной. Это удобная проверка: если ответ не согласуется с рисунком, значит, в вычислениях допущена ошибка.



Полезная самопроверка

После решения стоит сравнить длины сторон с видом треугольника. Такая проверка помогает понять, не перепутан ли знак косинуса и не получился ли слишком маленький или слишком большой ответ.

Типичные значения косинуса угла

Угол	cos	Смысл
0°	1	максимум
60°	0,5	уменьшает вычитание
90°	0	как Пифагор
120°	−0,5	даёт прибавление
180°	−1	крайний случай

Школьная таблица значений косинуса

Таблица помогает быстро вспомнить значения косинуса для самых частых углов и увидеть, как знак влияет на вычисления.

При росте угла косинус уменьшается и может стать отрицательным, поэтому результат формулы заметно меняется.

Частые ошибки при решении задач

1. Путают нужную сторону

Важно помнить, что в формуле используется сторона, лежащая напротив искомого угла. Если перепутать её с соседними сторонами, ответ окажется неверным уже на первом шаге.

2. Забывают квадрат и корень

Сначала находят значение a^2 , а уже потом извлекают квадратный корень. Если пропустить этот порядок, длина стороны получится неправильной и не совпадёт с условиями задачи.

3. Неверно выбирают знак косинуса

Для тупого угла косинус отрицательный, поэтому формула меняется не так, как при острых углах. Ошибка со знаком особенно часто портит итоговый результат.

4. Смешивают градусы и радианы

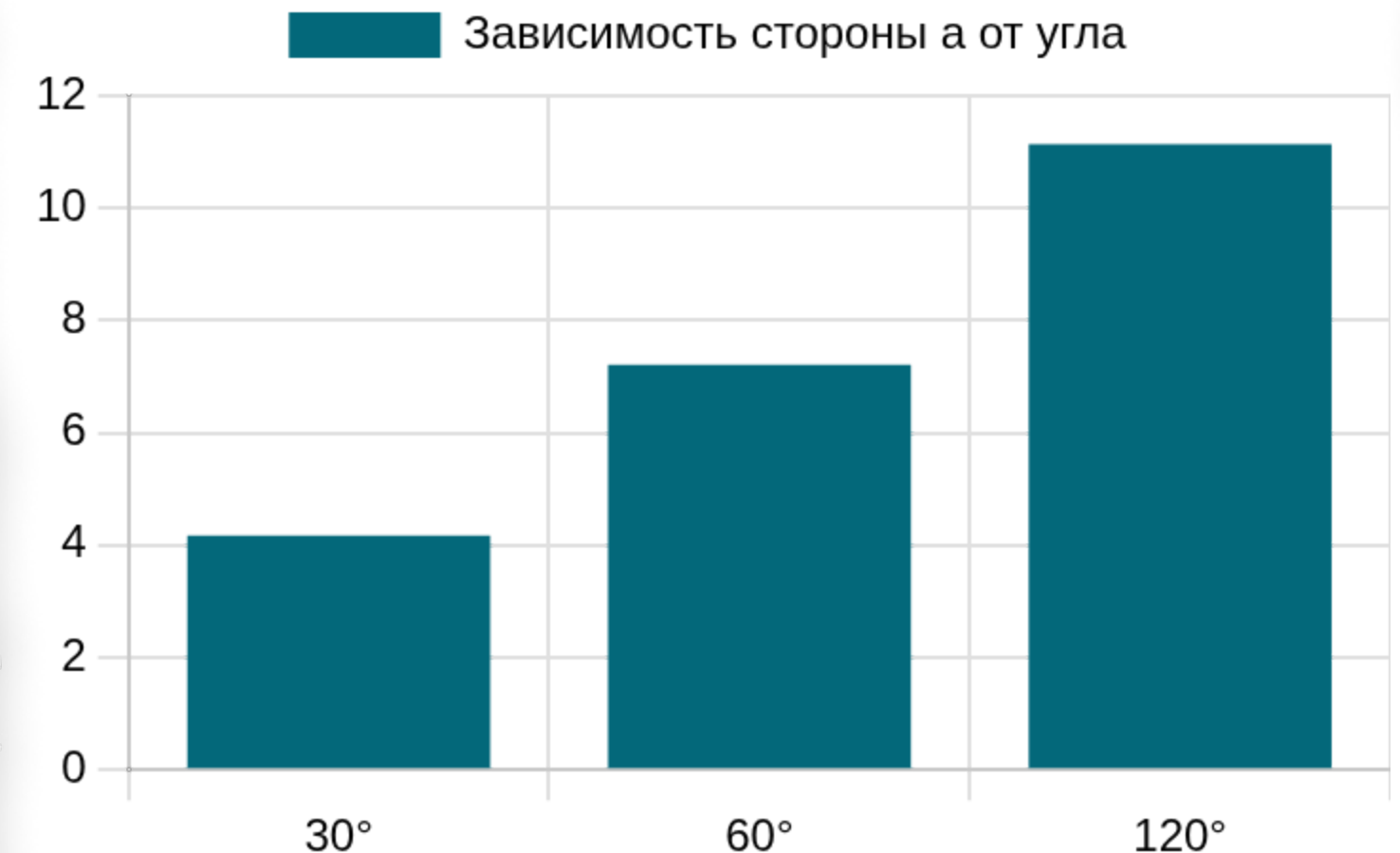
В школьных задачах обычно работают с градусами, поэтому важно не подставлять радианы по ошибке. Иначе значение косинуса будет другим, и весь расчёт сойдётся.



Как меняется результат при разных углах

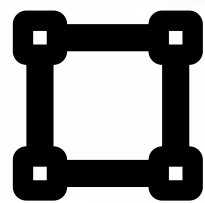
Для одних и тех же сторон меняется только угол, поэтому наглядно видно влияние косинуса на ответ.

Чем больше угол между сторонами, тем больше длина противоположной стороны при фиксированных b и c .



Расчёт по формуле $a^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos A$ для углов 30° , 60° и 120°

Где применяется теорема косинусов



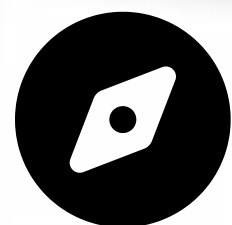
Геометрические задачи

Теорема косинусов помогает находить стороны и углы в треугольниках на чертежах. Она особенно полезна, когда известны не все данные, а нужно получить точный ответ.



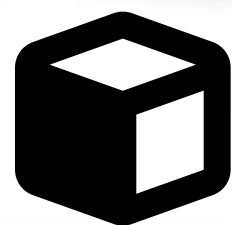
Измерение на местности

На карте или на местности не всегда можно измерить расстояние напрямую. Тогда используют уже известные отрезки и угол между ними, чтобы рассчитать недостающую длину.



Навигация и ориентирование

В навигации важно понимать, как связаны направления и расстояния. Теорема косинусов помогает вычислять промежуточные величины, когда маршрут задан не по прямой линии.



Техника и изображения

В строительстве, физике и компьютерной графике тоже встречаются треугольные схемы. Формула помогает точно описывать формы, расстояния и положения объектов без лишних измерений.

Как выбрать нужную формулу в задаче

Схема выбора зависит от того, какие данные уже известны и что требуется найти.



Почему теорема косинусов важна в школьной геометрии

1. Связывает всё в одной формуле

Формула объединяет стороны и углы треугольника, поэтому помогает видеть, как одна величина влияет на другую. Это делает решение задач более понятным и последовательным.

2. Работает для любого треугольника

В отличие от некоторых других правил, теорема косинусов подходит не только для прямоугольных фигур. Её можно применять в остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольниках.

3. Учит точному вычислению

При работе с квадратами, корнями и косинусом нужно быть внимательным. Такая практика развивает аккуратность и помогает лучше понимать геометрические связи.

4. Готовит к новым темам

Эта теорема становится основой для дальнейшего изучения тригонометрии и более сложных задач. Она показывает, что геометрия может описывать даже ситуации без прямого измерения.

Теорема косинусов — универсальный инструмент для треугольников

Она помогает находить стороны и углы там, где одной теоремы Пифагора уже недостаточно. Главное — правильно выбрать формулу, аккуратно вычислить косинус и не ошибиться в квадратах и корнях.