

Основное свойство алгебраической дроби

Как менять дробь, не меняя её значение

С чего начать работу с дробями



Алгебраические дроби выглядят привычно, но требуют внимательности: сначала проверяем, где знаменатель не равен нулю, и только потом упрощаем выражение.



Зачем упрощать алгебраические дроби

Короткая запись

В формулах и уравнениях дроби помогают записывать выражения короче, а затем быстрее преобразовывать их без лишних вычислений.

Удобство в задачах

При движении, процентах и геометрических задачах дроби часто встречаются в ответах и промежуточных вычислениях, поэтому их удобно упрощать.

Быстрое сокращение

Если в числителе и знаменателе есть одинаковые множители, запись можно сделать намного проще и понятнее для дальнейших действий.

Проверка без лишних шагов

Чем проще вид дроби, тем легче проверить вычисления и заметить ошибку в преобразованиях.

Алгебраическая дробь и ОДЗ

1

Общий вид

Записываем дробь как отношение двух выражений A и B , где оба могут содержать переменные.

2

Главное ограничение

Смотрим на знаменатель и сразу выясняем, при каких значениях переменной он не обращается в ноль.

3

ОДЗ

Все такие значения образуют область допустимых значений, и её нужно учитывать до и после преобразований.

Повторяем сокращение и множители

1 Простой пример

В обычной дроби $6/12$ можно сократить на 6, потому что и числитель, и знаменатель делятся на один и тот же множитель.

2 Что именно сокращают

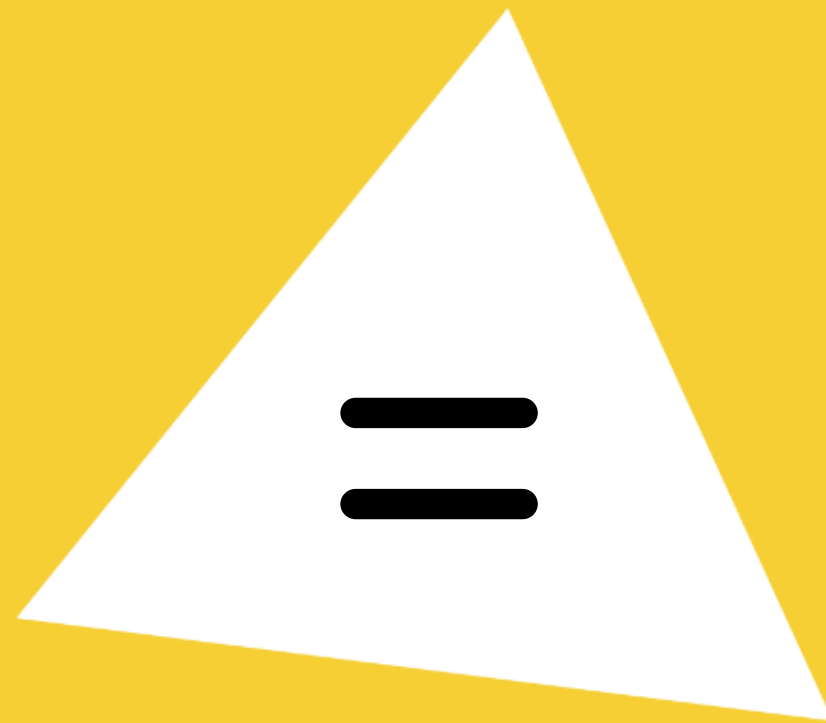
В алгебре сокращают только общие множители, а не отдельные слагаемые, иначе получаются неверные равенства.

3

Подготовка к сокращению

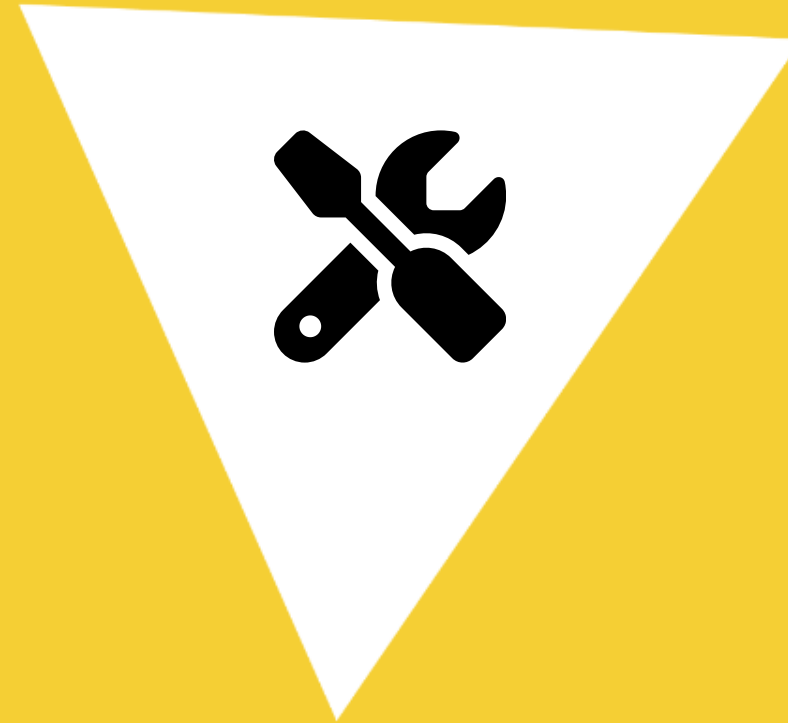
Поэтому перед сокращением выражение часто раскладывают на множители, чтобы общий множитель был хорошо виден.

Главные идеи



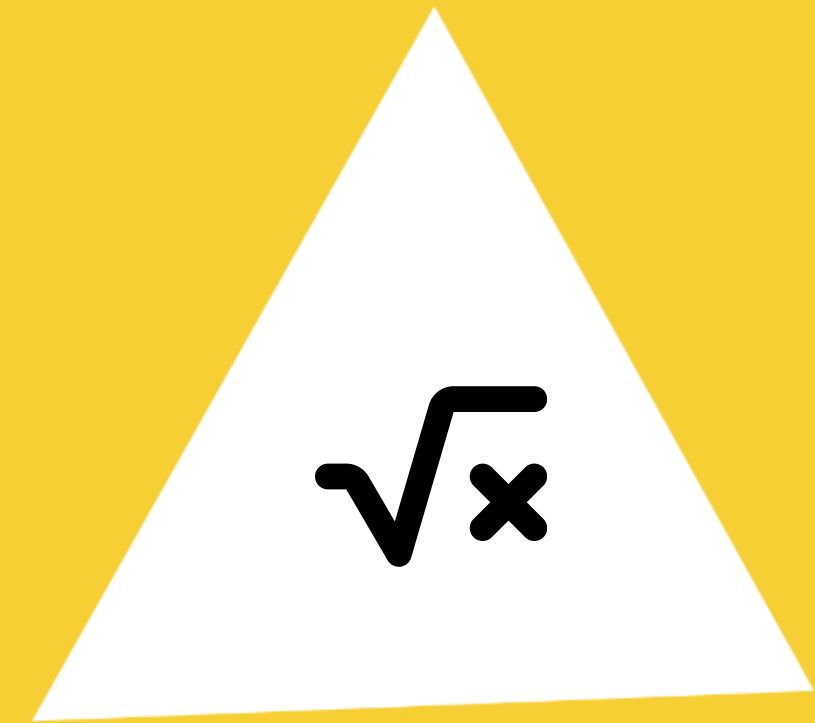
Дробь остаётся той же

Умножение числителя и знаменателя на одно и то же ненулевое выражение не меняет значение дроби, как умножение на 1.



Удобная форма

Такой приём помогает переписать выражение в более удобном виде, например для разложения на множители и дальнейшего сокращения.



Важно условие

Если выражение в скобках не равно нулю, его можно использовать как общий множитель без изменения результата.

Основное свойство алгебраической дроби

1

Умножение на одно и то же

Основное свойство говорит, что дробь не изменится, если умножить числитель и знаменатель на одно и то же ненулевое выражение.

2

Деление на общий множитель

Ту же дробь можно разделить на общий ненулевой множитель, если он присутствует и в числителе, и в знаменателе.

3

Обязательное условие

Любое такое преобразование допустимо только тогда, когда выбранное выражение определено и не обращается в ноль.

Следствие: сокращение общих множителей

1

Найти общий множитель

Сначала ищут общий множитель в обеих частях дроби, а затем выделяют его как единое целое, не разбивая на отдельные слагаемые.

2

Сократить правильно

После этого общий множитель сокращают, и дробь становится короче и удобнее для дальнейших преобразований.

3

Показательный пример

Например, в дроби $(3x)/(6x)$ общий множитель — x , поэтому после сокращения остаётся $\frac{1}{2}$ при $x \neq 0$.

Когда сокращать нельзя

Шаг 1. Найти ограничения

Сначала определяют ОДЗ и записывают все значения переменной, при которых знаменатель не равен нулю.

Шаг 2. Проверить множитель

Затем проверяют, не превращается ли предполагаемый множитель в ноль при запрещённом значении.

Шаг 3. Сохранить условие

После сокращения ещё раз сверяют результат с ОДЗ, чтобы не потерять важное ограничение.

1

**и то же ненулевое выражение
можно умножать на обе части
дроби без изменения её значения.**

При умножении числителя и знаменателя
на одно и то же выражение дробь
сохраняет значение.

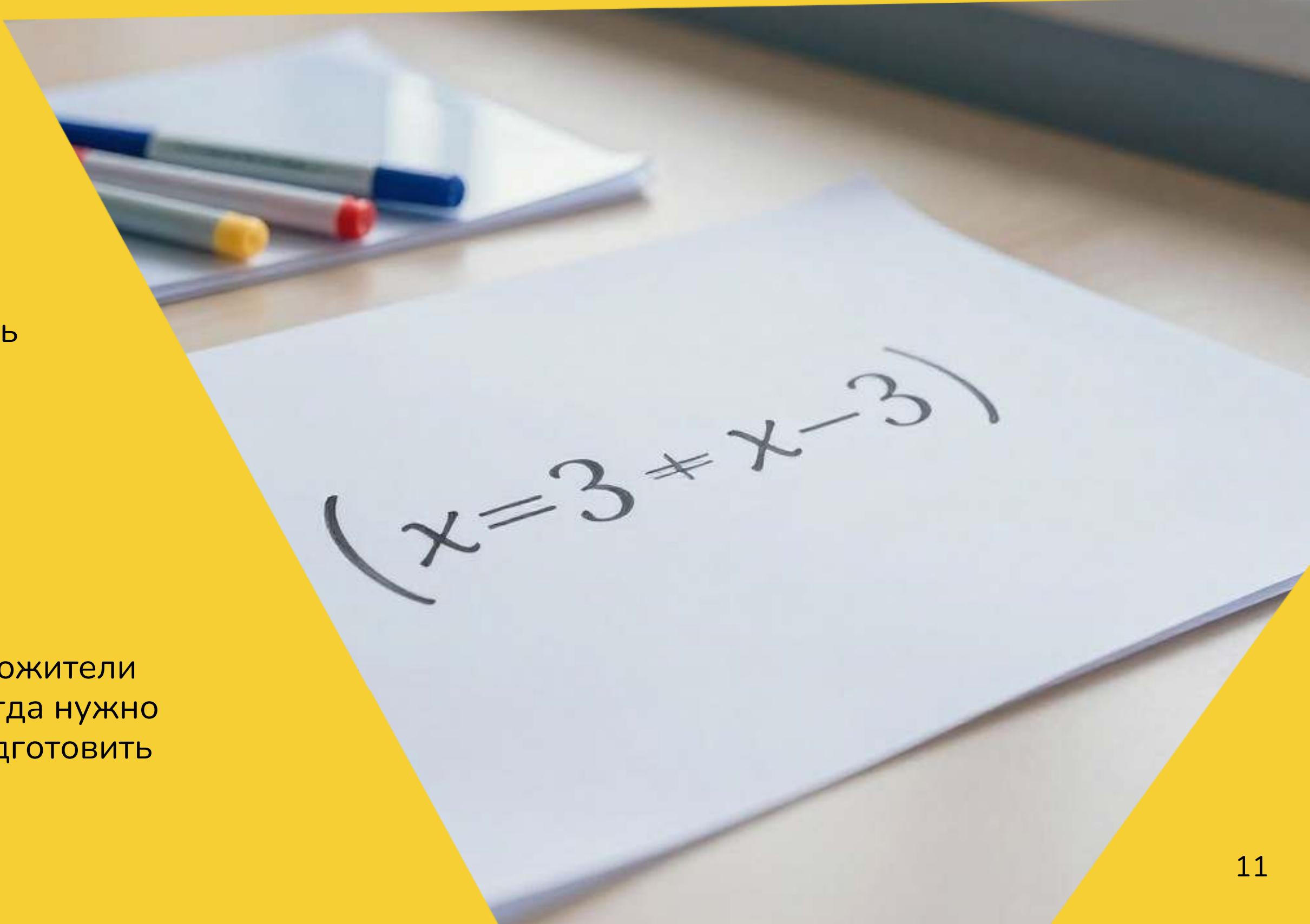
Пример 1: умножение на тождественный множитель

Тождественный множитель

Смысл приёма в том, что мы умножаем дробь на выражение вида $\frac{(x-3)}{(x-3)}$, то есть на единицу. Значение дроби не меняется, а запись становится удобнее для преобразований.

Зачем это нужно

После умножения получаем одинаковые множители в числителе и знаменателе. Это полезно, когда нужно привести выражения к общему виду или подготовить дробь к дальнейшему сокращению.


$$\frac{(x-3)}{(x-3)}$$

Пример 2: сокращение после разложения

1

Разложение на множители

Сначала разлагаем числитель: $(x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3))$. Так становится видно, что в дроби появляется общий множитель, который можно сократить.

2

Сокращение

Затем сокращаем общий множитель $((x - 3))$, но помним об ограничении $(x \neq 3)$. Именно это значение делает исходную дробь несуществующей.

3

Итог с ОДЗ

После сокращения остаётся $(x + 3)$, однако ответ обязательно записывают вместе с ОДЗ. Это показывает, при каких значениях переменной преобразование корректно.



Пример 3: дробь после факторизации

1

Находим множитель

Выносим общий множитель из числителя: $\frac{2x+4}{x+2}$. Такая запись сразу показывает, что в дроби есть одинаковый множитель вверху и внизу.

2

Проверяем условие

Подставляем разложение в дробь: $\frac{2(x+2)}{x+2}$. Теперь видно, что можно сократить $(x+2)$, но только при $x \neq -2$.

3

Получаем ответ

После сокращения получаем число 2. Это хороший пример того, как факторизация помогает быстро упростить алгебраическую дробь без лишних вычислений.

Пример 4: несколько шагов

Находим ОДЗ

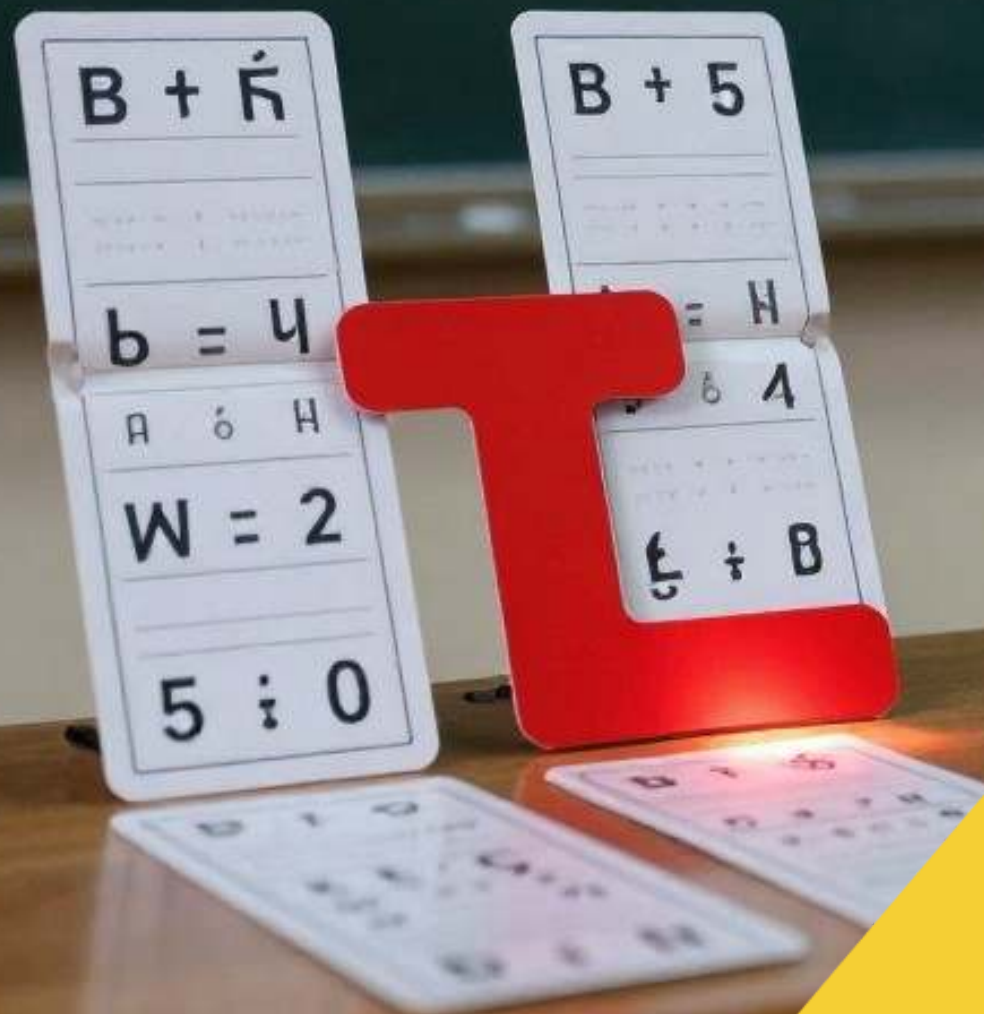
Сначала ищем ограничения: знаменатель $(x^2 - 2x)$ равен нулю при $(x=0)$ и $(x=2)$. Эти значения сразу записываем как запретные.

Раскладываем выражения

Затем раскладываем числитель и знаменатель: $(x^2 - 4 = (x-2)(x+2))$, $(x^2 - 2x = x(x-2))$. Общий множитель становится заметным.

Записываем результат

Сокращаем $(x-2)$ и получаем $((x+2)/x)$. Итог обязательно сопровождаем условиями $(x \neq 0)$ и $(x \neq 2)$, чтобы не потерять исходный смысл.



Как выбрать множитель для умножения

1

Общий множитель

Начинайте с чисел и букв: ищите общий множитель во всех слагаемых. Если он есть, вынесите его за скобки, чтобы сделать дробь короче и понятнее.

2

Разность квадратов

Полезно узнавать разность квадратов: $(a^2 - b^2 = (a - b)(a + b))$. Такие выражения часто встречаются в числителе и быстро превращаются в удобную форму.

3

Сделать множители видимыми

Старайтесь записывать выражение так, чтобы одинаковые множители были видны сразу. Тогда сокращение становится безопасным и не требует догадок или лишних действий.

4

Проверка знаменателя

После каждого преобразования проверяйте знаменатель. Если он может обратиться в ноль, значит, нужно сохранить соответствующее ограничение и не терять его в ответе.

Типовые ошибки при упрощении

Сокращение по частям

Нельзя сокращать только часть суммы. Например, $\sqrt{(x+2)/x}$ не превращается в $\sqrt{1+2/x}$; сокращение возможно лишь для целого множителя, а не для отдельных слагаемых.

Потеря ОДЗ

Часто забывают про ОДЗ и получают верный ответ с неверными условиями. Но если знаменатель обращается в ноль, исходная дробь вообще не определена.

Сокращение на ноль

Опасно сокращать на выражение, которое может быть равно нулю. Даже если оно потом исчезает, ограничение на переменную должно оставаться в записи.

Ошибки в скобках

Ещё одна ошибка — неверно переписывать выражение после факторизации. Перед сокращением нужно точно проверить скобки и убедиться, что множители действительно одинаковые.



Проверь себя: короткие задания

1 Задание 1

Для $\frac{x^2-1}{x-1}$ сначала запишите ОДЗ: $x \neq 1$. Затем разложите числитель как разность квадратов и найдите общий множитель.

2 Задание 2

Для $\frac{2x+6}{x+3}$ вынесите 2 за скобки в числителе. После этого станет видно, что можно сократить общий множитель.

3 Задание 3

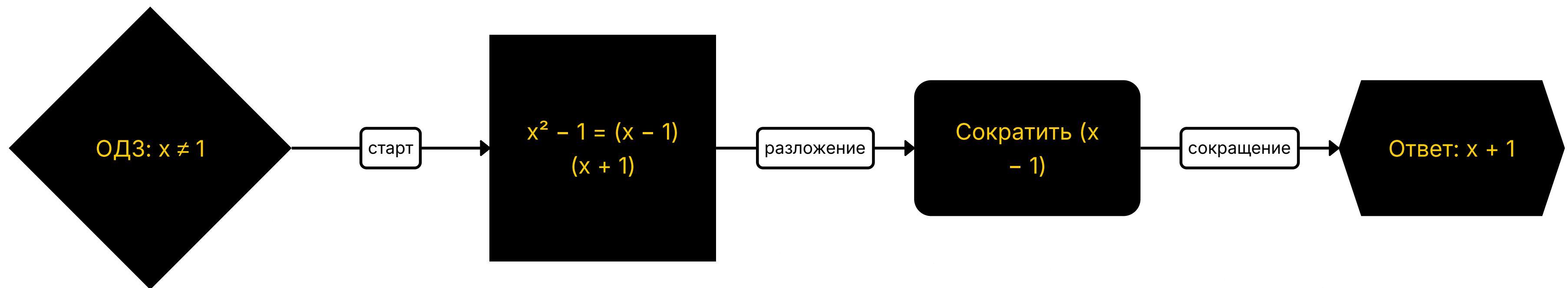
Для $\frac{a^2-ab}{a}$ сначала отметьте, что $a \neq 0$. Потом вынесите a в числителе и сократите его как общий множитель.

4 Проверьте результат

Сравните свои ответы с условиями. Если сокращение выполнено правильно, итоговая дробь станет короче, но ограничения на переменную обязательно сохранятся.

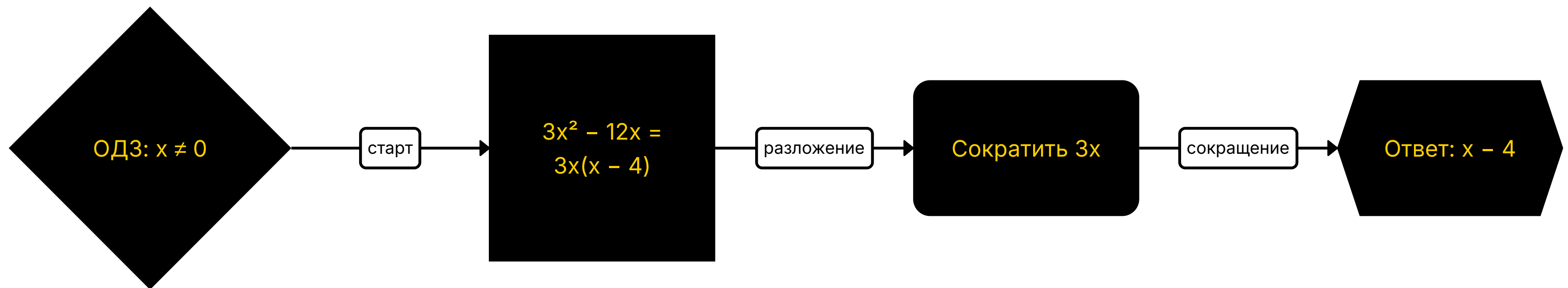
Пошаговое решение: первая дробь

Разложение числителя и сокращение общего множителя при сохранении ограничения $x \neq 1$.



Пошаговое решение: вторая дробь

Факторизация числителя и сокращение общего множителя $3x$ при сохранении условия $x \neq 0$.



Главный вывод

Основное свойство алгебраической дроби помогает превращать сложную запись в более удобную, если действовать аккуратно. Всегда начинайте с ОДЗ, затем раскладывайте на множители, сокращайте общие части и проверяйте ответ.