

Многоугольники: сумма углов, правильность и связь с окружностью

Сумма углов, правильные фигуры
и окружность: учимся видеть связи.





Многоугольники вокруг нас

Плитка, знаки, чертежи и узоры показывают, что свойства многоугольников нужны не только в задачах, но и в повседневной жизни: они помогают находить углы, проверять фигуры и вычислять площади.



Что называют многоугольником



Замкнутая ломаная

Многоугольник образован замкнутой ломаной из трёх и более звеньев. Его стороны соединяются последовательно, образуя фигуру с чётко выделенными вершинами и внутренней областью.



Основные элементы

У многоугольника выделяют стороны, вершины, внутренние углы и диагонали. Эти элементы позволяют описывать фигуру точно и применять к ней геометрические формулы.



Выпуклая фигура

Выпуклым называют многоугольник, у которого каждый внутренний угол меньше 180° , а любая диагональ лежит внутри фигуры. Именно для таких фигур используют основную формулу суммы углов.



Связь с вычислениями

Если известны стороны, углы или диагонали, можно проверить свойства фигуры и найти неизвестные величины. Поэтому понятие многоугольника служит основой для многих задач школьной геометрии.



Почему это важно

Понимание строения многоугольника помогает не путать разные типы фигур и уверенно переходить к изучению правильных многоугольников, внешних углов и связи с окружностью.

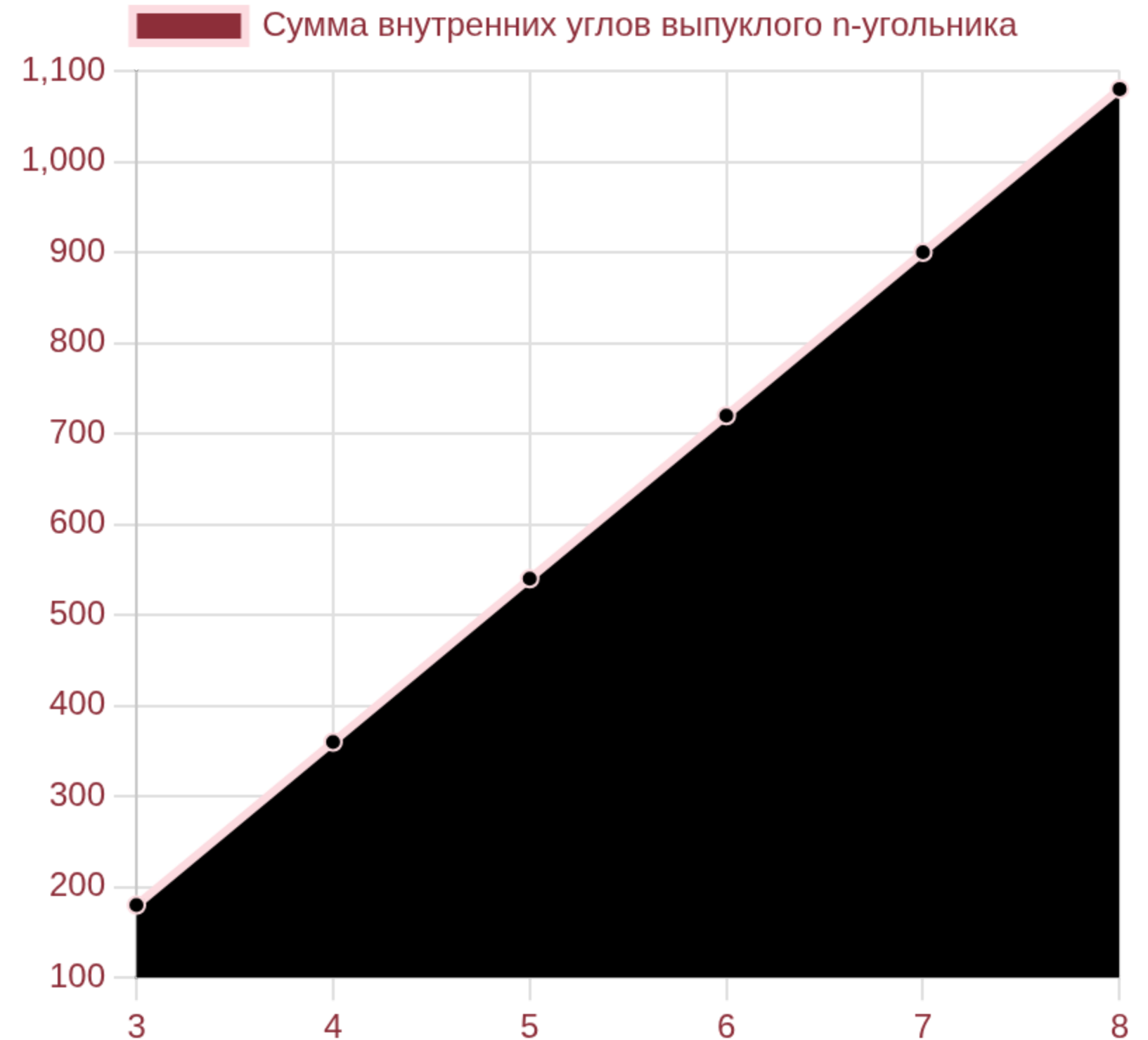
Как меняется сумма внутренних углов при увеличении числа сторон



Каждая новая сторона добавляет к сумме внутренних углов ещё один треугольник.

Рост на 180° при каждом увеличении числа сторон помогает быстро проверять ответы и замечать ошибки.

Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника: $(n-2) \cdot 180^\circ$.





Формула показывает, как число сторон влияет на сумму внутренних углов: чем больше сторон, тем больше сумма. Она особенно удобна при проверке и нахождении неизвестного угла.

Школьная формула суммы внутренних углов выпуклого многоугольника.

$$(n-2) \cdot 180^\circ$$

— это сумма внутренних углов выпуклого n -угольника.

Внешние углы многоугольника

1

Как образуется угол

Внешний угол получается, если продолжить одну из сторон многоугольника. Он примыкает к внутреннему углу и вместе с ним образует развернутый угол.

2

Сумма внешних углов

Для любого выпуклого многоугольника сумма всех внешних углов всегда равна 360° . Это правило не зависит от числа сторон и удобно для быстрой проверки вычислений.

3

Правильная фигура

Если многоугольник правильный, все его внешние углы равны между собой. Тогда каждый из них равен $360^\circ/n$, где n – число сторон фигуры.

4

Примеры

У правильного шестиугольника внешний угол равен 60° , а у квадрата – 90° . Такие значения легко запомнить и использовать в решениях без лишних вычислений.



Сравнение суммы внутренних углов и угла правильного многоугольника

n	Сумма	Один угол
3	180°	60°
4	360°	90°
5	540°	108°
6	720°	120°
8	1080°	135°

Таблица показывает, как связаны число сторон, сумма углов и один внутренний угол правильной фигуры.

Чем больше сторон у правильного многоугольника, тем больше его внутренний угол.

Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника и формула для правильного n-угольника.

Правильные многоугольники и их признаки



Равные стороны

У правильного многоугольника все стороны одинаковой длины. Это первый признак, по которому можно отличить его от обычной многоугольной фигуры.



Связь с окружностью

Вершины правильного многоугольника лежат на одной окружности. Благодаря этому фигуру удобно строить и изучать через центр, радиусы и симметрию.



Равные углы

Все внутренние углы правильного многоугольника тоже равны. Именно сочетание двух условий делает фигуру правильной, а не только похожей на симметричную.



Симметрия

У правильных фигур есть оси симметрии, а у некоторых — и центр симметрии. Поэтому они часто используются в орнаментах, узорах и геометрических построениях.

Правильные многоугольники в окружающем мире



Плитка и клетки

Квадраты часто встречаются в плитке и в клетках тетради: они без промежутков заполняют плоскость. Такая форма удобна там, где важны порядок, точность и повторяемость рисунка.



Соты и плотная укладка

Шестиугольники можно увидеть в пчелиных сотах. Эта форма позволяет располагать одинаковые ячейки плотно, с минимальными пустотами, и при этом сохранять прочную структуру.

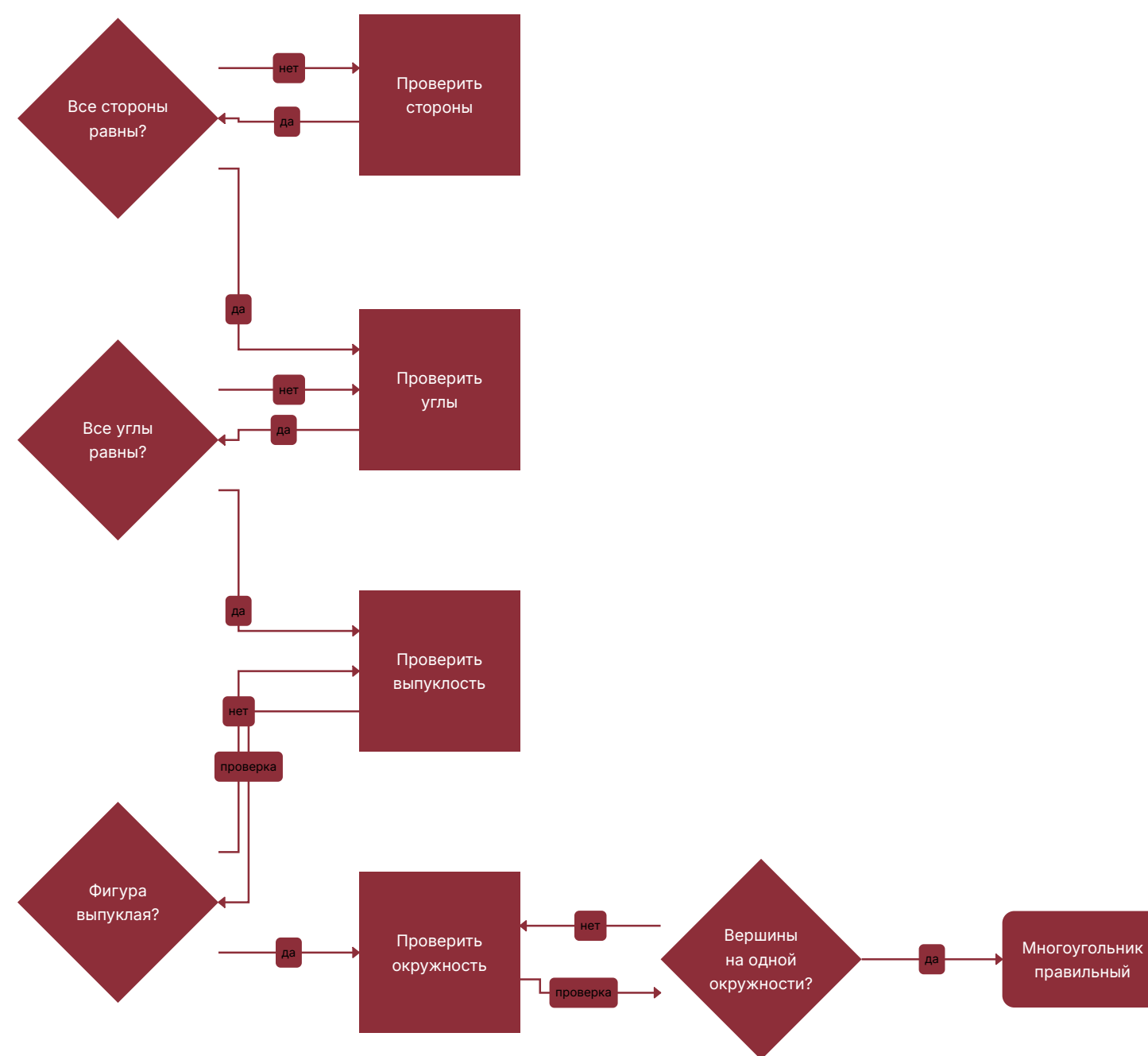


Знаки и орнаменты

Правильные многоугольники часто используют в дорожных знаках, декоративных орнаментах и чертежах. Их симметрия делает изображения ясными, заметными и удобными для построения.

Как проверить, что многоугольник правильный

Последовательность проверки основана на равенстве сторон, равенстве углов и связи фигуры с окружностью.



Вписанный многоугольник

1

Все вершины на окружности

Вписанным называют многоугольник, у которого каждая вершина лежит на одной окружности. Такая окружность называется описанной около многоугольника и проходит через все его вершины.

2

Радиусы равны

Если соединить центр окружности с вершинами, получатся равные отрезки — радиусы. Поэтому все вершины вписанного многоугольника находятся на одинаковом расстоянии от центра.

3

Связь с правильной фигурой

У правильного многоугольника центр описанной окружности совпадает с центром фигуры. Это делает построение особенно удобным: все вершины располагаются симметрично относительно центра.

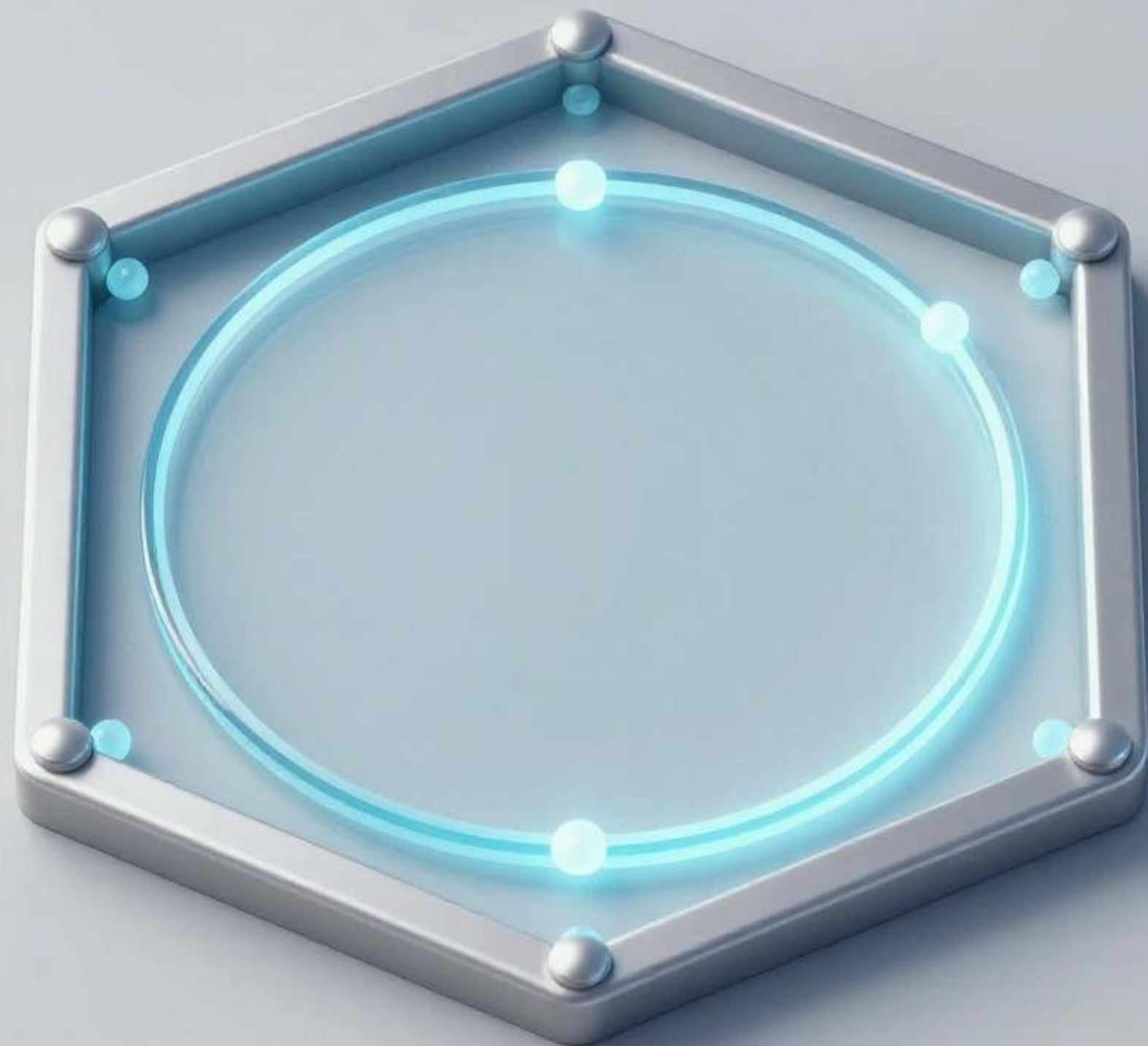
4

Зачем это важно

Признак вписанности помогает находить неизвестные элементы фигуры, проверять построения и использовать свойства окружности при решении задач



Описанный многоугольник



- 1 Касание сторон**
Описанным называют многоугольник, у которого каждая сторона касается одной и той же окружности. Такая окружность находится внутри фигуры и называется вписанной в многоугольник.
- 2 Равные расстояния**
У правильного многоугольника центр одинаково удалён от всех сторон. Это расстояние называют апофемой; оно измеряется по перпендикуляру от центра к стороне.

- 3 Связь с площадью**
Апофема удобна не только в построении, но и в вычислениях. Вместе с периметром она позволяет быстро находить площадь правильного многоугольника без разбиения на части.
- 4 Полезное свойство**

Если известны центр и апофема, можно определить положение сторон и проверить, действительно ли фигура описана около окружности. Это упрощает чертежи и задачи на построение.

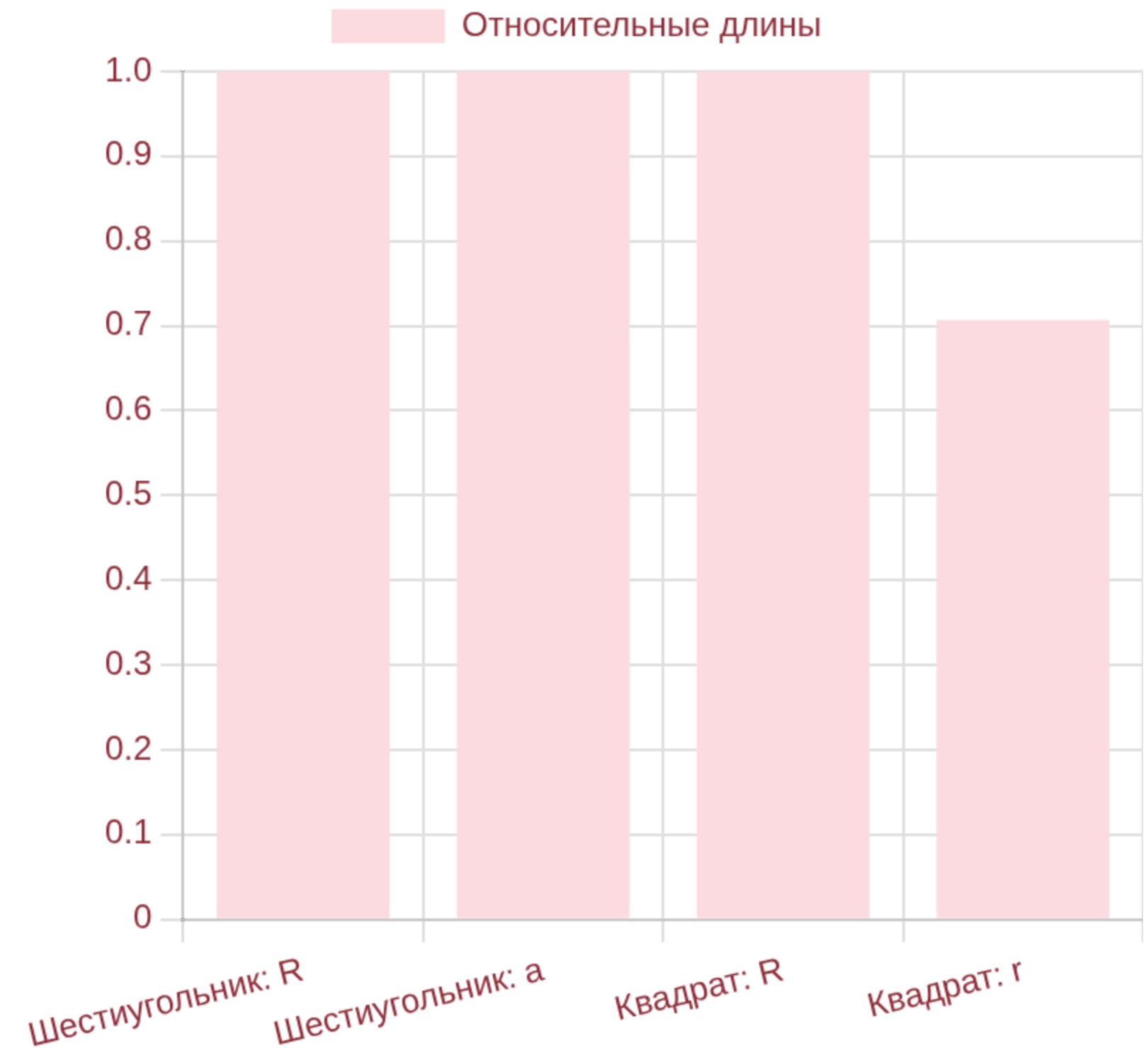
Радиус, апофема и сторона правильного многоугольника



Сравнение показывает, что для квадрата апофема заметно меньше радиуса, а у правильного шестиугольника радиус равен стороне.

У правильных многоугольников связь между радиусом, апофемой и стороной зависит от числа сторон; поэтому одни и те же величины соотносятся по-разному.

Учебные свойства правильных многоугольников; соотношения для квадрата и правильного шестиугольника



Площадь правильного многоугольника

1

Основная формула

Площадь правильного многоугольника находят по формуле $S = P \cdot r / 2$, где P — периметр, а r — апофема. Она особенно удобна для фигур с центром симметрии.

2

Откуда берётся формула

Фигуру можно разделить на равные треугольники с общей вершиной в центре. Сумма площадей всех этих треугольников и даёт площадь всего многоугольника.

3

Порядок вычислений

Сначала находят периметр, если известна сторона и число сторон. Затем подставляют периметр и апофему в формулу. Так решение получается коротким

4

Пример расчёта

Если у правильного шестиугольника периметр равен 36 см, а апофема — 5 см, то площадь равна $36 \cdot 5 / 2 = 90 \text{ см}^2$.



Формулы площади для часто встречающихся правильных многоугольников

Фигура	Формула	Примечание
Квадрат	$S = a^2$	Самая простая
Треугольник	$S = a^2 \sqrt{3}/4$	Равносторонний
Шестиугольник	$S = 3\sqrt{3}a^2/2$	Из 6 треугольников

Стандартные формулы площадей правильных многоугольников

Таблица показывает, как меняется формула площади в зависимости от вида правильного многоугольника.

Чем больше сторон у правильной фигуры, тем сильнее меняется выражение для площади; при этом все формулы связаны с одинаковой идеей разбиения на равные части.

Как находят площадь описанного многоугольника

2. Измерить радиус

Затем берут радиус вписанной окружности, то есть расстояние от центра до стороны.
Для правильной фигуры это же расстояние называют апофемой.

1. Найти периметр

Сначала определяют периметр многоугольника: складывают все стороны или умножают длину стороны на число сторон, если фигура правильная.

3. Подставить в формулу

После этого используют формулу $S = P \cdot r / 2$. Например, при $P = 40$ см и $r = 3$ см площадь равна 60 см².

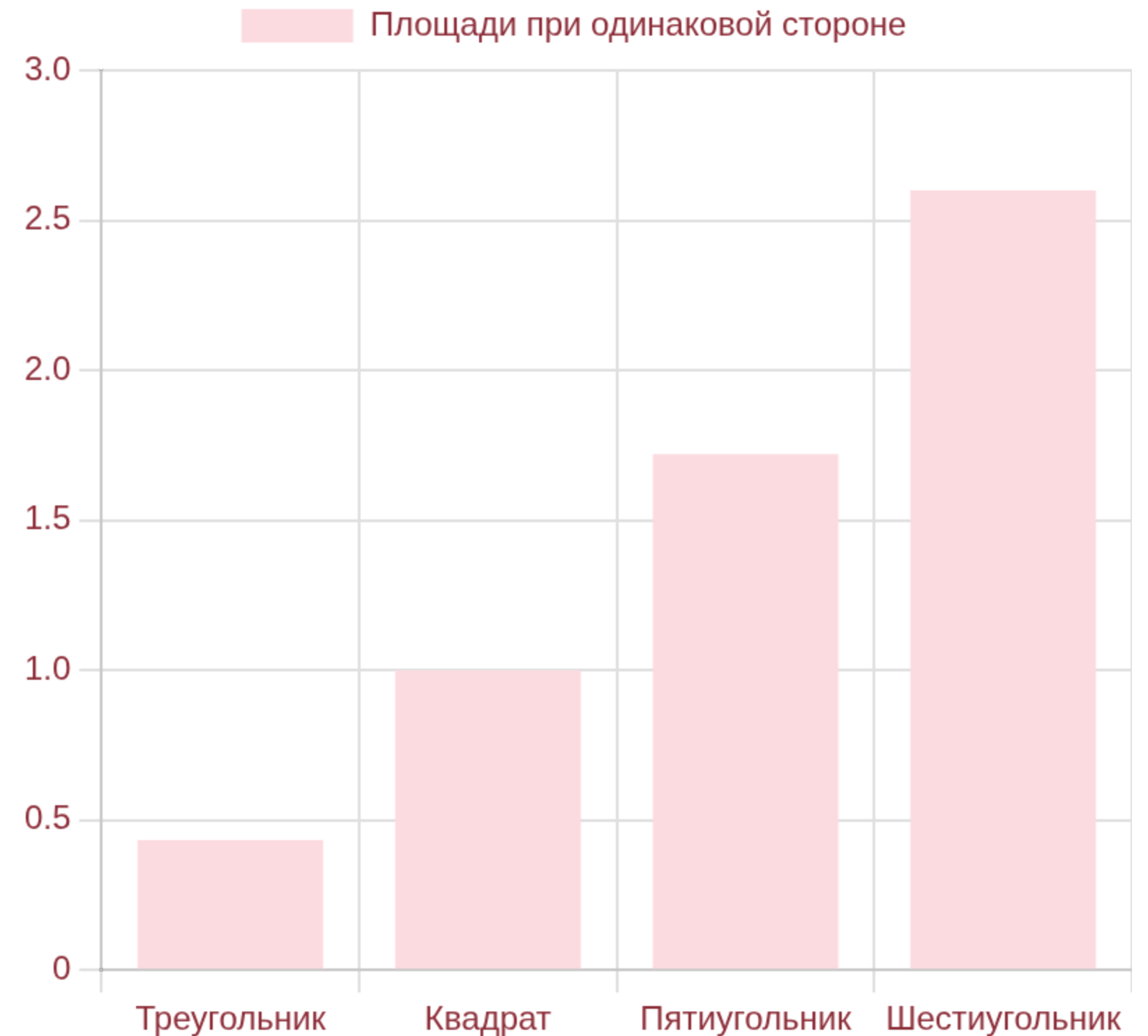
Как изменяется площадь правильных многоугольников при одинаковой стороне



Для одинаковой стороны рост площади связан с увеличением числа сторон и более плотным приближением фигуры к кругу.

Чем больше сторон у правильного многоугольника, тем больше его площадь при одной и той же стороне; шестиугольник оказывается самым вместительным из приведённых фигур.

Стандартные формулы площадей правильных многоугольников при стороне $a = 1$



Типичные ошибки при решении задач

♥ Путают две суммы

Часто смешивают сумму внутренних углов с суммой внешних углов. Нужно помнить: для выпуклого многоугольника внешние углы в сумме дают 360° , а внутренние считаются по другой формуле.

♥ Неверно выбирают формулу

Формулу $(n-2) \cdot 180^\circ$ применяют только к выпуклым многоугольникам. Если фигура невыпуклая, такое правило уже не работает, и ответ получится неверным.

♥ Смешивают окружности

Нередко путают вписанную и описанную окружности. У вписанного многоугольника вершины лежат на окружности, а у описанного окружность касается его сторон.

♥ Забывают про периметр

В формуле $S = P \cdot r / 2$ обязательно нужен периметр. Если подставить только сторону или число сторон, площадь вычислить нельзя.

♥ Не проверяют условия

Правильный многоугольник должен иметь равные стороны и равные углы. Если верно только одно из этих условий, фигуру нельзя считать правильной.



Задание	Ответ
$n = 6$	720°
Правильный восьмиугольник	135°
$P = 48, r = 5$	120 см^2
$a = 7$, квадрат	49 см^2

Мини-практикум с готовыми ответами

Короткие задания помогают быстро проверить основные формулы и свойства многоугольников.

Все ответы получаются прямой подстановкой формул: для углов – по числу сторон, для площади – через периметр, апофему или сторону.

Формулы суммы углов и площади правильных многоугольников



Главные выводы по теме

Мы связали три важные идеи: углы многоугольника, его правильность и связь с окружностью. Эти свойства позволяют уверенно находить неизвестные элементы и быстро вычислять площадь.