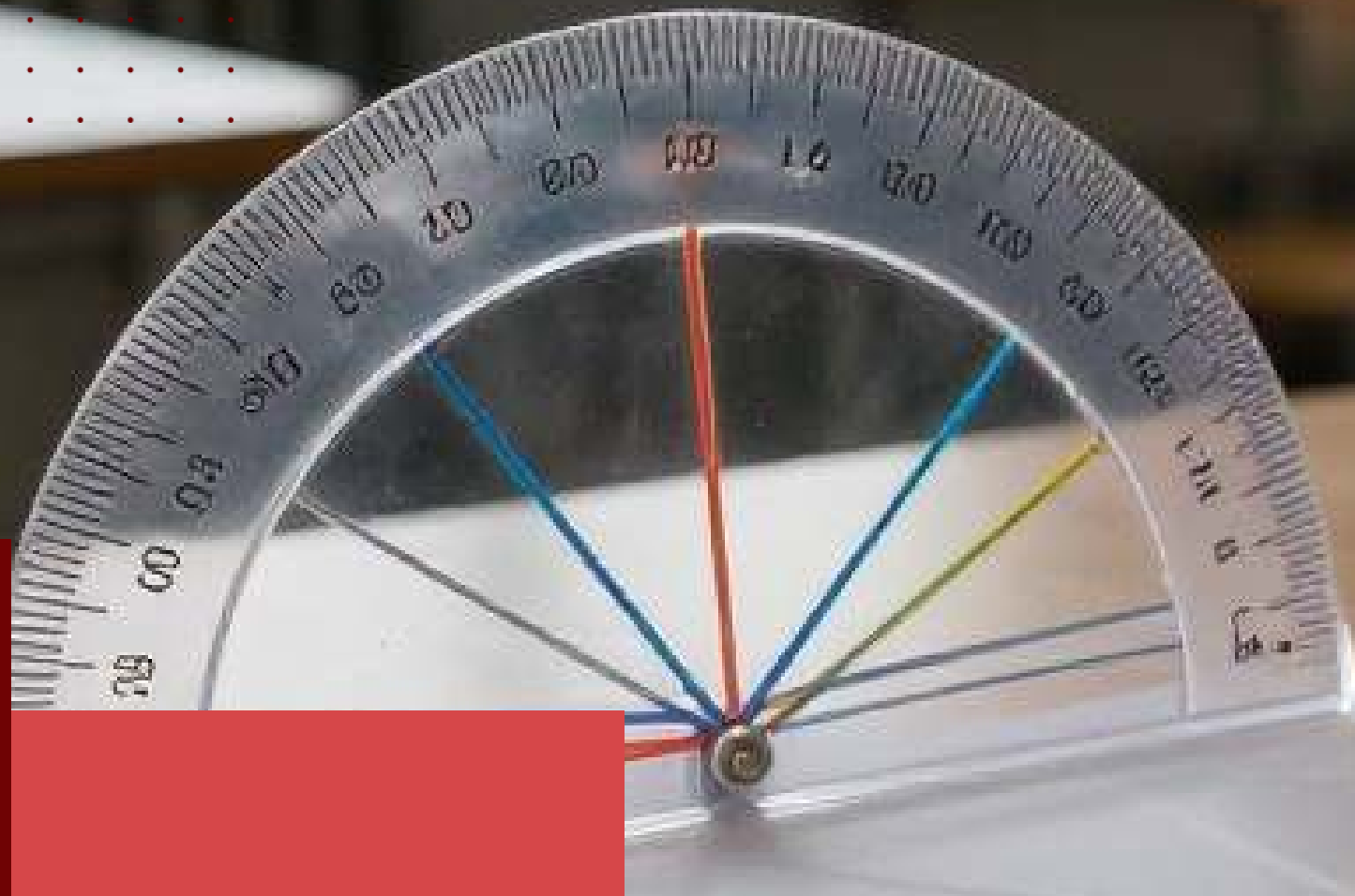


Формулы приведения: как быстро находить значения тригонометрических функций

Они сводят углы $90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$, $360^\circ \pm \alpha$ к опорному α без вычислений.



Место формул приведения в курсе геометрии 10 класса

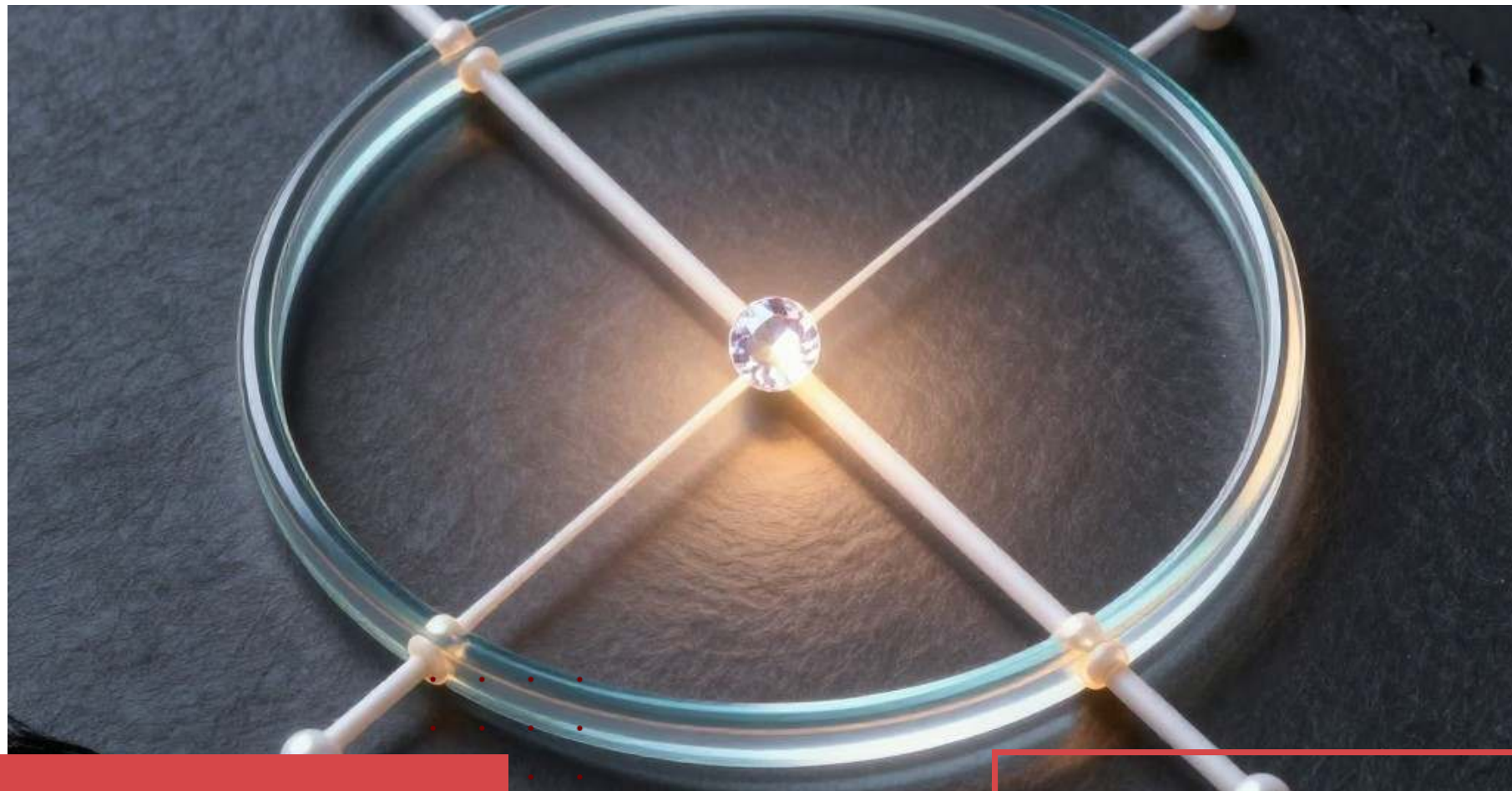
После знакомства с $\sin$, $\cos$, tg и ctg на единичной окружности формулы приведения помогают работать с тупыми и «почти прямыми» углами. Так 120° , 150° , 210° , 330° превращаются в вычисляемые через острый угол α . Далее это база для уравнений, преобразований и графиков.



Единичная окружность как основа формул приведения

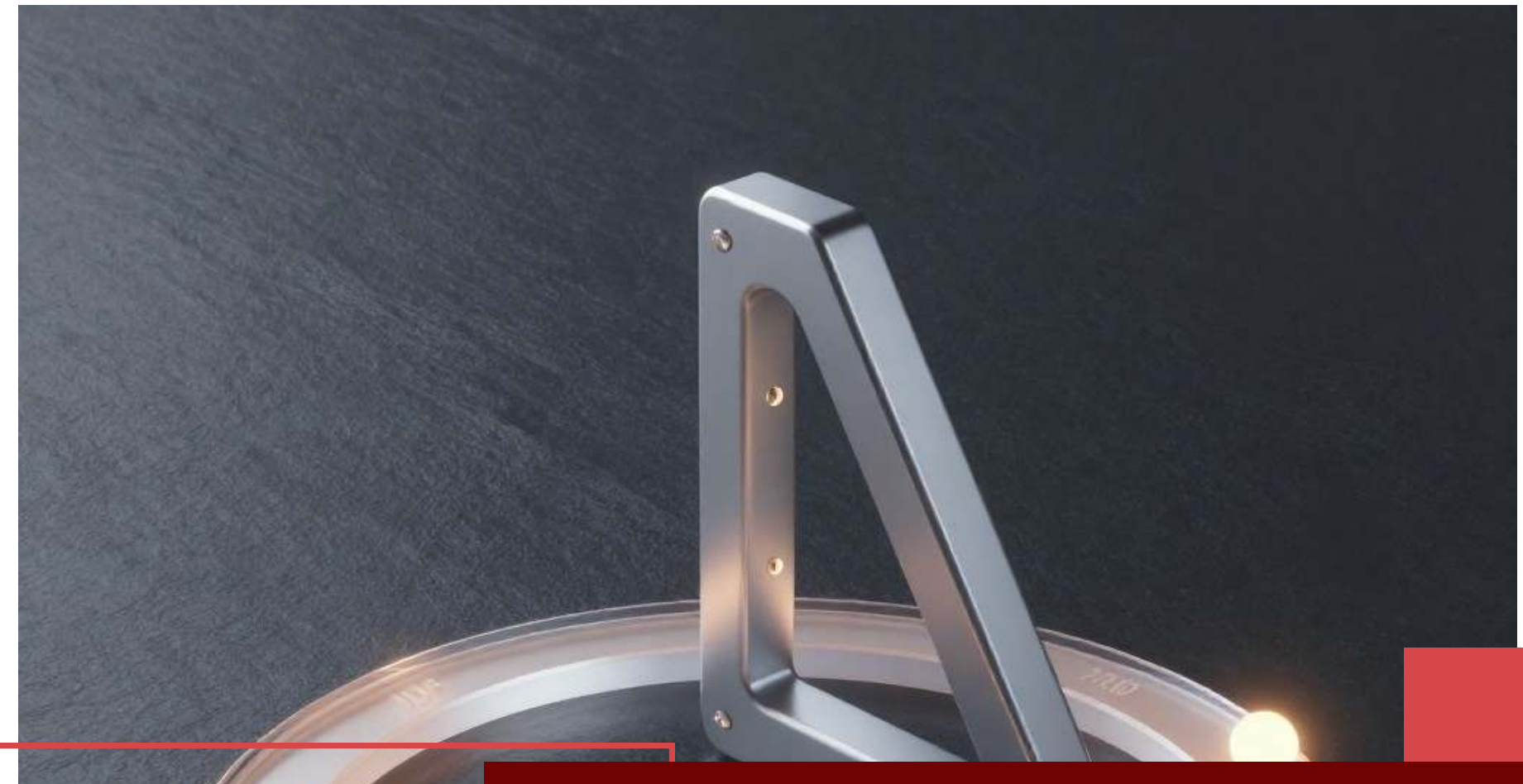
Координаты точки: $\sin$ и $\cos$ «живут» на окружности

На единичной окружности точка задаётся координатами $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Стоит повернуть радиус, и вместе с ним меняются и координаты, и знаки. Именно поэтому один и тот же опорный угол помогает восстановить значения функций для других углов.

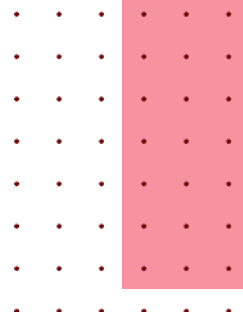


Повороты на 90° , 180° , 270° и 360° задают смену знаков

Поворот на 90° меняет роли осей: синус начинает соответствовать тому, что раньше определялось косинусом. Повороты на 180° переворачивают знак, а полный оборот возвращает структуру значений с учётом периодичности. На рисунке это видно по точкам в четырёх четвертях.



Знаки тригонометрических функций по четвертям

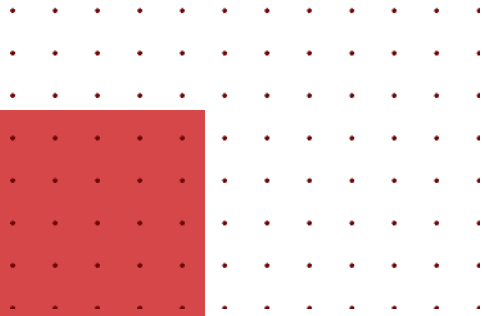


Знак $\sin$, $\cos$, tg и ctg зависит от того, в какой четверти оказывается конечная сторона угла. tg и ctg определяются отношением $\sin$ и $\cos$, поэтому их знаки согласуются с этой парой.

Правило простое: сначала определяйте четверть конечного положения угла — и только потом записывайте знаки для $\sin$ и $\cos$, а tg и ctg получают их из дроби.

Четверть	$\sin$	$\cos$	$\operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

Единичная окружность и определение $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$



Общий принцип формул приведения

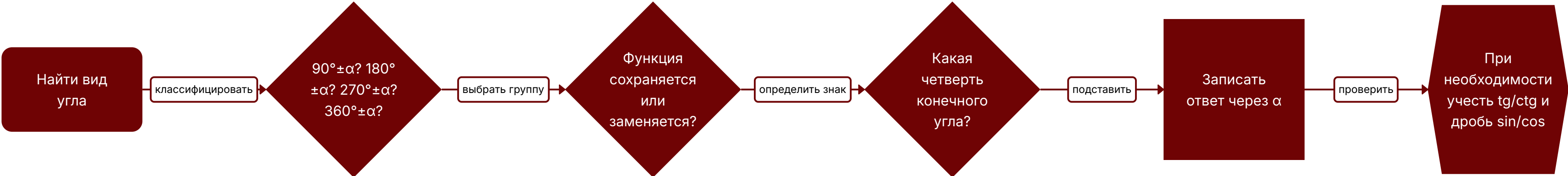
Любой угол из «неудобных» групп сначала сводят к острому опорному углу α , где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Это помогает заменить неизвестные значения на табличные через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

Для углов $90^\circ \pm \alpha$ и $270^\circ \pm \alpha$ происходит взаимная перестановка $\sin$ и $\cos$, а также меняются местами tg и ctg . Для углов $180^\circ \pm \alpha$ и $360^\circ \pm \alpha$ обычно сохраняется тип функции, но меняется знак.

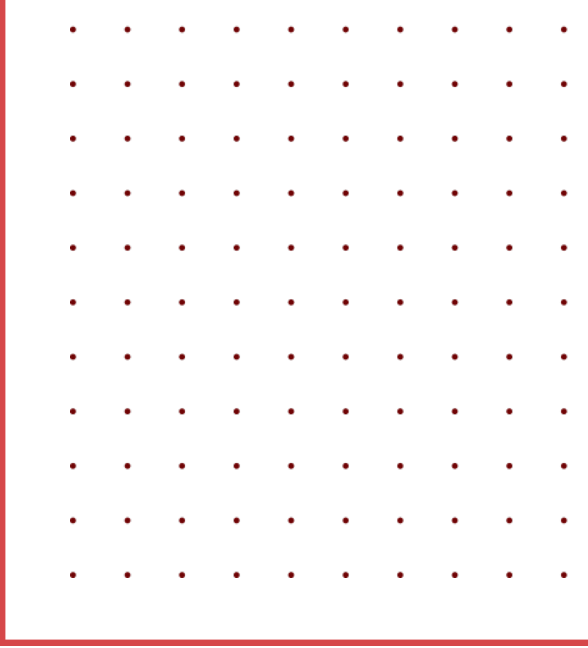
Тангенс и котангенс нужно контролировать особенно внимательно: $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ и $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$. Их знак определяется знаками числителя и знаменателя, то есть $\sin$ и $\cos$ в выбранной четверти.

Алгоритм применения формул приведения

Логика выбора формулы опирается на вид угла ($90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$, $360^\circ \pm \alpha$), затем — на четверть конечной стороны угла.



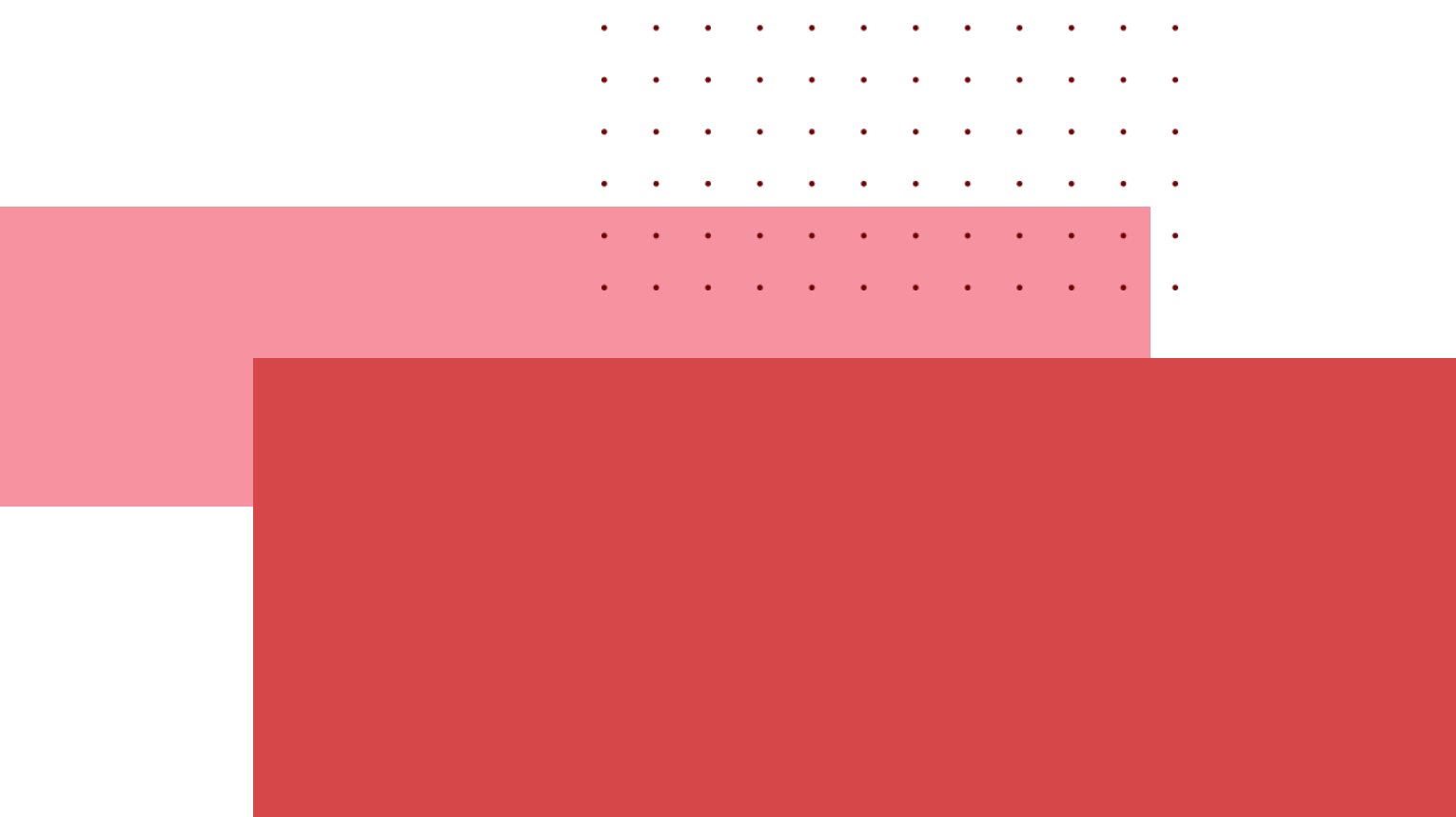
Формулы для углов вида $90^\circ \pm \alpha$



Для углов рядом с 90° меняются местами $\sin$ и $\cos$: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. Точно так же тангенс и котангенс меняются местами: $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

Если угол имеет вид $90^\circ + \alpha$, то он оказывается во II четверти. Поэтому $\sin$ сохраняет положительный знак, а $\cos$, tg и ctg меняют знак относительно значений при остром α .

Эти соотношения удобны, когда в задачах встречаются 30° , 45° , 60° и их «приближённые к 90° » аналоги. Тогда ответ получается через стандартные значения $\sin$ и $\cos$ без калькулятора.



Основные формулы приведения в одной таблице

Тип угла	Что меняется	Знак
$90^\circ - \alpha$	$\sin \leftrightarrow \cos; \operatorname{tg} \leftrightarrow \operatorname{ctg}$	по конечной четверти
$90^\circ + \alpha$	$\sin \leftrightarrow \cos; \operatorname{tg} \leftrightarrow \operatorname{ctg}$	$\sin +, \cos -$ (для II)
$180^\circ \pm \alpha$	вид функции сохраняется	меняется знак при переходе через 180°
$270^\circ \pm \alpha$	$\sin \leftrightarrow \cos; \operatorname{tg} \leftrightarrow \operatorname{ctg}$	знак определяется IV/III четвертью
$360^\circ \pm \alpha$	вид функции сохраняется	с учётом полного оборота

Единичная окружность, знаки по четвертям и периодичность функций



Сводная таблица помогает быстро выбрать нужное преобразование для углов четырёх типов. Для 90° и 270° происходит обмен $\sin \leftrightarrow \cos$ и $\operatorname{tg} \leftrightarrow \operatorname{ctg}$; для 180° и 360° чаще сохраняется вид функции, но меняется знак по четвертям.

Если вы правильно выделили α и определили группу углов, дальше остаётся только проверить четверть и проставить знаки, особенно для tg и ctg .



Формулы для углов вида $180^\circ \pm \alpha$

Для углов рядом с 180° сохраняется вид функции: синус остаётся синусом, косинус — косинусом, тангенс — тангенсом. Меняется только знак в зависимости от того, «с какой стороны» находится конечная сторона угла.

Основные соотношения для $180^\circ - \alpha$ таковы: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$. Здесь знак «переключается» через отрицательный косинус или синус в знаменателе.

Для угла $180^\circ + \alpha$ знак меняется аналогично переходу к III четверти: если для $180^\circ - \alpha$ мы смотрим на расположение в II четверти, то теперь конечная сторона оказывается в III. Поэтому $\sin$ и $\cos$ берут отрицательные значения по четвертям.

Такие формулы особенно удобны, когда нужно вычислять значения в диапазоне $90^\circ - 270^\circ$. Один раз разобравшись с четвертью для $180^\circ - \alpha$ и $180^\circ + \alpha$, вы сможете быстро переносить ответы на родственные углы.

180°

**Этот сдвиг показывает, что
тангенс и котангенс
повторяются при повороте
на пол-оборота.**

Периодичность тригонометрических функций и знаки на единичной окружности

При $270^\circ \pm \alpha$ синус и косинус снова меняются местами, а знаки задаются IV и III четвертями. Для $360^\circ \pm \alpha$ вид функции сохраняется, но учитывается периодичность.

Почему tg и ctg требуют особого внимания



Зависят от дроби

Тангенс и котангенс — это отношение двух функций: $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ и $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$. Поэтому знак и существование зависят не от одной функции, а от обеих.



Где дробь «ломается»

Если знаменатель равен нулю, значение не определяется. Например, tg не определён при $x = 90^\circ + 180^\circ k$, а ctg не определён при $x = 180^\circ k$, где k — целое число.



Нужно проверять область

При преобразовании выражений формулы приведения обязательно сопровождаются контролем области определения. Иначе можно получить ответ, который противоречит условиям задачи или «забывает» запрещённые углы.

Геометрический смысл знаков на окружности

Знаки $\sin$ и $\cos$ связаны с полуплоскостями

На единичной окружности координаты точки равны $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, поэтому $\sin$ определяет, в какой полуплоскости находится точка по вертикали. Положительный $\sin$ относится к верхней полуплоскости, отрицательный — к нижней; это видно по направлению радиуса.

Почему tg и ctg согласуются с произведением

Аналогично, $\cos$ отвечает за положение по горизонтали: положительный $\cos$ соответствует правой полуплоскости, отрицательный — левой. Знаки tg и ctg согласуются с комбинацией знаков $\sin$ и $\cos$: где один множитель меняется, меняется и знак дроби.



Типичные ошибки при применении формул приведения

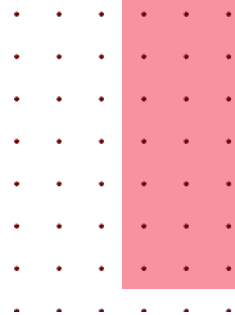
Очень часто путают углы $180^\circ - \alpha$ и $180^\circ + \alpha$. Из-за этого меняют знак неправильно: одна формула сохраняет $\sin$, а другая приводит к другому расположению по четверти, и ответ получается неверным.

Ошибки возникают и при неверном определении четверти. Углы вида 120° , 150° , 210° , 330° легко «сбить», если сразу не определить конечное положение радиуса на окружности в градусах.

Ещё одна распространённая ошибка — заменять $\sin$ на $\cos$ без учёта типа угла, то есть применять правила для $90^\circ \pm \alpha$ к случаям $180^\circ \pm \alpha$. Такая подмена ломает не только знак, но и сам смысл преобразования.

Для tg и ctg особенно важно помнить о точках неопределённости. Если в ходе преобразований «выпадает» знаменатель, значение должно быть исключено. В задачах с градусными мерами это проверяют до финальной записи.

Проверка формул на примерах

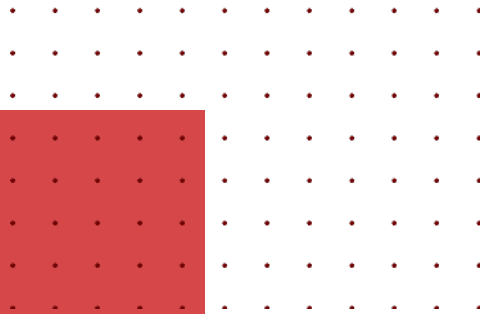


В таблице сопоставлены исходный угол, опорный угол и итоговое значение. По ним удобно тренировать выбор правильной формулы приведения и знака.

Одинаковые опорные углы 30° и 45° дают разные знаки и иногда разные типы функций, потому что меняется четверть конечной точки на единичной окружности.

Угол	Опорный α	Формула	Точное значение
150°	30°	$\sin(180^\circ - \alpha)$	$\sin 150^\circ = 1/2$
120°	60°	$\cos(180^\circ - \alpha)$	$\cos 120^\circ = -1/2$
135°	45°	$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)$	$\operatorname{tg} 135^\circ = -1$
330°	30°	$\sin(360^\circ - \alpha)$	$\sin 330^\circ = -1/2$
210°	30°	$\cos(180^\circ + \alpha)$	$\cos 210^\circ = -\sqrt{3}/2$

Собственные преобразования по формулам приведения и выбору опорных углов



Практическая польза формул приведения



Точные значения без вычислителя

Формулы приведения позволяют сводить «неудобные» углы к опорным 30° , 45° и 60° , где $\sin$, $\cos$, tg и ctg известны. Это ускоряет вычисления и снижает риск арифметических ошибок.



Быстрое упрощение выражений

При упрощении выражений важно превратить сумму углов в набор синусов и косинусов удобного вида. Приведение помогает привести всё к одним и тем же базовым значениям, а затем аккуратно сократить.



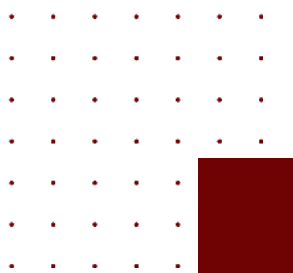
Контрольные и экзаменационные задания

В типичных задачах требуется получить ответ, используя преобразования без лишних вычислений. Умение выбирать правильную формулу по виду угла $90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ \pm \alpha$ и т. п. экономит время на проверке.



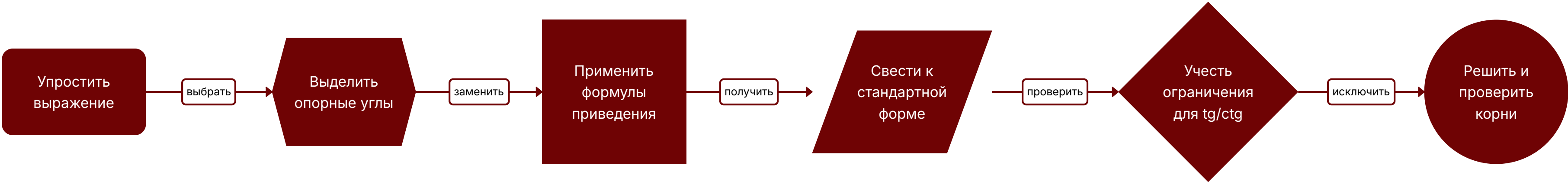
Связь углов и стандартных значений

Тема помогает видеть системность: углы вроде 120° , 135° , 150° , 210° , 225° и 330° связаны с базовыми значениями благодаря симметрии окружности. Это делает запоминание более осмысленным.



Решение уравнений с учётом формул приведения

Шаги алгоритма для преобразования тригонометрического уравнения



Связь формул приведения с периодичностью функций

Sin и cos: период 360°

Для sin и cos полный оборот возвращает точку в исходное положение. Поэтому значения повторяются при добавлении 360° без изменения знака.

Tg и ctg: период 180°

У тангенса и котангенса период меньше: поворот на 180° сохраняет отношение координат. В результате набор значений повторяется, но знаки учитываются по четверти.

Почему появляются одинаковые ответы у разных углов

Формулы приведения переводят углы в опорные, а периодичность объясняет совпадения значений. Так стандартные результаты появляются, например, у 30°, 150°, 210° и 330°.

Краткий справочник: что меняется в формулах

Группа углов	Что происходит	Sin/ Cos	Знаки tg/ctg
$90^\circ \pm \alpha$	Замена функций	$\sin \leftrightarrow \cos$	$\operatorname{tg} \leftrightarrow \operatorname{ctg}$, знак по четверти
$180^\circ \pm \alpha$	Сохранение типа	$\sin$ и $\cos$ меняются по знаку	tg и ctg меняют знак
$270^\circ \pm \alpha$	Замена функций	$\sin \leftrightarrow \cos$	$\operatorname{tg} \leftrightarrow \operatorname{ctg}$, знак по четверти
$360^\circ \pm \alpha$	Сохранение типа	$\sin$ и $\cos$ меняются по знаку	знак определяется положением точки

Правила приведения на основе единичной окружности и знаков по четвертям



Справочная таблица помогает быстро выбрать тип преобразования. Основной ориентир — вид угла и соответствующая четверть на единичной окружности.

Углы распадаются на четыре системных случая. Для каждого случая заранее известно, нужна ли замена $\sin$ и $\cos$, и как изменятся знаки у tg и ctg .



Значение формул приведения для дальнейшего изучения тригонометрии

Формулы приведения становятся «мостом» к более сложным преобразованиям: к формулам двойного угла, основному тождеству $\sin^2x + \cos^2x = 1$ и преобразованиям сумм и произведений. Без них упрощение часто теряет стройность.

В дальнейшем уверенность в формулах приведения заметно помогает при решении тригонометрических уравнений и при работе с графиками: вы заранее понимаете, какие значения повторяются и как меняется знак при переходе между четвертями.

Их систематическое применение тренирует выбор корректных замен и контроль знаков. Поэтому в задачах на упрощение выражений, вычисление значений и доказательство тождеств вы быстрее сводите всё к стандартным формам.

Формулы приведения — быстрый путь от любого угла к ответу

Формулы приведения связывают любой «неудобный» угол с острым опорным углом и помогают быстро определить значения тригонометрических функций. Основа — единичная окружность, знаки по четвертям и периодичность $\sin$, $\cos$, tg , ctg .