

Тангенс и котангенс: тригонометрические функции с периодом π

Тангенс и котангенс — базовые функции,
задающие связи углов и отношений сторон.



- Место тангенса и котангенса в курсе геометрии 10 класса



Тангенс и котангенс помогают решать задачи на прямоугольный треугольник, вычислять углы наклона прямых и разбирать тригонометрические уравнения. Их удобно изучать вместе с синусом и косинусом: $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$.



- Определение функции $y = \operatorname{tg} x$

Функция $\operatorname{tg} x$ определена только там, где $\cos x \neq 0$, то есть при $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Это сразу объясняет «пропуски» графика.

По формуле $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ значение тангенса — это отношение синуса к косинусу. График непрерывно ведёт себя между точками запрета, без разрывов внутри промежутка.

Нули $\operatorname{tg} x$ находятся в точках $x = \pi k$. При приближении к асимптотам функция стремится к $\pm\infty$, а весь рисунок повторяется через π , формируя бесконечно много ветвей.

- Определение функции $y = \operatorname{ctg} x$

Функция $\operatorname{ctg} x$ определена там, где $\sin x \neq 0$, то есть при $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$. В этих «запретных» точках деление на синус невозможно.

Основная формула имеет вид $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$. Поэтому значения котангенса задаются отношением косинуса к синусу и меняются плавно внутри каждого допустимого промежутка.

Нули $\operatorname{ctg} x$ расположены в точках $x = \pi/2 + \pi k$. Между соседними вертикальными асимптотами график состоит из отдельных ветвей, каждая из которых тянется от $+\infty$ до $-\infty$.

Так же как и у тангенса, у $\operatorname{ctg} x$ нет ограничений сверху и снизу: при приближении к асимптотам значения становятся сколь угодно большими по модулю.

• Сравнение свойств функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

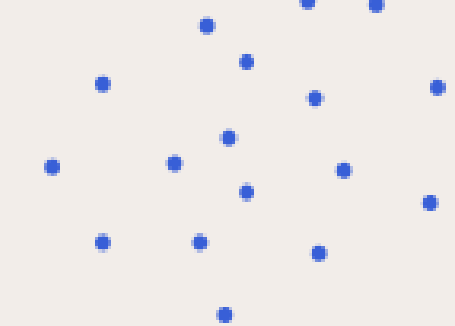
Столкновение двух функций особенно хорошо видно по области определения, периодичности и «наборам» характерных точек.

Обе функции периодичны с периодом π и принимают любые действительные значения. Нули и точки «запрета» у них смещены на $\pi/2$, из-за чего графики выглядят похоже, но не совпадают.

Свойство	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
Область определения	$x \neq \pi/2 + \pi k$	$x \neq \pi k$
Множество значений	все действительные	все действительные
Период	π	π
Нули	$x = \pi k$	$x = \pi/2 + \pi k$

Обобщение по формуле $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ и $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$

• Периодичность и повторение графиков



Сопоставление точек нулей: $\operatorname{tg} x=0$ при $x=\pi k$ и $\operatorname{ctg} x=0$ при $x=\pi/2+\pi k$

В одном и том же «отрезке» длины π повторяется структура: меняются только положение характерных точек и наклон ветвей.

Одинаковая периодичность подтверждает повтор графика через π , а различие нулей показывает, что ветви $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ оказываются сдвинутыми по оси Ox .

• Нечётность и симметрия графиков



Нечётность через замену $x \rightarrow -x$

Для тангенса выполняется равенство $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, а для котангенса $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. Это означает, что значения по модулю совпадают, но знак меняется на противоположный.



Центральная симметрия относительно $(0;0)$

Графики $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют центральную симметрию относительно начала координат. Зная правую часть графика, можно аккуратно достроить левую по симметрии без потери точности.



Практическая проверка построения

Эта симметрия помогает контролировать рисунок: если несколько опорных точек расположены корректно справа, то соответствующие точки слева должны получиться автоматически. Так легче избежать ошибок со знаками.

- График функции $y = \operatorname{tg} x$

1

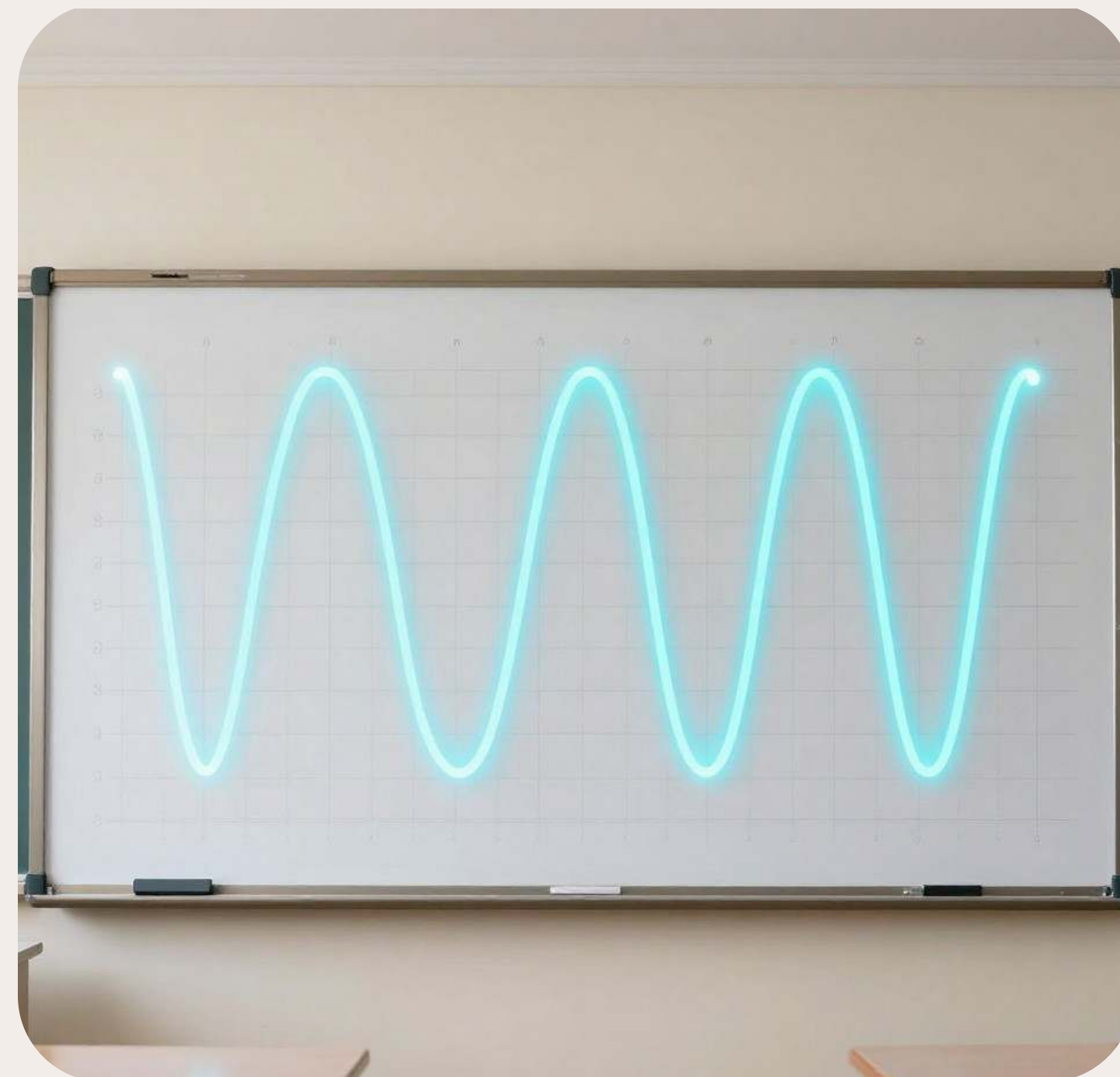
Ветви между асимптотами и рост на каждом промежутке

График $\operatorname{tg} x$ составляют возрастающие ветви между вертикальными асимптотами $x = \pi/2 + \pi k$. На каждом промежутке определения функция растёт от $-\infty$ до $+\infty$, поэтому вблизи асимптот она резко меняется.

2

Опорные точки для построения

Тангенс проходит через точки $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(-\pi,0)$. Для контроля также берут опорные значения: $(\pi/4,1)$ и $(-\pi/4,-1)$. На рисунке полезны координатная сетка, асимптоты и выделенные нули.

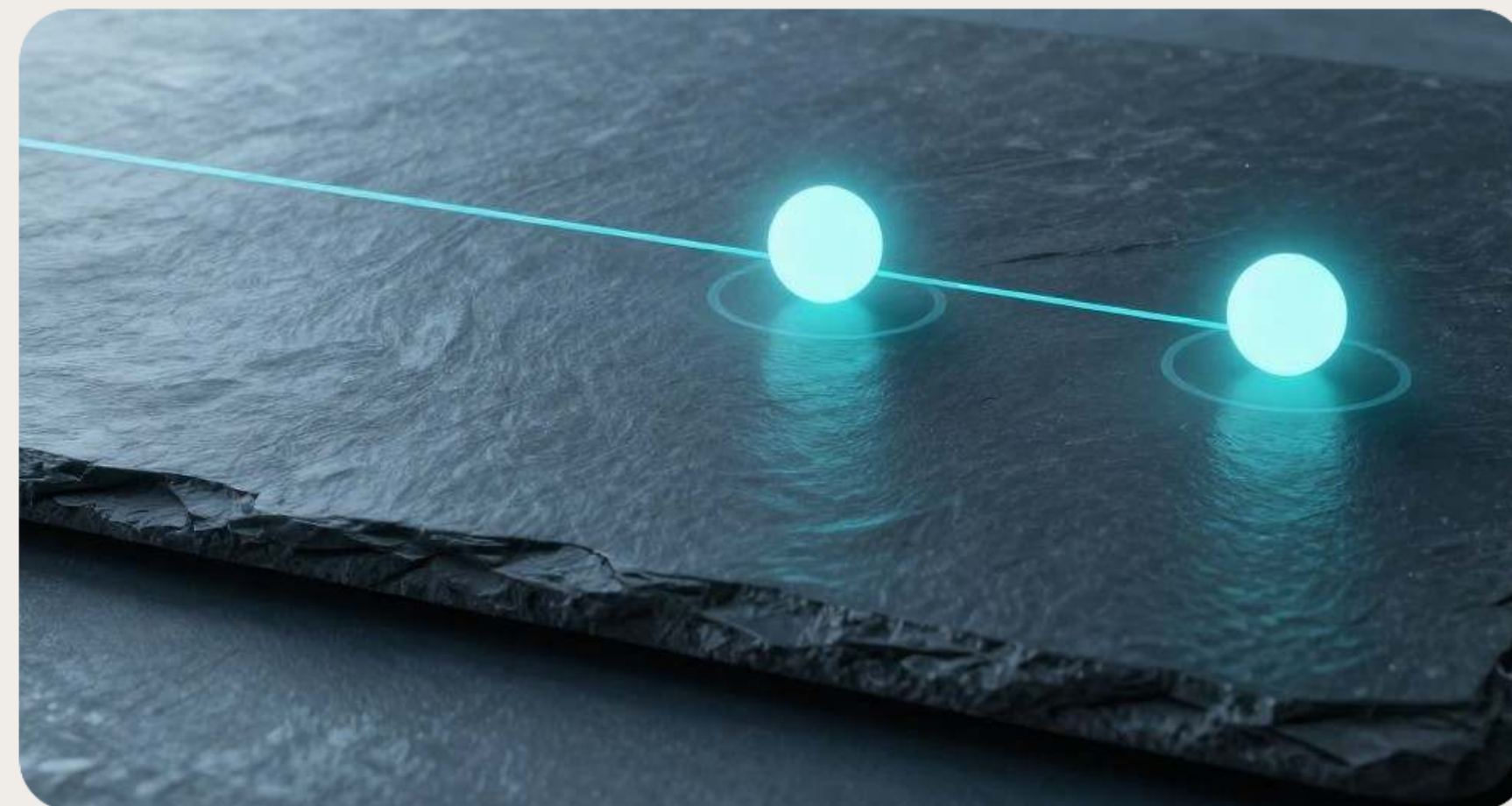


- График функции $y = \operatorname{ctg} x$



Убывающая «волна» котангенса

Котангенс строится как набор убывающих ветвей между вертикальными асимптотами $x = \pi k$. На каждом промежутке определения он спускается от $+\infty$ до $-\infty$, поэтому наклон ветвей всегда одинаков по направлению.

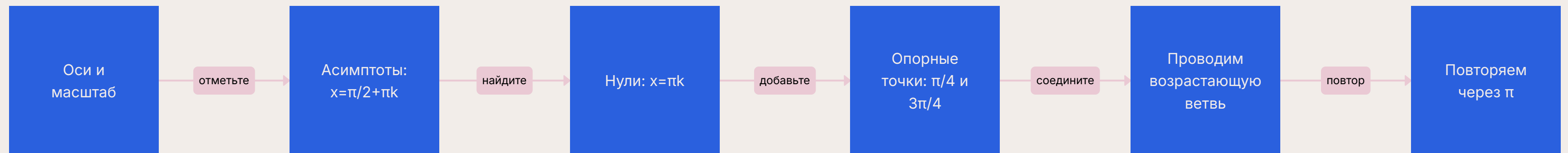


Точки, по которым график узнаётся сразу

График проходит через $(\pi/2, 0)$ и $(3\pi/2, 0)$. Для опорных отметок удобно брать $(\pi/4, 1)$ и $(3\pi/4, -1)$. Если эти точки стоят верно, остальная ветвь ложится естественно, без «ломаных» участков.

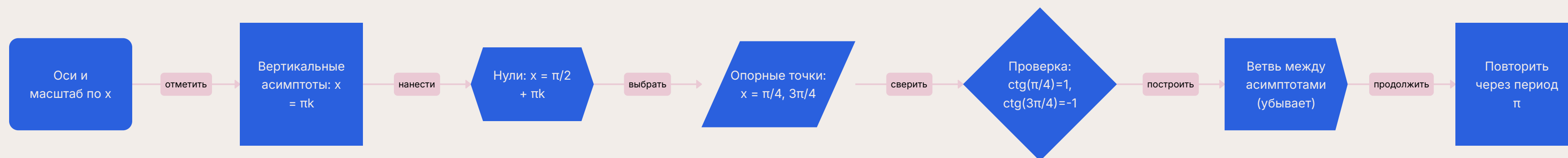
• Построение графика тангенса

Пошаговый алгоритм для $\operatorname{tg} x$ с периодом π

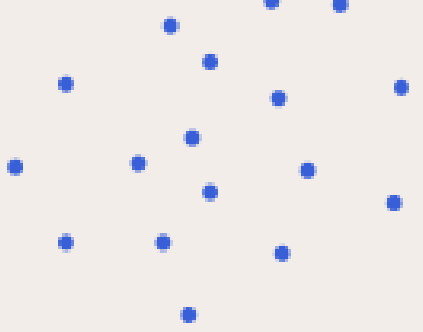


• Построение графика котангенса

Алгоритм построения ветвей $y = \operatorname{ctg} x$: оси, асимптоты, нули, опорные точки и продолжение по периоду π .



• Монотонность и скорость изменения функций



У тангенса — рост

На каждом промежутке определения функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает. Это согласуется с производной $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$, которая положительна там, где функция определена.



У котангенса — убывание

Для $y = \operatorname{ctg} x$ на каждом промежутке определения характерно убывание. Ее производная $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$ отрицательна, поэтому график опускается между асимптотами.



Резкие изменения у асимптот

Близко к вертикальным асимптотам $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$ величины производных становятся очень большими по модулю. Поэтому графики почти вертикальны и меняются резко.

- Область определения и точки разрыва

1

У функции $y = \operatorname{tg} x$ значения $x = \pi/2 + \pi k$ запрещены, потому что $\cos x = 0$. Тогда дробь $\sin x / \cos x$ теряет смысл. Эти точки не входят в область определения.

2

У функции $y = \operatorname{ctg} x$ значения $x = \pi k$ запрещены, так как $\sin x = 0$. В выражении $\cos x / \sin x$ знаменатель обращается в ноль, поэтому функция не определена. Такие значения требуется исключать.

3

Запрещенные точки проявляются на графике как вертикальные асимптоты: к ним ветви либо стремятся к $+\infty$ и $-\infty$, либо быстро меняются. Именно асимптоты помогают правильно размещать границы ветвей.

4

При решении уравнений и преобразовании выражений нельзя оставлять найденные корни без проверки. Если корень совпадает с запрещенным x , ответ будет неверным, даже если формально он удовлетворяет преобразованному равенству.

• Значения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ в опорных углах



Учебные значения из тригонометрии (точные: 0, 1, $\pm\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$)

Для $x=\pi/2$ тангенс не определён, а котангенс равен нулю; при $x=0$ наоборот: $\operatorname{ctg} x$ не определён, $\operatorname{tg} x$ равен нулю. Это напрямую связано с асимптотами.

Сопоставление показывает, что у $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ «проблемные» точки сдвинуты на $\pi/2$: там, где одна функция исчезает из области определения, другая принимает конечное значение.

• Решение простейших уравнений с $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

- 1 Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет бесконечно много решений. Их удобно записывать так: $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, где k — целое число, поскольку период тангенса равен π .
- 2 Аналогично, уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет решения вида $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$. Период котангенса также равен π , поэтому решения повторяются через каждые π радиан.
- 3 После нахождения корней обязательно проверяйте область определения: $\operatorname{tg} x$ нельзя при $x = \pi/2 + \pi k$, а $\operatorname{ctg} x$ нельзя при $x = \pi k$. Это помогает избежать «лишних» ответов.

- Типичные ошибки при работе с $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

Ошибка	Причина	Верный результат
Путают нули $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$	Забывают, что нули задаются разными формулами	$\operatorname{tg} x=0$ при $x=\pi k$; $\operatorname{ctg} x=0$ при $x=\pi/2+\pi k$
Забывают про точки разрыва	Не исключают значения, где знаменатель обращается в ноль	$\operatorname{tg} x$ разрыв при $x=\pi/2+\pi k$; $\operatorname{ctg} x$ разрыв при $x=\pi k$
Принимают период 2π вместо π	Смешивают с синусом и косинусом	И у $\operatorname{tg} x$, и у $\operatorname{ctg} x$ период π
Строят график без асимптот	Не учитывают вертикальные границы ветвей	Нужны асимптоты: $\operatorname{tg} \text{ — } x=\pi/2+\pi k$, $\operatorname{ctg} \text{ — } x=\pi k$
Подставляют запрещённые значения в уравнения	Берут корень из формулы без проверки	Корни из запрещённого множества удаляют из ответа
Смешивают знак на соседних промежутках	Ошибаются в ориентации ветвей	Проверяют знак по промежутку между асимптотами

В таблице собраны частые промахи при построении графиков и решении уравнений с тангенсом и котангенсом. Почти все они связаны с неправильным обращением с областью определения и опорными точками.

Если последовательно отмечать асимптоты, затем нули и хотя бы одну опорную точку, то большинство ошибок распознается сразу и устраняется до окончательных выводов.

Свод типичных ошибок из школьной практики (по темам области определения, асимптот и периодичности)

- Практическое применение в геометрии и физике

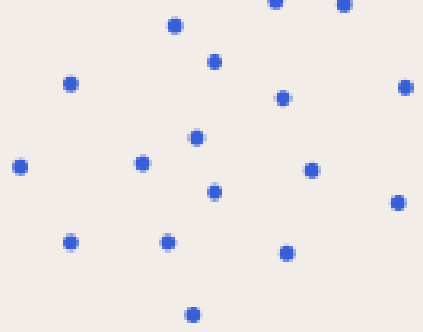
Тангенс помогает вычислять угол наклона прямой: по соотношению «подъём/пробег» его можно выразить через соответствующие катеты в прямоугольном треугольнике.

В геометрических задачах $\operatorname{ctg} x$ используют как обратное соотношение катетов. Оно удобно, когда известны прилежащие и противолежащие отрезки относительно нужного угла.

Обе функции встречаются в описании наклонов при построениях и анализе моделей. Когда угол задан, tg и ctg связывают его с размерами сторон, упрощая расчёты.

В задачах о движении тригонометрические зависимости помогают переводить измерения координат в характеристики траектории: направление, угол наблюдения и относительные изменения расстояний.

● Сравнение графиков на промежутке от 0 до π



На отрезке $(0, \pi/2)$ $\text{ctg} x$ стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow 0^+$ и проходит через $(\pi/2, 0)$. На $(\pi/2, \pi)$ $\text{ctg} x$ уходит к $-\infty$ при $x \rightarrow \pi^-$.

Диаграмма подчёркивает «противоположность»: между нулём одной функции и асимптотой другой возникает смена направления. Поэтому удобно сопоставлять ветви на равных подотрезках.

Построение по точным опорным значениям тригонометрии и поведению у асимптот (учебные закономерности), 12.05.2026

- Ключевые свойства для запоминания



Период π

Тангенс и котангенс повторяются через один и тот же промежуток: π радиан. Поэтому один «кусоч» графика можно многократно переносить, сохраняя расположение ветвей.



Нечётность

Обе функции нечётные: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. Следовательно, график симметричен относительно начала координат, и по правой части легко восстановить левую.



Нули и асимптоты у $\operatorname{tg} x$

У $\operatorname{tg} x$ нули находятся в точках $x = \pi k$. Его вертикальные асимптоты лежат при $x = \pi/2 + \pi k$. Эти признаки позволяют быстро проверять корректность построения на оси x .



Нули и асимптоты у $\operatorname{ctg} x$

У $\operatorname{ctg} x$ нули расположены в точках $x = \pi/2 + \pi k$, а вертикальные асимптоты — при $x = \pi k$. Сравнение этих сеток делает ошибки с областью определения менее вероятными.

- Итоги: что объединяет и различает $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$



Функции $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ выражаются через синус и косинус, имеют период π , нечётны и состоят из ветвей между вертикальными асимптотами. Различие — в нулях и точках разрыва: $y=\operatorname{tg} x$ $x=\pi k$, $y=\operatorname{ctg} x$ $x=\pi/2+\pi k$.

