

# Определённый интеграл: площадь, накопление и применение

Площадь, накопление и точный ответ в одной формуле.



# Почему эта тема важна в 11 классе

Определённый интеграл завершает линию от функции и производной к вычислению накопленного результата. Он опирается на идеи Архимеда, Ньютона, Лейбница, а строгую форму получил в работах Коши и Римана.



# Запись определённого интеграла и её элементы

## Пределы интегрирования

Запись  $\int_a^b f(x)dx$  читается как интеграл функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Числа  $a$  и  $b$  фиксируют промежуток, на котором выполняется вычисление и сравнение значений.

1

## Переменная $dx$

Символ  $dx$  показывает, по какой переменной ведётся интегрирование, и связан с малым приращением аргумента. Он помогает понимать интеграл как сумму очень малых вкладов на отрезке.

2

## Что означает результат

В отличие от неопределённого интеграла, определённый интеграл даёт не семейство функций, а одно число. Это число отражает итоговое накопление величины на заданном промежутке.

3

## Связь с задачами

Такая запись используется в задачах о площади, пути, работе, массе и среднем значении функции. Именно поэтому определённый интеграл является не только формальной, но и прикладной конструкцией.

4

# Сумма Римана как основа определения интеграла

## Разбиение отрезка

Отрезок  $[a, b]$  делят на много маленьких частей, чтобы на каждом участке функция менялась не слишком сильно. Это позволяет заменить сложную область набором простых прямоугольников.

## Выбор точки

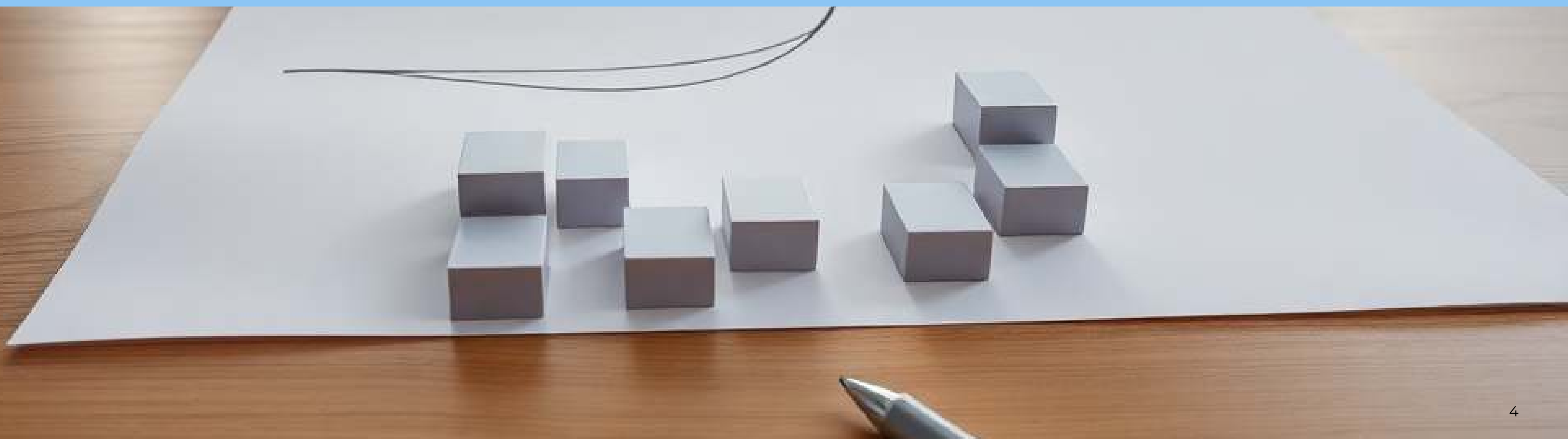
На каждом промежутке выбирают точку  $x_i$ , в которой берут высоту прямоугольника. От этого выбора зависит приближение, но при мелком разбиении влияние становится всё меньше.

## Суммирование вкладов

Сумма вида  $\sum f(x_i)\Delta x$  складывает площади всех прямоугольников и даёт приближение площади под графиком. Чем меньше шаг, тем точнее итоговая оценка.

## Переход к пределу

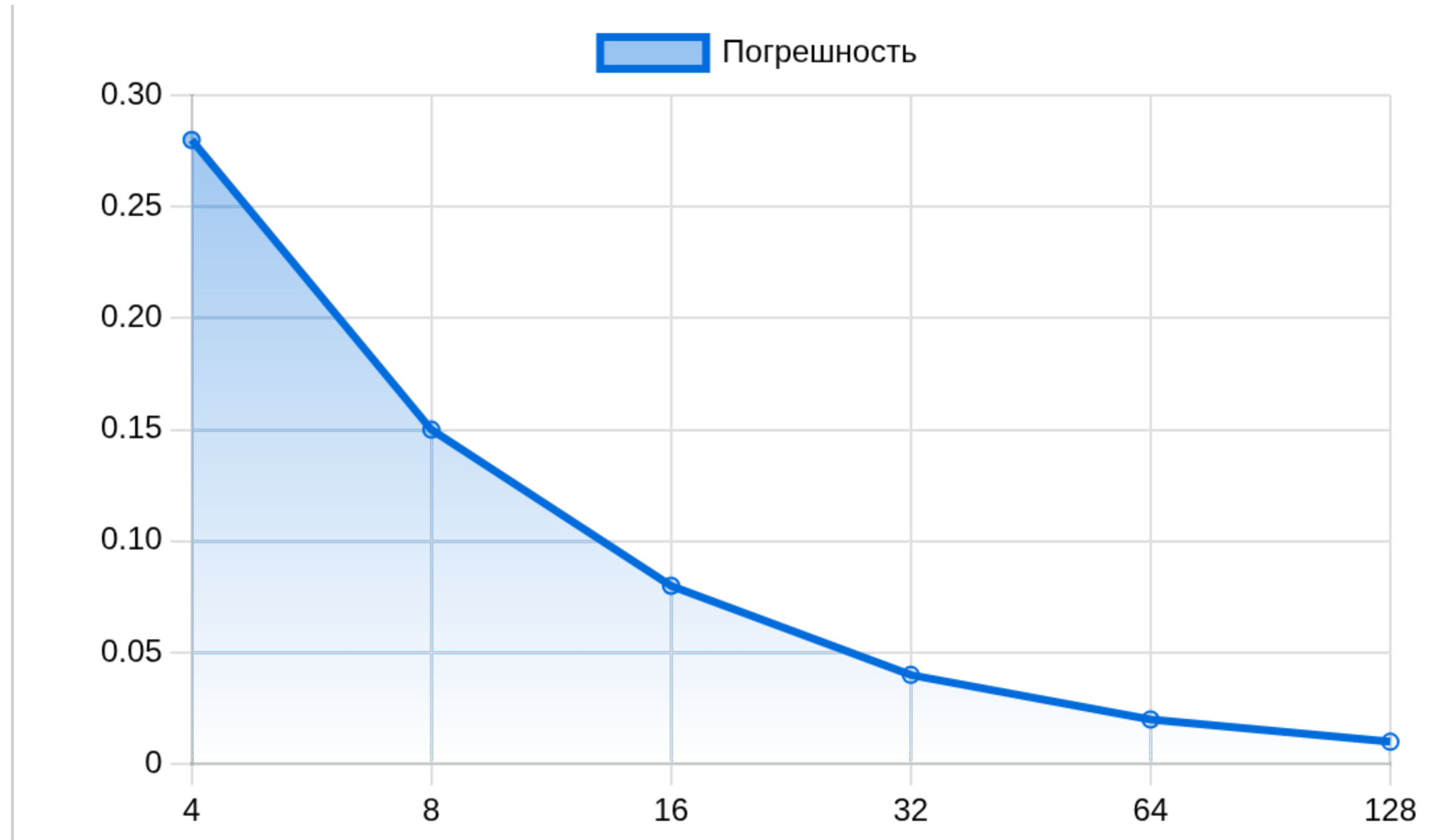
При увеличении числа разбиений сумма Римана стремится к точному значению определённого интеграла. Так предельный переход превращает приближённый расчёт в строгое математическое определение.



# Как уточнение разбиения влияет на погрешность

График показывает не сам интеграл, а качество приближения суммы Римана при последовательном удвоении числа прямоугольников.

Рост числа разбиений быстро уменьшает ошибку вначале, затем улучшение становится плавным: приближение стабильно сходится к точному значению.



*Иллюстративные данные, отражающие типичную сходимость суммы Римана при уточнении разбиения.*

Один и тот же интеграл объединяет вклад областей над и под осью  $Ox$ . Поэтому результат показывает не просто размер фигуры, а её ориентированную площадь.

Геометрическая интерпретация определённого интеграла из школьного курса алгебры.

# 2

**знака учитываются в одном значении: положительные участки прибавляются, а отрицательные вычитаются.**

# Основные свойства определённого интеграла

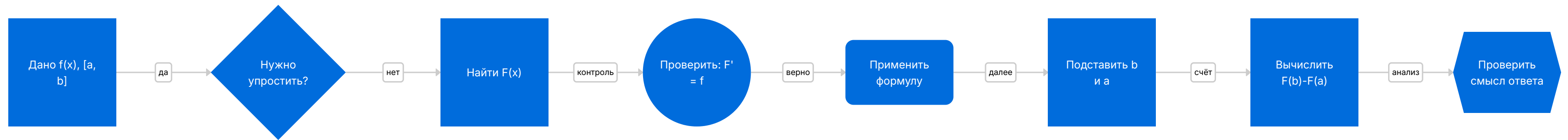
| Свойство       | Формула                                                    | Смысл                |
|----------------|------------------------------------------------------------|----------------------|
| Линейность     | $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ | Сумма раскладывается |
| По отрезку     | $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$                     | Части складываются   |
| Смена пределов | $\int_a^b f = -\int_b^a f$                                 | Меняется знак        |
| Оценка         | $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$                       | Есть границы         |

Свойства помогают преобразовывать выражения, сравнивать интегралы и быстро получать оценки без прямого вычисления.

Эти свойства делают интеграл удобным инструментом: они упрощают вычисления, позволяют разбивать отрезок на части и дают быстрые числовые оценки.

# Как вычислять определённый интеграл

Последовательность основана на применении первообразной и формулы Ньютона—Лейбница.



# Формула Ньютона—Лейбница



## Первообразная вместо предела

Если найти  $F(x)$ , для которой  $F'(x)=f(x)$ , вычисление интеграла сводится к разности значений на концах отрезка. Это делает задачу намного короче, чем прямой подсчёт по суммам Римана.



## Связь изменения и накопления

Формула показывает, что накопленный результат можно получить через функцию, описывающую скорость изменения. Тем самым производная и интеграл оказываются двумя сторонами одной идеи.



## Работа на школьных примерах

В 11 классе формула применяется почти ко всем стандартным функциям: степенным, тригонометрическим, показательной и логарифмической. Поэтому она лежит в основе большинства вычислительных задач.



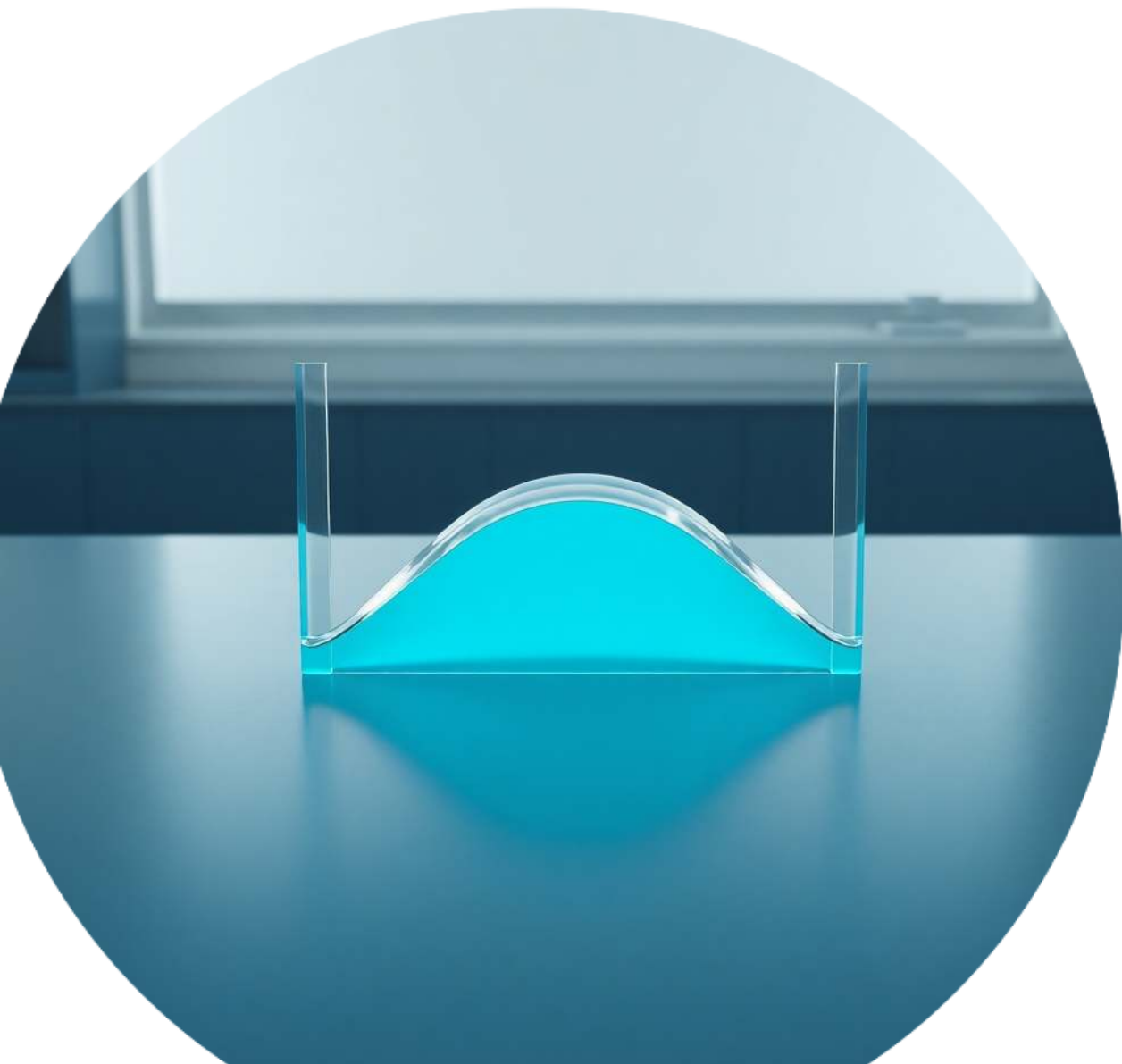
## Практическая проверка ответа

После вычисления полезно оценить знак и порядок величины результата. Такая проверка помогает заметить ошибку в пределах интегрирования, в первообразной или в арифметике.

# Пример вычисления на функции $y=x^2$

## Парабола на отрезке [0,2]

Рассмотрим функцию  $y=x^2$  и вычислим интеграл на промежутке от 0 до 2. Первообразная равна  $x^3/3$ , поэтому значение находится сразу через формулу Ньютона—Лейбница:  $8/3$ . На графике это соответствует площади под ветвью параболы, ограниченной осью  $Ox$  и вертикальными границами отрезка.



## Почему ответ получается точным

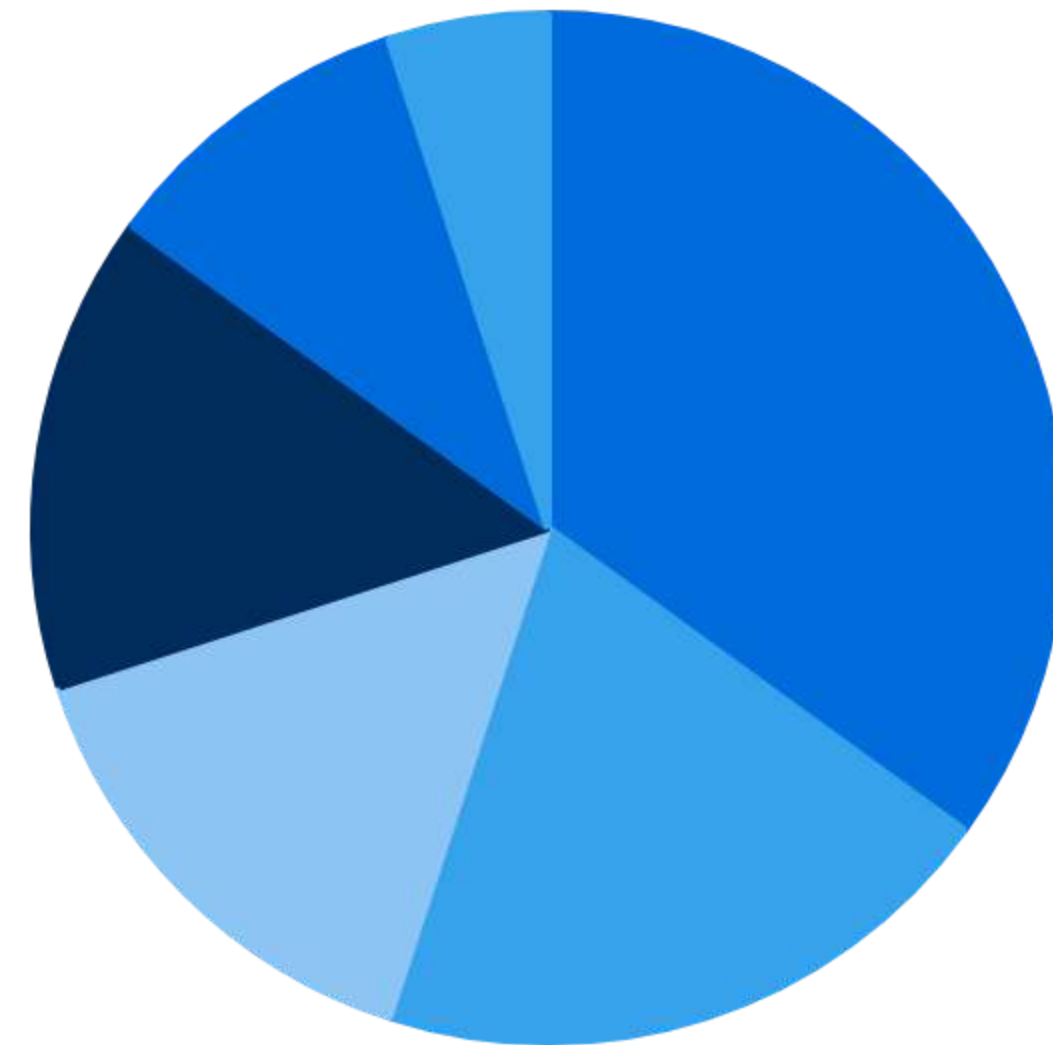
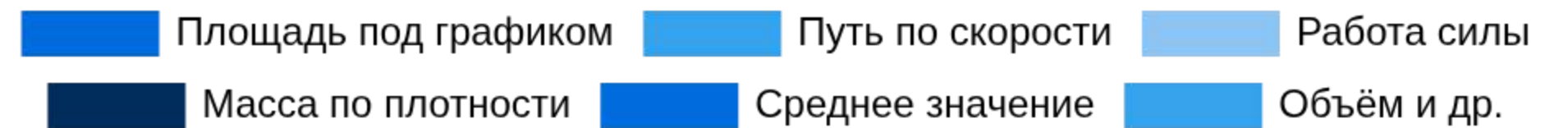
В этом примере не нужно делить область на десятки прямоугольников и считать приближение. Достаточно один раз найти первообразную и подставить пределы, чтобы получить точный результат. Именно так определённый интеграл превращает геометрическую задачу в короткое аналитическое вычисление.



# Что можно вычислять с помощью интеграла

Одна и та же идея работает в геометрии, физике и прикладных задачах, если величина меняется непрерывно.

Интеграл универсален: он описывает не только площадь, но и суммарный результат процесса.



Сводная схема по материалам школьной темы; доли условные, 2025.

# Интеграл как накопление величины

## Малый вклад

На очень коротком промежутке изменение величины можно считать почти постоянным и описывать простым произведением значения на длину участка.

## Суммирование участков

Все такие маленькие вклады складывают по всему отрезку, получая приближённый суммарный результат процесса или измеряемой величины.

## Переход к пределу

При всё более мелком разбиении сумма становится точнее и в пределе превращается в определённый интеграл.

## Смысл результата

Итоговое число показывает накопленный эффект: путь, массу, работу или другой общий результат за весь рассматриваемый промежуток.



# Среднее значение функции на отрезке

## 1. Формула среднего

Среднее значение на отрезке вычисляют как отношение интеграла к длине отрезка; это показывает, какой постоянный уровень дал бы тот же суммарный эффект.

## 2. Геометрическая интерпретация

Для положительной функции среднее значение удобно понимать как высоту прямоугольника с основанием  $b-a$  и площадью, равной площади под графиком.

## 3. Практический смысл

Понятие среднего значения помогает описывать температуру, скорость, расход и другие величины, которые меняются во времени или по пути.

# Стандартные интегралы, полезные в 11 классе

| Функция  | Первообразная       | Пример                     |
|----------|---------------------|----------------------------|
| $x^n$    | $x^{(n+1)}/(n+1)+C$ | $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$    |
| $\sin x$ | $-\cos x + C$       | $\int_0^\pi \sin x dx = 2$ |
| $\cos x$ | $\sin x + C$        | на $[0, \pi/2] = 1$        |
| $e^x$    | $e^x + C$           | на $[0,1] = e-1$           |

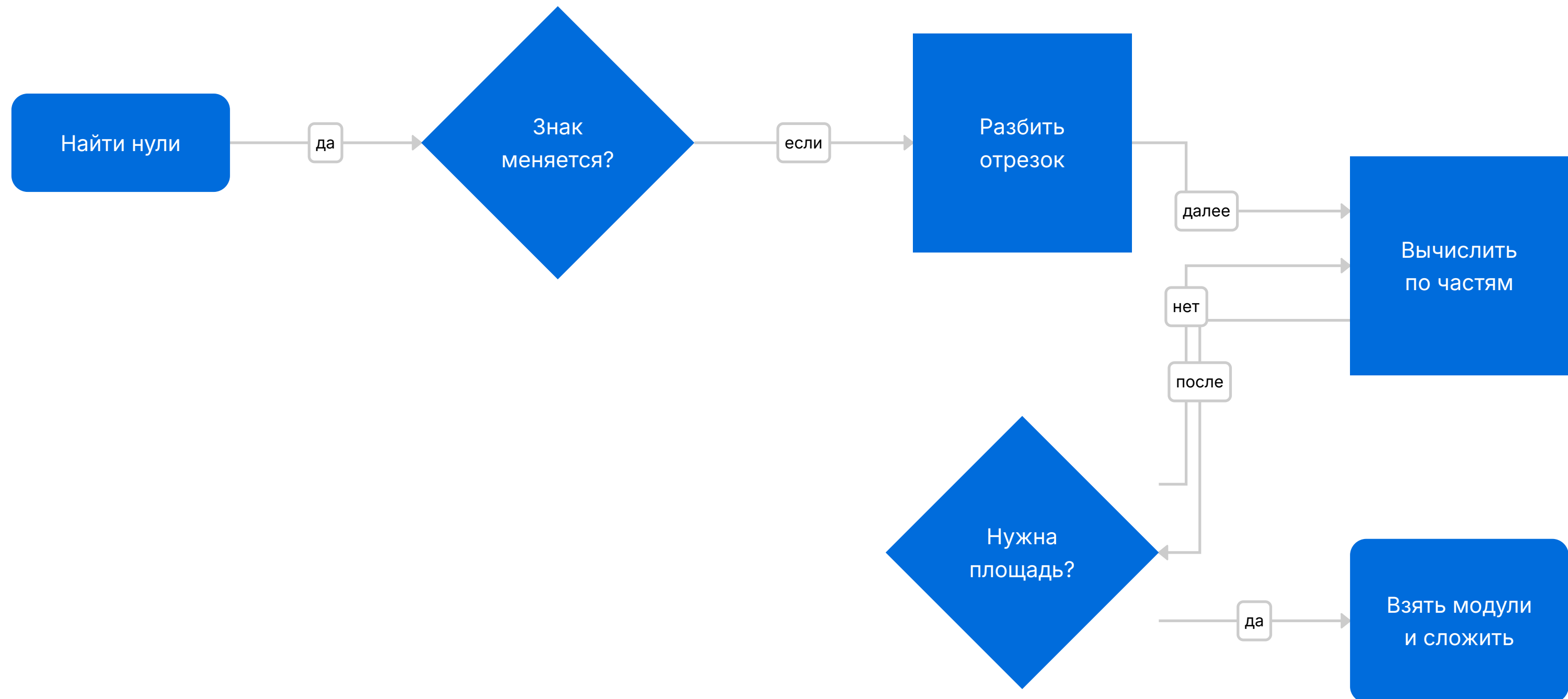
*Школьный курс алгебры и начала анализа*

Краткая таблица формул, которые чаще всего используются при вычислении определённых интегралов и проверке ответов.

Эти формулы покрывают большинство базовых задач и позволяют быстро переходить от первообразной к численному ответу.

# Как работать с интегралом при смене знака графика

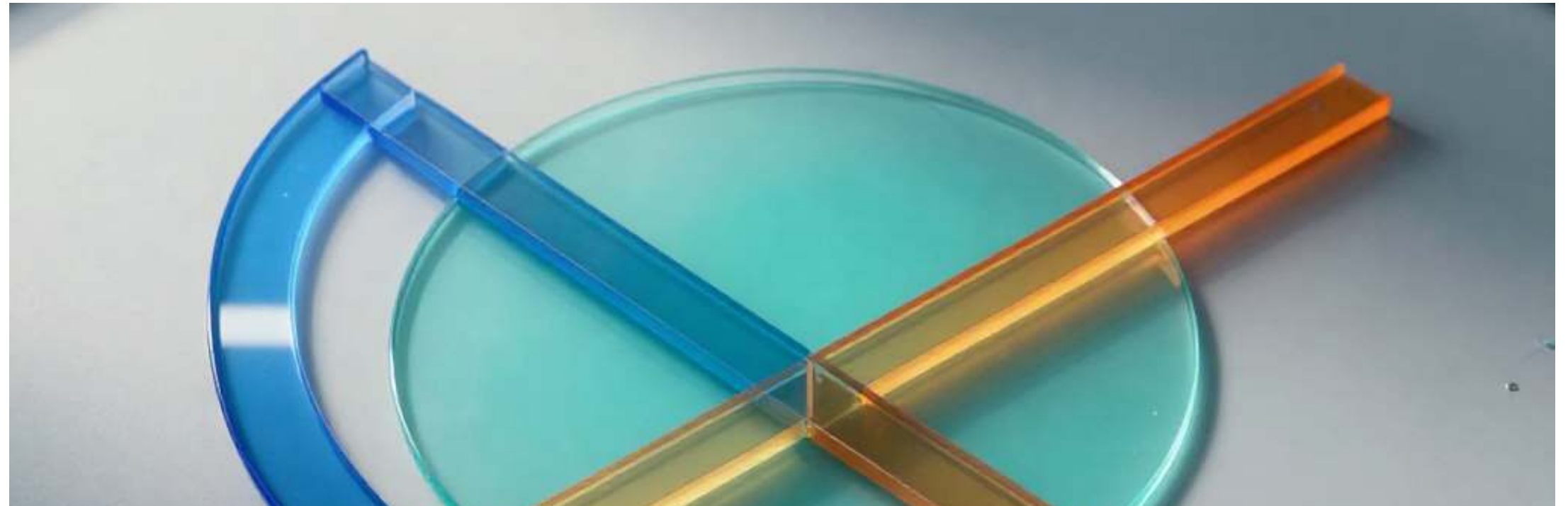
Схема показывает, как перейти от ориентированной площади к аккуратному вычислению на каждом участке.



# Задача на площадь между графиками

## Две кривые, одна область

На рисунке прямая и парабола пересекаются и образуют замкнутую фигуру. Чтобы найти площадь, нужно понять, какая функция сверху, а какая снизу на каждом участке промежутка.



## Когда одного интеграла мало

Если графики пересекаются, область приходится делить на части по точкам пересечения. Тогда площадь получается как сумма разностей интегралов на каждом участке без смешения знаков.



# Типичные ошибки при вычислении интегралов

## Путаница в пределах

Часто подставляют границы в неверном порядке или забывают, что при перестановке пределов знак интеграла меняется. Из-за этого правильная первообразная даёт неверный ответ.

1

## Смешение двух интегралов

Неопределённый интеграл даёт семейство первообразных, а определённый — одно число. Если не различать эти понятия, легко потерять смысл вычисления и ошибиться в записи.

2

## Игнорирование знака графика

Площадь под графиком и значение определённого интеграла не всегда совпадают. Участки ниже оси  $Ox$  нужно учитывать отдельно, иначе результат будет искажён.

3

## Неверный промежуток

Если функция меняет знак, нельзя считать весь отрезок сразу. Сначала надо найти точки пересечения с осью  $Ox$  и работать на участках с постоянным знаком.

4

## Ошибки в первообразной

При проверке производной важно не забывать о константе и аккуратно упрощать выражение. Даже в простых примерах это помогает избежать логических и вычислительных ошибок.

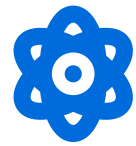
5

# Связь с другими разделами математики и естественных наук



## Анализ

Через основную теорему анализа интеграл связан с производной и показывает, как изменение превращается в накопленный результат на отрезке.



## Физика

Интеграл применяют для нахождения пути, работы и электрического заряда, когда скорость, сила или плотность меняются непрерывно.



## Экономика и статистика

В экономике он помогает считать суммарные затраты и доходы, а в статистике — описывать непрерывные распределения и вероятности.



## Геометрия

С помощью интеграла находят площади и объёмы фигур, которые невозможно вычислить одной простой формулой без разбиения на малые части.

# Краткое повторение темы

| Понятие                 | Смысл                             | Вывод                 |
|-------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| Суммы Римана            | предел при $n \rightarrow \infty$ | точное значение       |
| Ориентированная площадь | ниже Ох со знаком                 | нужен учёт знака      |
| Ньютона—Лейбница        | $F(b) - F(a)$                     | считает интеграл      |
| Среднее значение        | $1/(b-a) \int_a^b f(x) dx$        | эквивалентный уровень |

Таблица собирает главные идеи, которые нужны для решения базовых задач по определённому интегралу.

Все ключевые задачи сводятся к четырём опорам: определению, знаку, формуле Ньютона—Лейбница и среднему значению функции.

# Определённый интеграл: итог темы

Определённый интеграл объединяет площадь и накопление, связывает функцию с её изменением и даёт школьный инструмент для задач, где важны точность, смысл и умение видеть структуру процесса.