

Комбинаторные задачи: как считать варианты

Учимся считать все возможные варианты без пропусков и повторов.





Где комбинаторика помогает каждый день

Комбинаторные идеи встречаются в выборе одежды, меню, паролей и расписаний. Они показывают, как быстро растёт число вариантов и почему важно не забыть ни одного случая.

Что такое комбинаторная задача

1

Комбинаторная задача требует определить количество всех возможных вариантов, а не просто найти один ответ. Обычно нужно выбрать предметы, расположить их или распределить по группам.

2

Сначала важно понять, что именно считается: набор предметов, их порядок или способ деления на части. От этого зависит, какую формулу или правило нужно применять.

3

Если условие читают невнимательно, легко перепутать выбор с расстановкой. Поэтому в комбинаторике всегда начинают с вопроса: что меняется, а что остаётся одинаковым?

Правило суммы и правило произведения



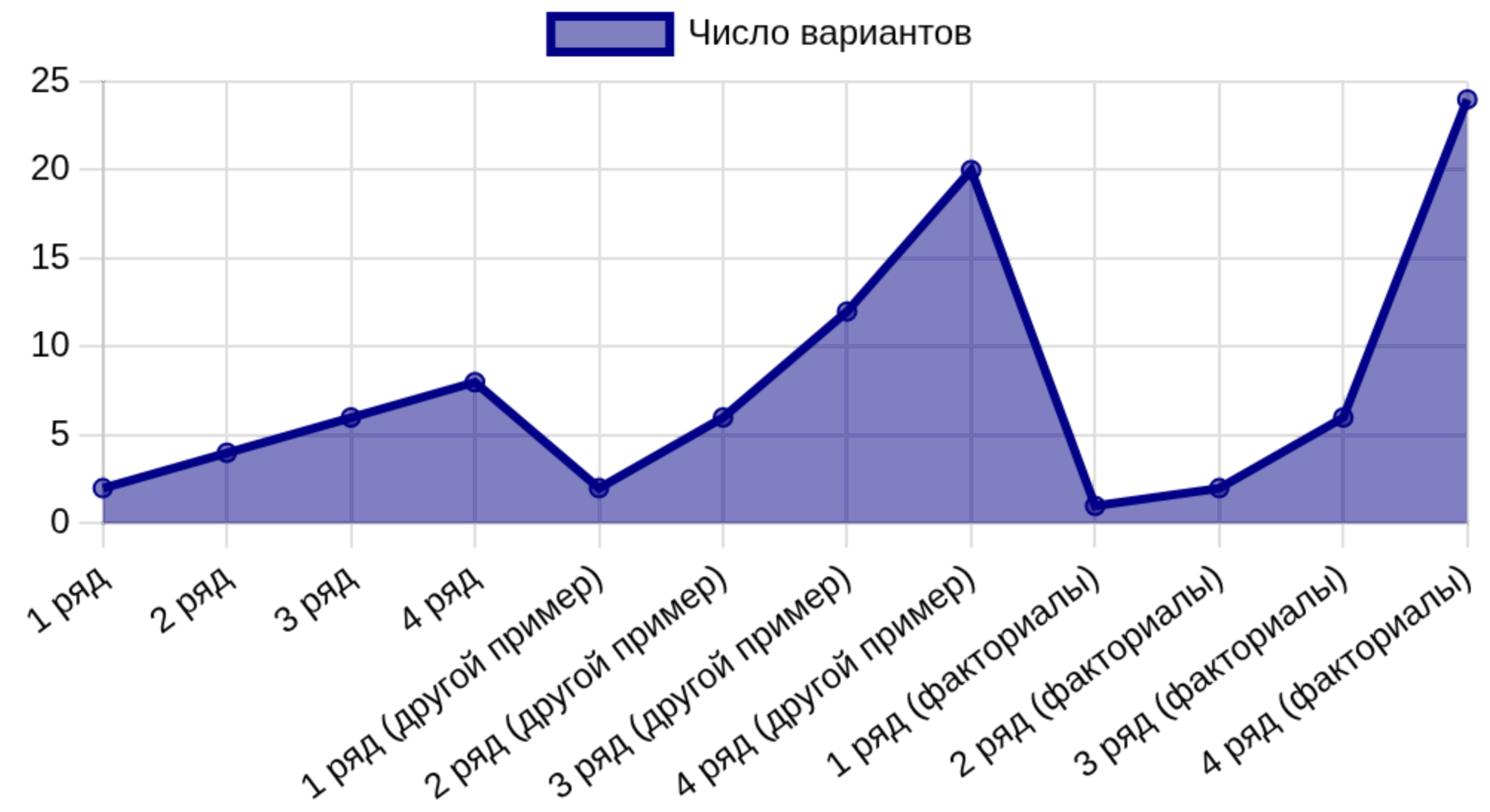
1

1. Правило суммы применяют, когда нужно выбрать один вариант из нескольких несовместимых. Если есть разные напитки, их варианты просто складывают, потому что одновременно выбирают только один из них.

2

2. Правило произведения используют при последовательном выборе. Если сначала выбирают одну вещь, а потом другую, общее число комплектов находят умножением, потому что каждый первый выбор сочетается с каждым вторым.

Как быстро растёт число вариантов



Даже небольшое добавление элементов может резко увеличить число решений в задаче.

Рост вариантов идёт неравномерно: в некоторых случаях он почти линейный, а в других становится очень быстрым.

Данные составлены по учебным примерам: 2, 4, 6, 8; 2, 6, 12, 20; 1, 2, 6, 24.

24

варианта получаются при перестановке четырёх книг.

Учебный пример: перестановки четырёх предметов, $4! = 24$.

Если нужно разместить все предметы в новом порядке, каждый вариант отличается расположением. Для четырёх книг число перестановок равно 24.

Основные формулы в простых комбинаторных задачах

Случай	Формула	Пример
Перестановки	$n!$	$5! = 120$
Размещения	$A(5,2)$	20
Сочетания	$C(5,2)$	10

Таблица показывает три главных типа задач и помогает быстро выбрать нужный способ счёта.

Перестановки считают все порядки, размещения — выбор с учётом порядка, сочетания — выбор без него.

Учебные формулы комбинаторики.

Размещения: выбираем и расставляем

1

Размещение используют тогда, когда берут только часть предметов, но порядок их расположения уже важен. Поэтому два одинаковых набора, стоящие по-разному, считаются разными вариантами.

2

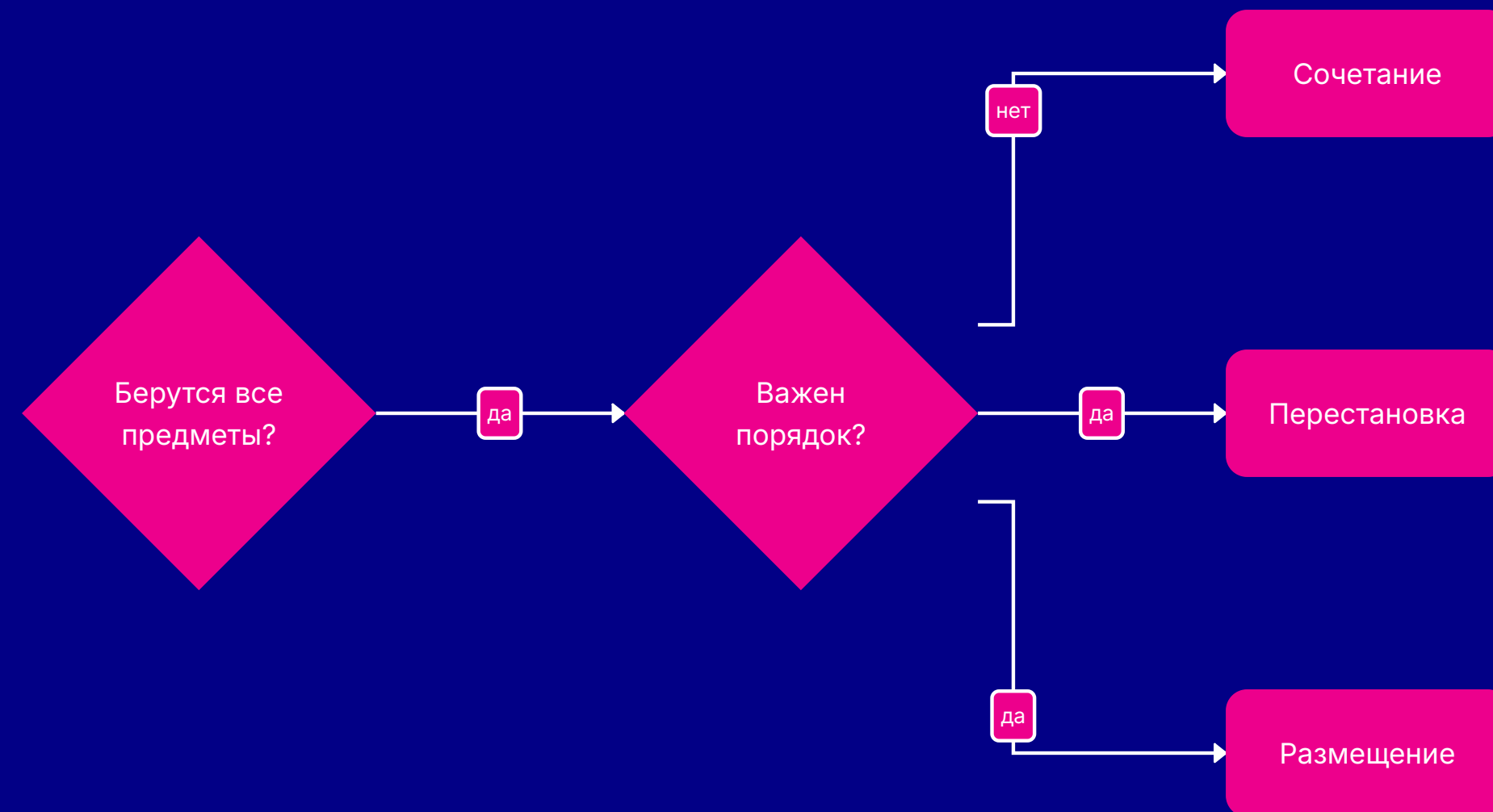
Если из нескольких учеников назначают капитана и заместителя, каждый выбор должности меняет результат. Сначала выбирают одного, затем другого, и порядок здесь уже имеет значение.

3

Такой же принцип работает, когда нужно поставить несколько книг на полку из большего числа. Важно не только что выбрано, но и кто стоит первым, вторым и третьим.

Как выбрать способ решения задачи

Схема показывает, как определить тип комбинаторной задачи по условию.



Сочетания: выбираем без порядка



- 1. Сочетание описывает выбор предметов, где важно только, какие объекты попали в набор. Если поменять их местами, новый вариант не появляется, потому что состав остаётся тем же.
- 2. Этот способ счёта подходит для команд, наборов вкусов и других ситуаций без порядка. Он помогает не считать один и тот же набор несколько раз, если его записали по-разному.

Треугольник Паскаля и числа сочетаний



Каждая строка строится из суммы двух соседних чисел над ней.

Симметрия строк помогает быстро находить сочетания и проверять ответ без длинных вычислений.

Треугольник Паскаля: первые строки
1; 1 1; 1 2 1; 1 3 3 1.

Комбинаторные задачи с кодами и паролями

1

Если код состоит из нескольких символов, сначала уточняют длину записи и набор доступных знаков. Именно эти два условия определяют, сколько всего вариантов можно получить.

2

В большинстве кодов порядок символов важен: 12 и 21 — разные записи. Поэтому задачи на пароли почти всегда относятся к случаям, где учитывается последовательность выбора.

3

Если повторы разрешены, число вариантов обычно считают по правилу произведения: каждый следующий знак выбирают независимо от предыдущих. Запрет повторов сразу уменьшает число кодов.

4

Полезно отдельно проверить, допускаются ли нули в начале и могут ли совпадать символы. Такие детали часто меняют ответ сильнее, чем кажется сначала.

Порядок и повторения: четыре важных случая

Ситуация	Пример	Идея
Порядок важен, повторы да	Пароль	Размещение
Порядок важен, повторы нет	Очередь	Перестановка
Порядок не важен, повторы нет	Команда	Сочетание
Порядок не важен, повторы да	Набор	Выбор

Сравнение помогает сразу выбрать нужный способ подсчёта и избежать путаницы между выбором и расстановкой.

Сначала нужно определить два признака: важен ли порядок и разрешены ли повторы. После этого выбор формулы становится однозначным.

Обобщение основных случаев комбинаторики.

Комбинаторика и вероятность

1

Сначала находят общее число возможных исходов опыта. Затем считают, сколько из них удовлетворяют нужному условию, и только после этого составляют отношение двух чисел.

2

Если событие связано с выбором предметов, комбинаторика помогает перечислить все варианты без пропусков. Это особенно удобно в задачах с шарами, картами, кубиками и жетонами.

3

Чем точнее подсчитано число исходов, тем надёжнее ответ в вероятности. Ошибка в комбинаторном счёте сразу искажает весь результат, поэтому порядок и повторы нужно проверять заранее.

Сколько исходов бывает в простых опытах



При независимых действиях удобно сначала считать исходы каждого шага отдельно, а затем перемножать результаты.

При объединении независимых опытов число исходов резко растёт, поэтому правило произведения экономит время и уменьшает риск ошибки.

Базовые модели случайных опытов: монета и игральный кубик.

Перебор вариантов и дерево решений

Маршрут по развилкам

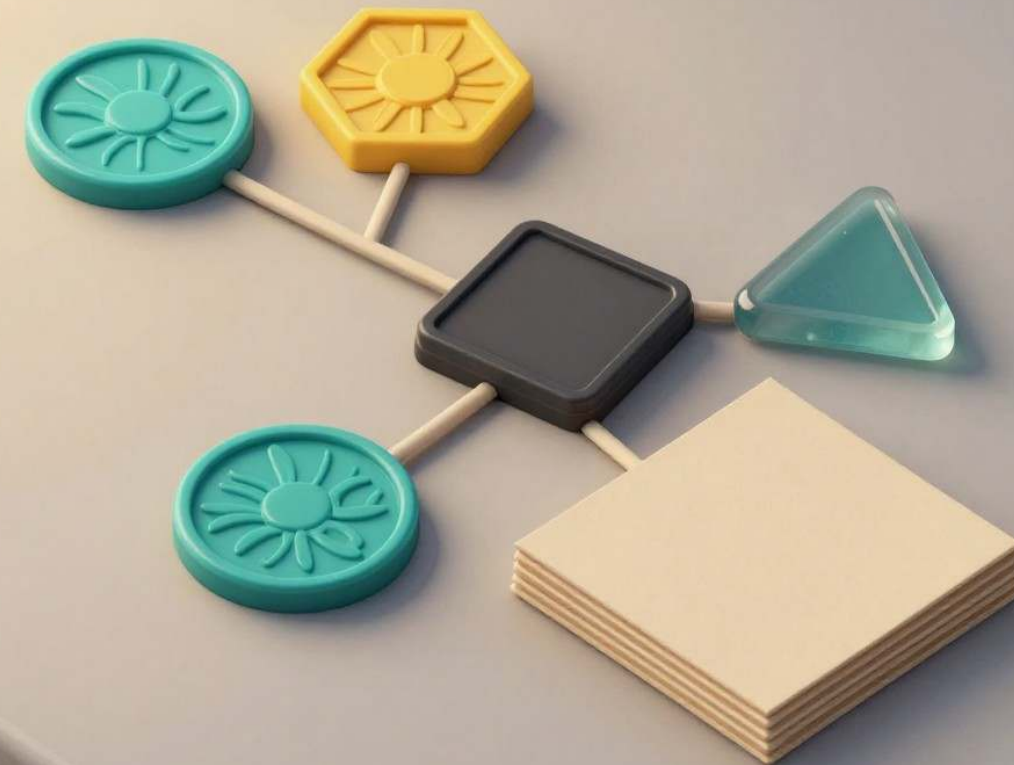
У ученика есть три пути до школы и два варианта возврата домой. Дерево решений показывает все пары маршрутов: сначала ветви для дороги утром, затем для дороги вечером. Такой рисунок сразу делает перебор полным и понятным.



Выбор пары для проекта

Из четырёх ребят нужно выбрать первого и второго участника. Сначала строятся ветви по первому выбору, потом по второму. Если не перейти ко второй ступени дерева, легко пропустить часть пар или случайно посчитать один вариант дважды.

choosing first and second



Набор из разных предметов

В магазине есть три вида тетрадей и две обложки. Дерево вариантов помогает перечислить все сочетания без пропусков: для каждой тетради показываются все возможные обложки. Такой способ особенно полезен, когда выбор идёт по шагам.



Типичные ошибки в комбинаторных задачах

1

Одна из самых частых ошибок — считать один и тот же набор несколько раз, записывая его в разном порядке. Перед ответом нужно проверить, не повторяются ли варианты.

2

Иногда порядок не замечают там, где он важен. Тогда правильнее было бы считать разные последовательности отдельно, например при составлении кода, очереди или пароля.

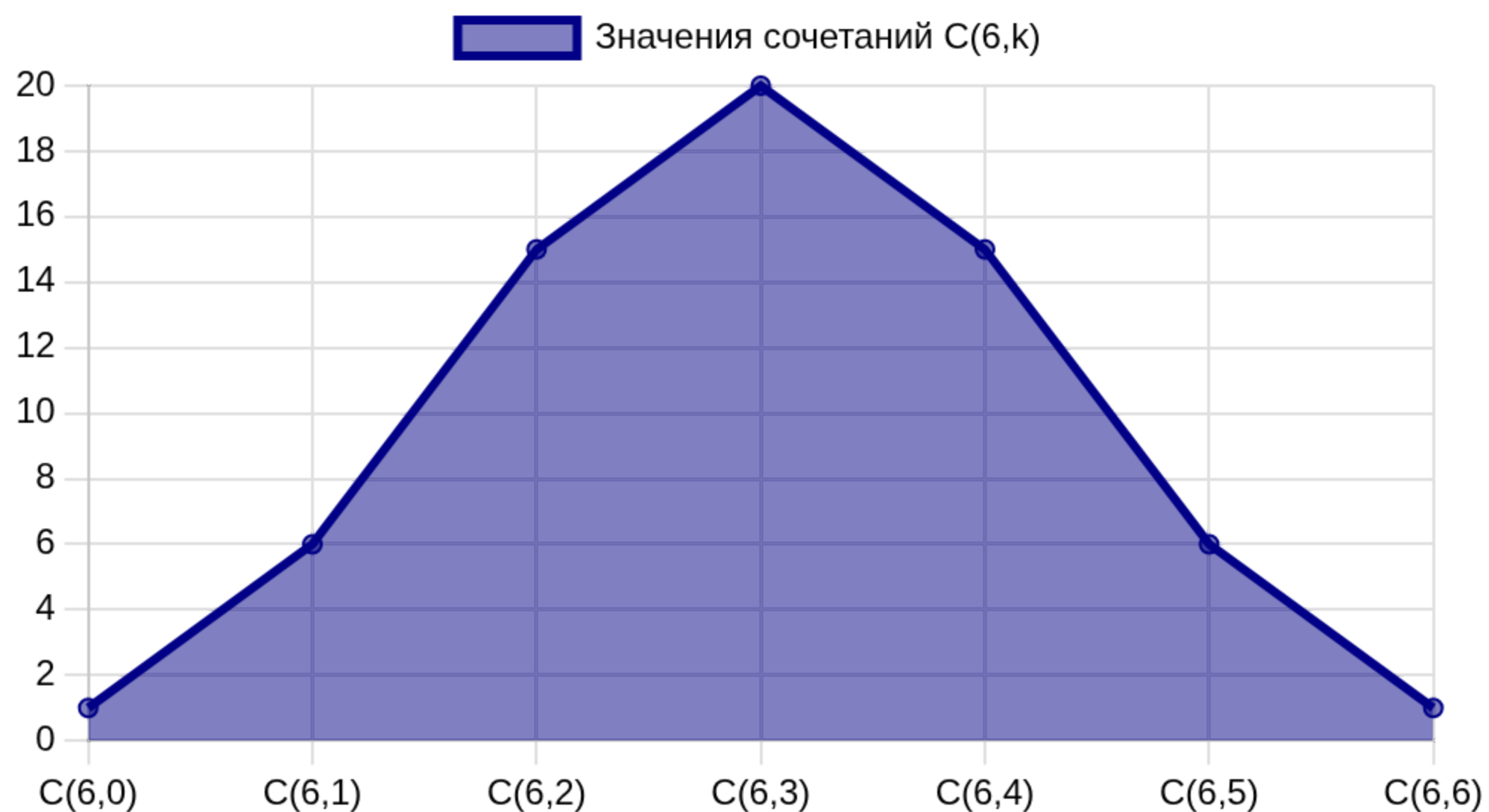
3

Ещё одна проблема — забыть про повторения или, наоборот, случайно разрешить их, хотя по условию они запрещены. Это сильно меняет число возможных вариантов.

4

Наконец, нельзя останавливаться слишком рано и пропускать часть случаев. Полный перебор должен охватывать все варианты ровно один раз, без пробелов и дублей.

Как меняется число способов выбора



Симметрия значений показывает, что выбор k предметов равен выбору оставшихся $6-k$.

Максимум обычно находится около середины ряда, поэтому выбор примерно половины предметов даёт больше всего сочетаний.

Значения $C(6,k)$ по формуле сочетаний.

Мини-набор задач для проверки

Задача	Тип	Ответ
4 книги	Перестановка	24
2 дежурных из 7	Сочетание	21
3-значный код	Размещение	1000
Команда из 5 из 12	Сочетание	792

Короткие примеры помогают быстро определить тип задачи и выбрать нужную формулу.

По формулировке задачи можно сразу выбрать модель счёта: порядок, выбор части предметов или отсутствие порядка.

Стандартные формулы перестановок, размещений и сочетаний.

Главные выводы по теме

В комбинаторных задачах главное — сначала понять, что именно считается: выбор, порядок или распределение. Тогда правило суммы, произведения, перестановки, размещения и сочетания применяются без путаницы.