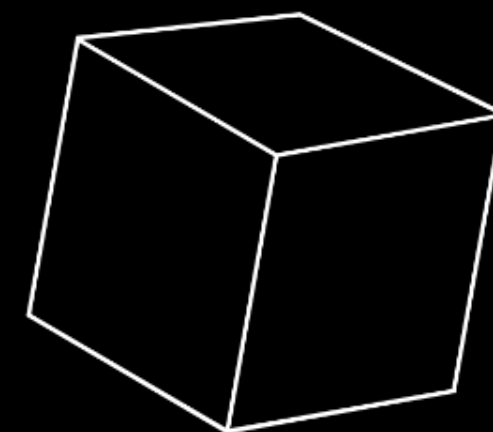
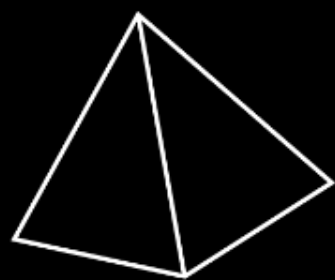
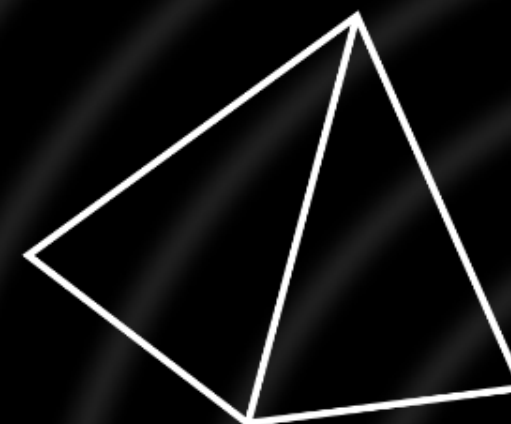
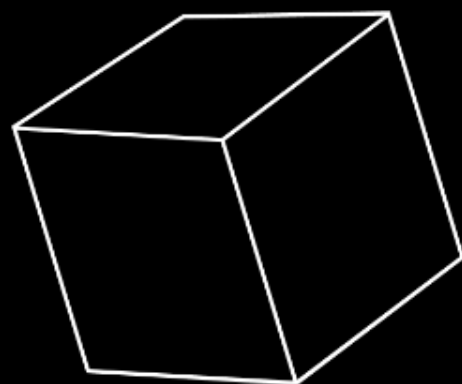
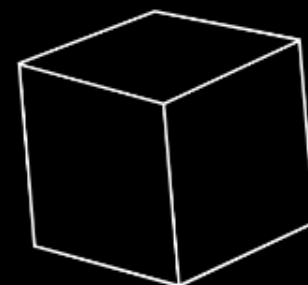




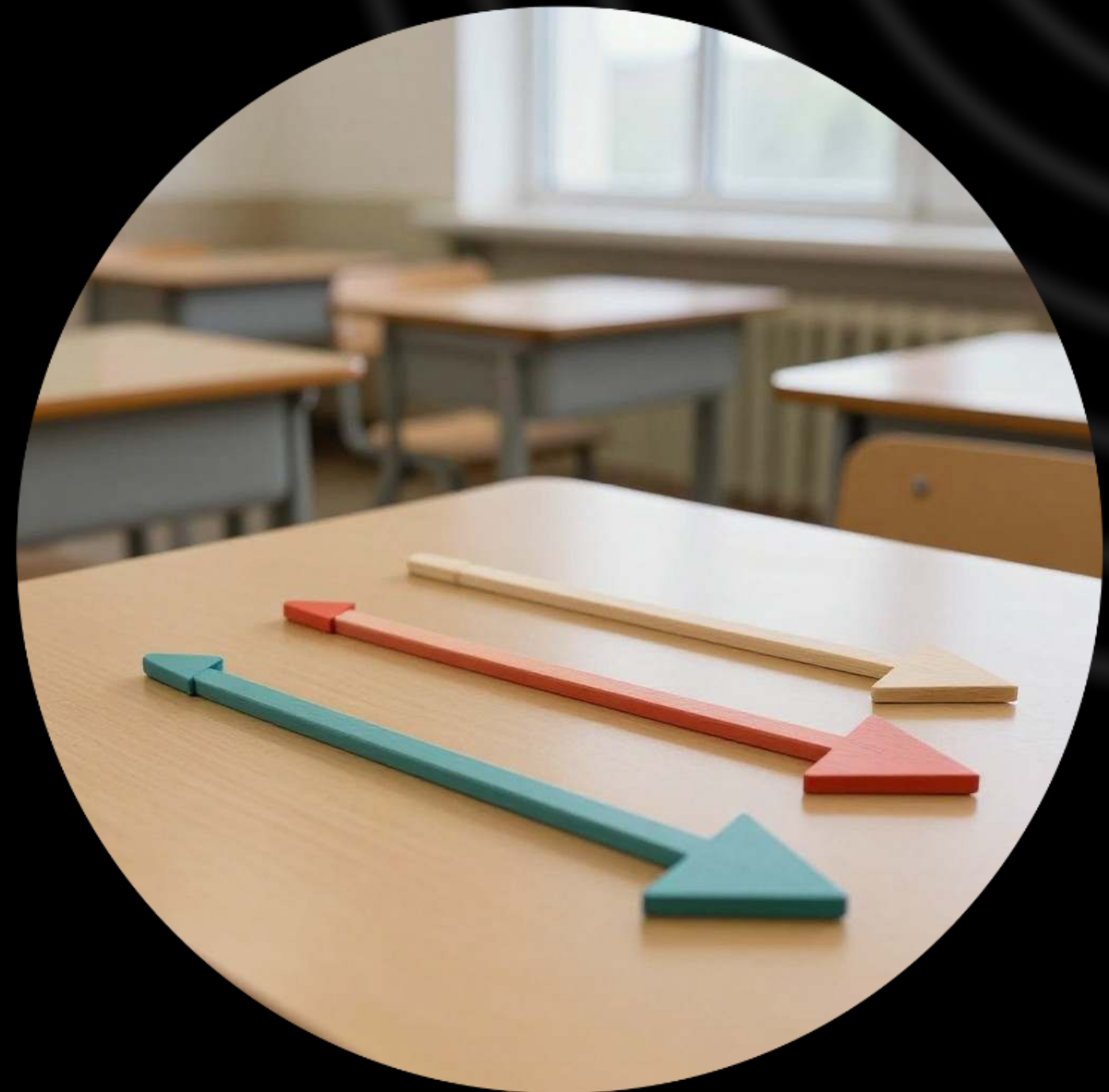
# Равенство векторов: определение, признаки и примеры

Равные векторы задают одинаковое перемещение: одна длина, одно направление, независимо от точки рисунка.



# Почему равенство векторов важно в 9 классе

Векторы помогают описывать перемещения, сравнивать отрезки и обосновывать свойства фигур. Понимание равенства выстраивает мост между геометрией, координатами и движением по плоскости — особенно при задачах на перенос и анализ многоугольников.

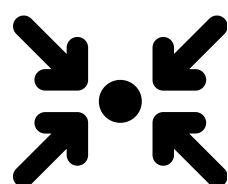


# Что называют вектором



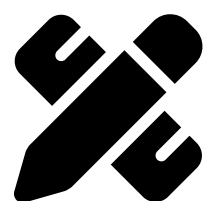
## Направленный отрезок

Вектор — это направленный отрезок: у него есть начало и конец. Благодаря направлению он показывает не только величину, но и сторону, в которую происходит перемещение на плоскости.



## Длина и модуль

Длина вектора называется модулем. Её обозначают  $|\vec{a}|$  или  $|\vec{AB}|$ . Модуль выражает, на сколько единиц вектор «растягивается» при перемещении.



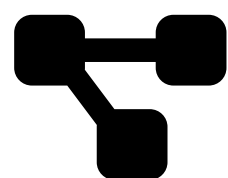
## Обозначения

Вектор записывают буквой со стрелкой или двумя буквами, например  $\vec{a}$  или  $\vec{AB}$ . Такое обозначение сразу фиксирует, что речь идёт именно о направленном отрезке.



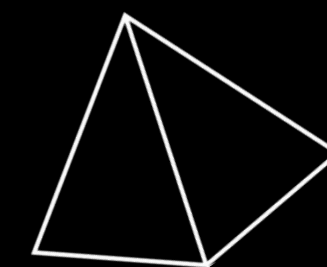
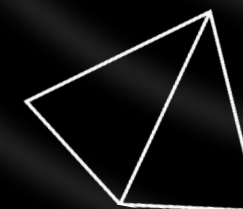
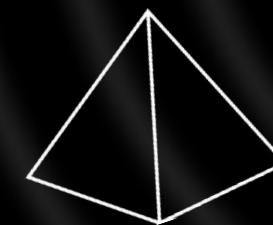
## Нулевой вектор

Нулевой вектор имеет длину 0 и не имеет определённого направления. На координатной сетке он соответствует «нулевому сдвигу», то есть начальная и конечная точки совпадают.

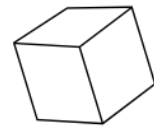


## Действие на плоскости

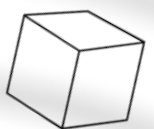
Вектор удобно использовать как модель перемещения: он задаёт направление движения и величину сдвига. Поэтому с ним связаны построения и сравнение геометрических объектов.



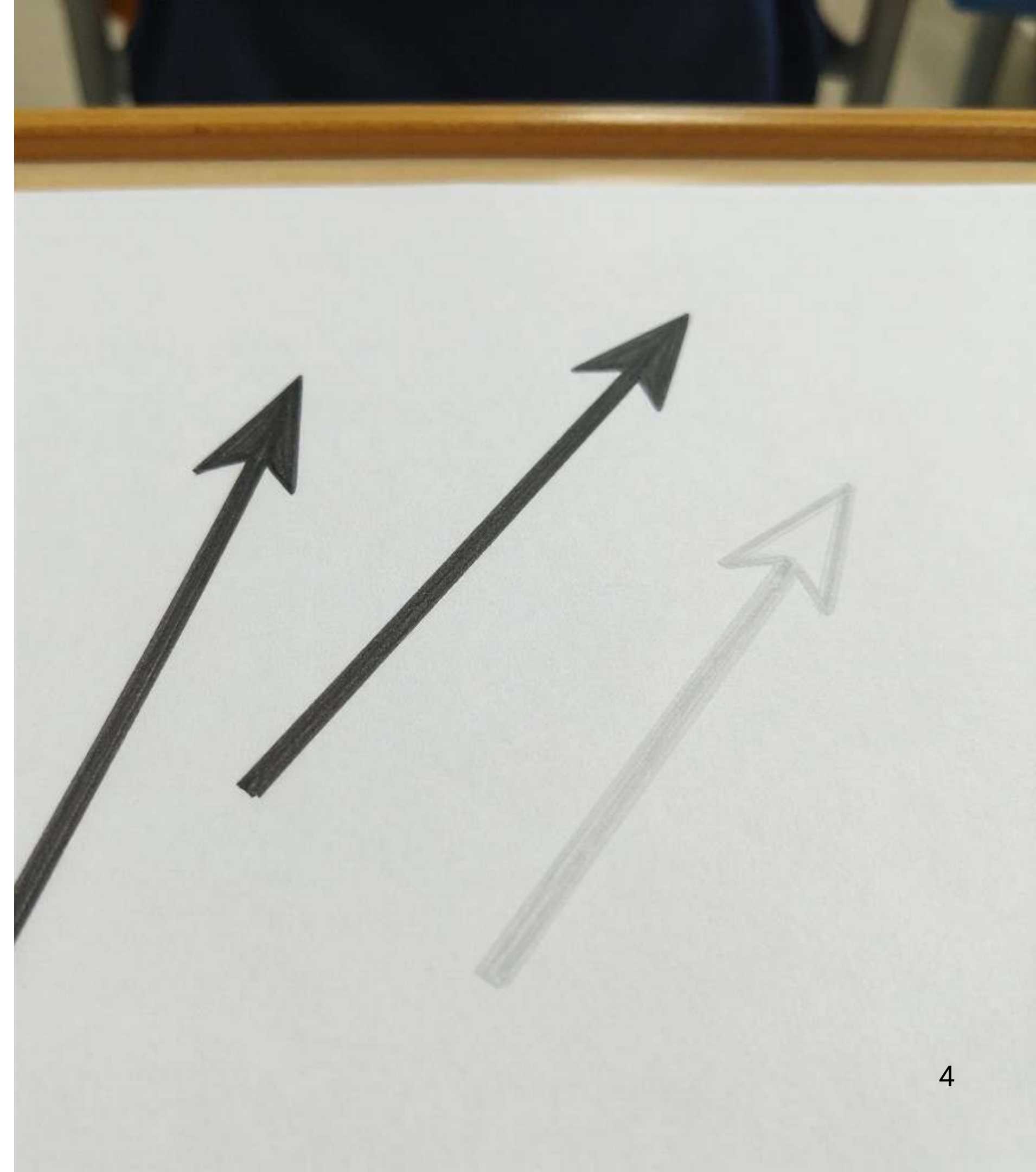
# Как выглядят равные векторы на рисунке



Равные векторы изображают стрелками одинаковой длины и направленными в одну сторону. Их начала могут располагаться в разных местах чертежа, но смысл перемещения должен совпадать.



Обычно показывают, что один вектор можно мысленно перенести параллельно самому себе и «совместить» со вторым. Тогда длина и направление не изменятся, а подписи указывают одинаковый модуль.



# Определение равных векторов

1

Два вектора равны, когда их длины совпадают, а направление одно и то же. Это означает, что при перемещении они задают одинаковую величину сдвига и «смотрят» в одну сторону.

2

Сонаправленность важна: оба вектора направлены вдоль параллельных прямых. Даже если их носители лежат в разных местах, равенство сохраняется, пока направления совпадают.

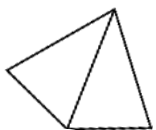
3

Положение на листе само по себе роли не играет. Для равенства достаточно совпадения модуля и направления — именно так сравнивают векторы в школьных задачах.

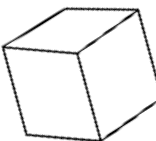
# Равные и неравные векторы: основные признаки

---

| Признак                    | Равные        | Неравные         |
|----------------------------|---------------|------------------|
| Длина                      | Совпадает     | Хотя бы разная   |
| Направление                | Совпадает     | Нарушено         |
| Можно совместить переносом | Накладываются | Не накладываются |



Сравните векторы по длине, направлению и тому, накладываются ли они друг на друга при параллельном переносе.

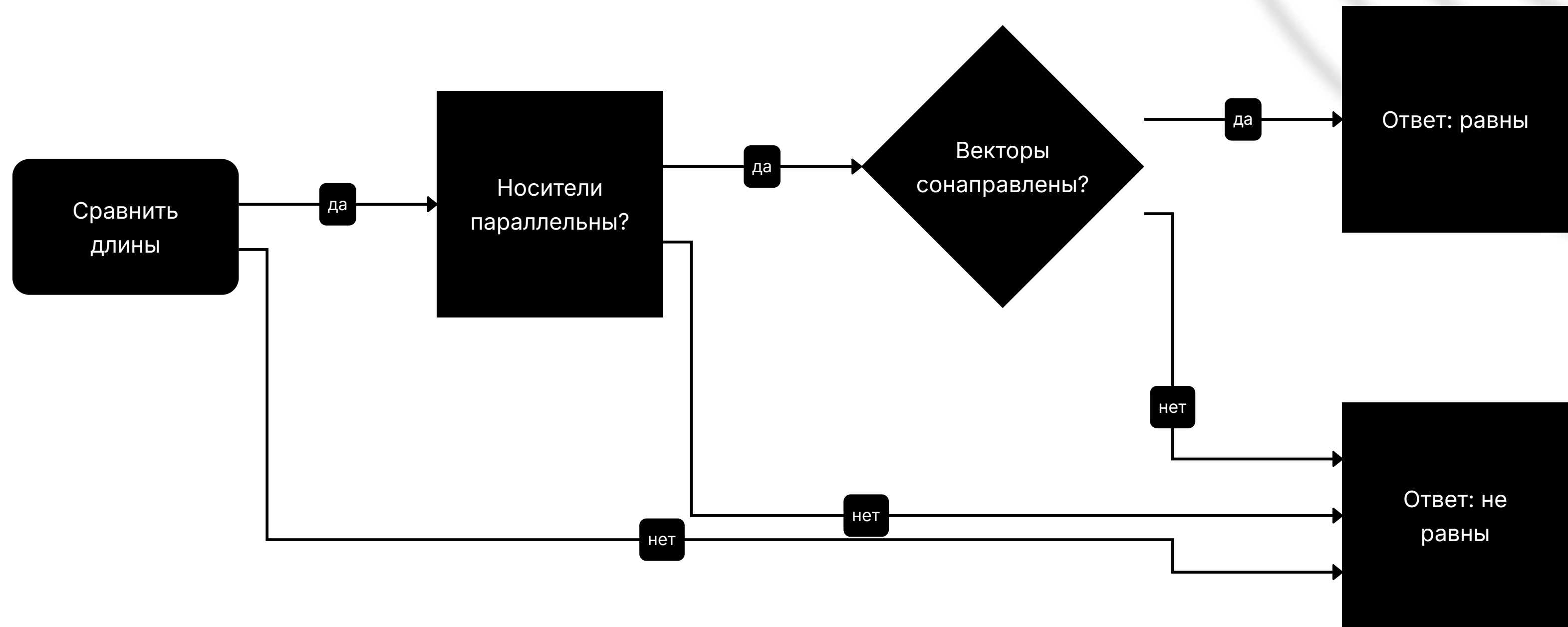


Ключевой вывод: одинаковая длина недостаточна. Для равенства обязательно одновременно совпадают длина и направление.

# Проверка равенства двух векторов

Алгоритм сравнения: длина → параллельность носителей → направление → вывод.

---



# Сонаправленные и противоположно направленные векторы

1

Сонаправленные векторы указывают в одну и ту же сторону. Их направления совпадают, поэтому при равных длинах они могут быть равными.

2

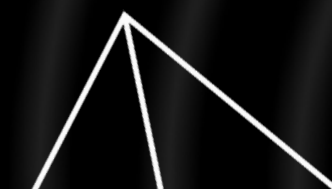
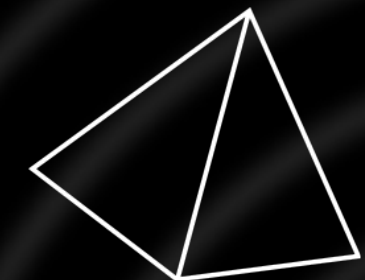
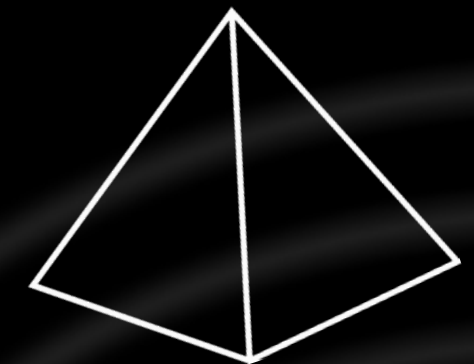
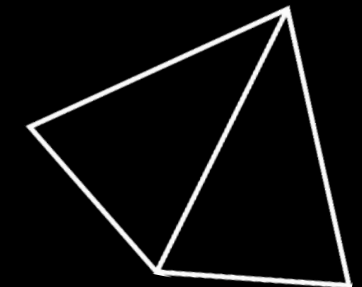
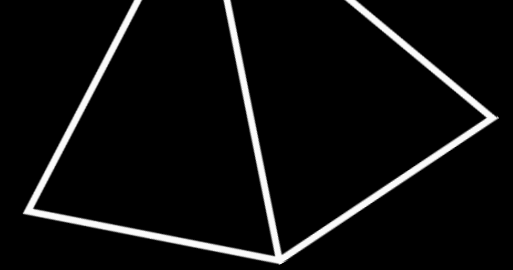
Противоположно направленные векторы «смотрят» друг на друга: они указывают в разные стороны вдоль одной линии или параллельных прямых.

3

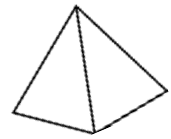
Даже если модули таких векторов одинаковы, они не равны, потому что условие сонаправленности нарушено.

4

Например, два вектора на одинаковое число клеток вправо и влево противоположно направлены и поэтому не являются равными.



# Что определяет равенство векторов



Итак, равенство опирается на два обязательных условия. Проверять, где в чертеже расположены векторы, обычно не нужно.

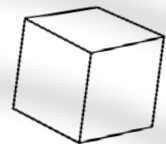
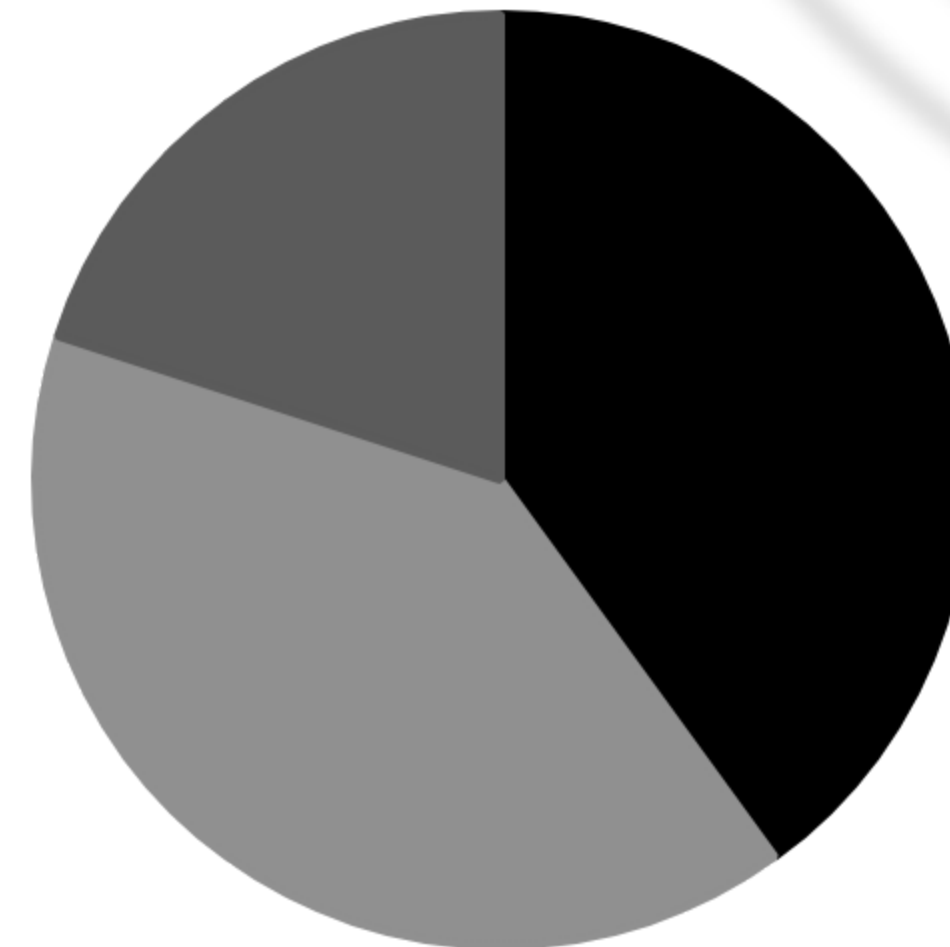


Диаграмма подчёркивает: если совпадает только длина или только направление, равенства не будет. Положение важно лишь для удобства рисунка, но не для результата.

■ Длина совпадает    ■ Направление совпадает  
■ Положение на плоскости не влияет



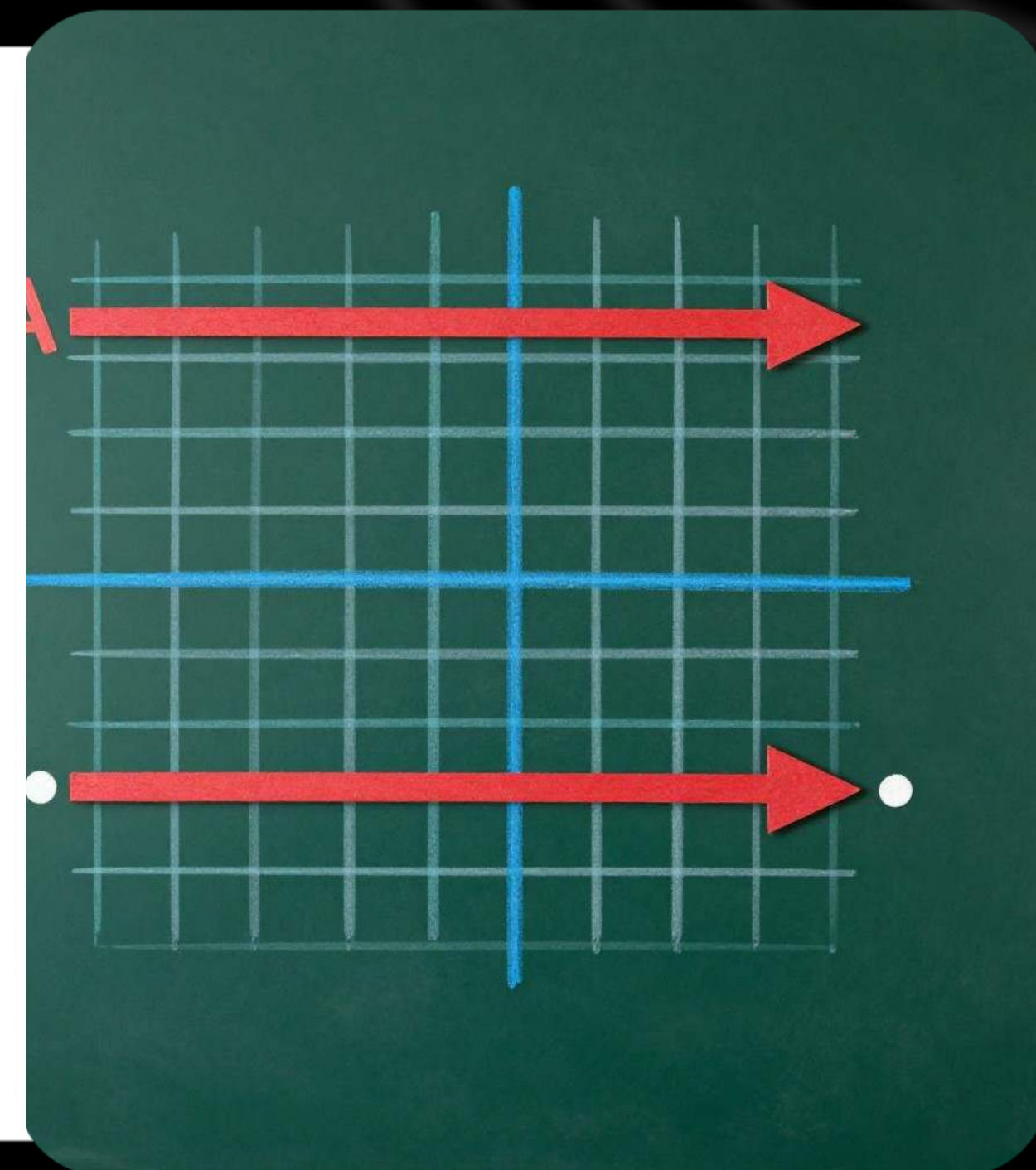
# Равные векторы на координатной плоскости

## Сдвиг по осям

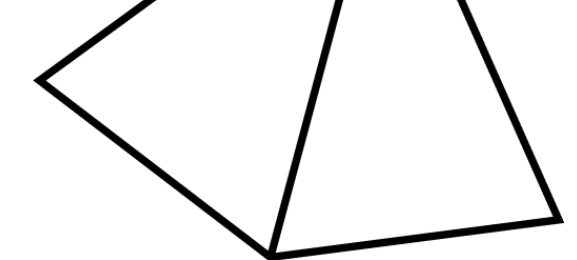
На координатной сетке равные векторы задают одинаковый сдвиг по осям: одинаковое число шагов вправо или влево и одинаковое число шагов вверх или вниз. Поэтому разные рисунки могут описывать одно и то же перемещение.

## Запись через координатные приращения

Например, вектор с приращением на 3 клетки вправо и 2 клетки вверх равен любому другому вектору с тем же приращением координат. Такая запись через начальную и конечную точки помогает сравнивать векторы точно.



# Примеры равных векторов



1

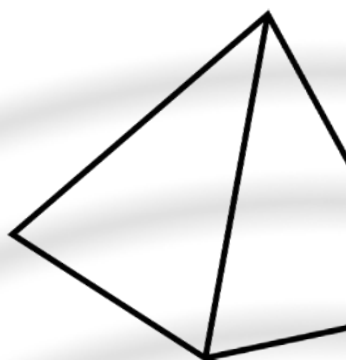


Векторы  $\rightarrow AB$  и  $\rightarrow CD$  равны, если отрезки  $AB$  и  $CD$  имеют одинаковую длину и направлены одинаково. Тогда, куда бы ни были нарисованы стрелки, равенство сохраняется при параллельном переносе.

2



На координатной плоскости равными считаются векторы с одинаковыми приращениями координат: например,  $(2; 1)$  и  $(2; 1)$ . Это означает, что один вектор задаёт тот же сдвиг вправо на 2 и вверх на 1.



3



Если два перемещения дают один и тот же итоговый сдвиг по горизонтали и вертикали, векторы равны. Поэтому можно сравнивать движения по координатам, а не по тому, как они расположены на рисунке.



# Примеры проверки равенства векторов

| Вектор 1          | Вектор 2          | Длина     | Направление    | Итог     |
|-------------------|-------------------|-----------|----------------|----------|
| 4 вправо, 1 вверх | 4 вправо, 1 вверх | одинакова | сонаправлены   | равны    |
| 3 вверх           | 3 вниз            | одинакова | противоположны | не равны |
| 2 влево           | 2 влево           | одинакова | сонаправлены   | равны    |

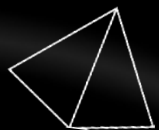
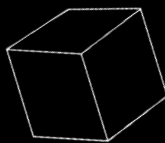


Таблица сравнивает векторы по двум признакам: длине и направлению. Примеры показывают, что одинаковое направление без совпадения длины или совпадение длины без сонаправленности дают разные результаты.



Для вывода нужно одновременно совпадение длины и сонаправленность: при разном направлении векторы не равны, даже если длины одинаковые.

# Частые ошибки при определении равенства

1



Первая ошибка — считать векторы равными только по одинаковой длине. Длина задаёт «размер», но без направления векторы могут описывать разные перемещения, а значит не совпадут по равенству.

2



Вторая ошибка — путать равенство с параллельностью. Параллельные векторы могут смотреть в разные стороны, поэтому при проверке нужно не только убедиться в параллельности, но и сравнить стрелки.

3

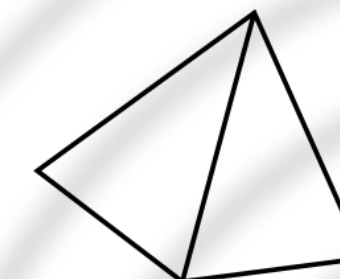
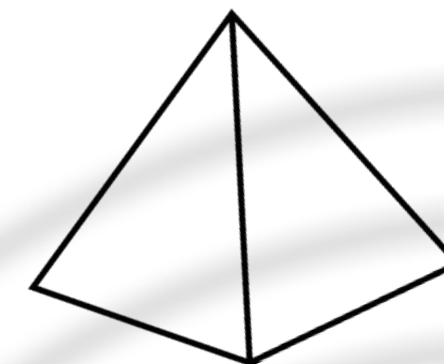
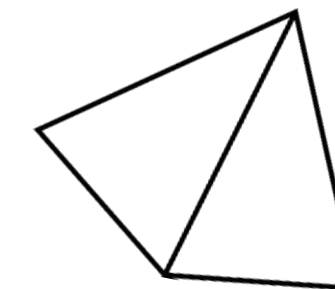
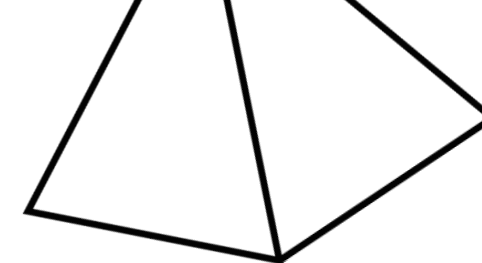


Третья ошибка — не учитывать направление стрелок при сравнении. Даже если векторы выглядят одинаковыми по длине, но указывают в противоположные стороны, они не являются равными.

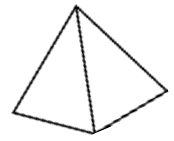
4



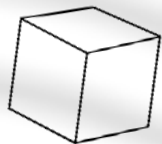
Четвёртая ошибка — сравнивать только положение на рисунке и забывать про перенос. Место на листе не является критерием: важны модуль и направление, которые сохраняются при параллельном переносе.



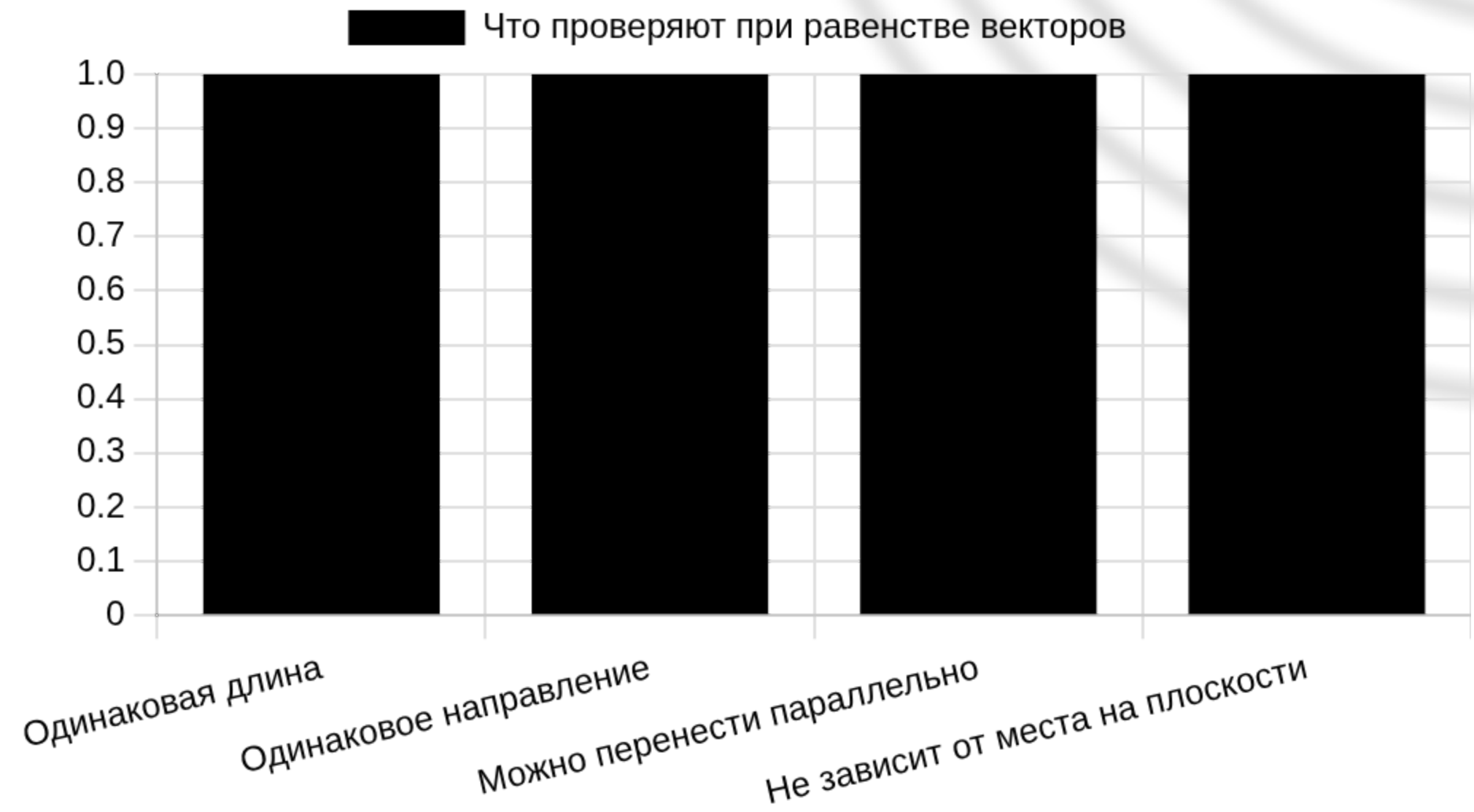
# Свойства, которые помогают решать задачи



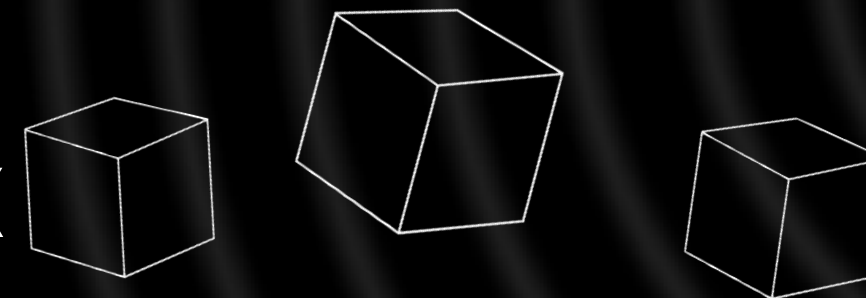
Эти свойства позволяют работать с чертежом: сначала переносим вектор мысленно, затем связываем его с нужной стороной или диагональю фигуры и проверяем совпадение перемещения.



Главный вывод: равенство — это «длина плюс направление», а перенос и положение лишь помогают увидеть одинаковые векторы на разных местах чертежа.

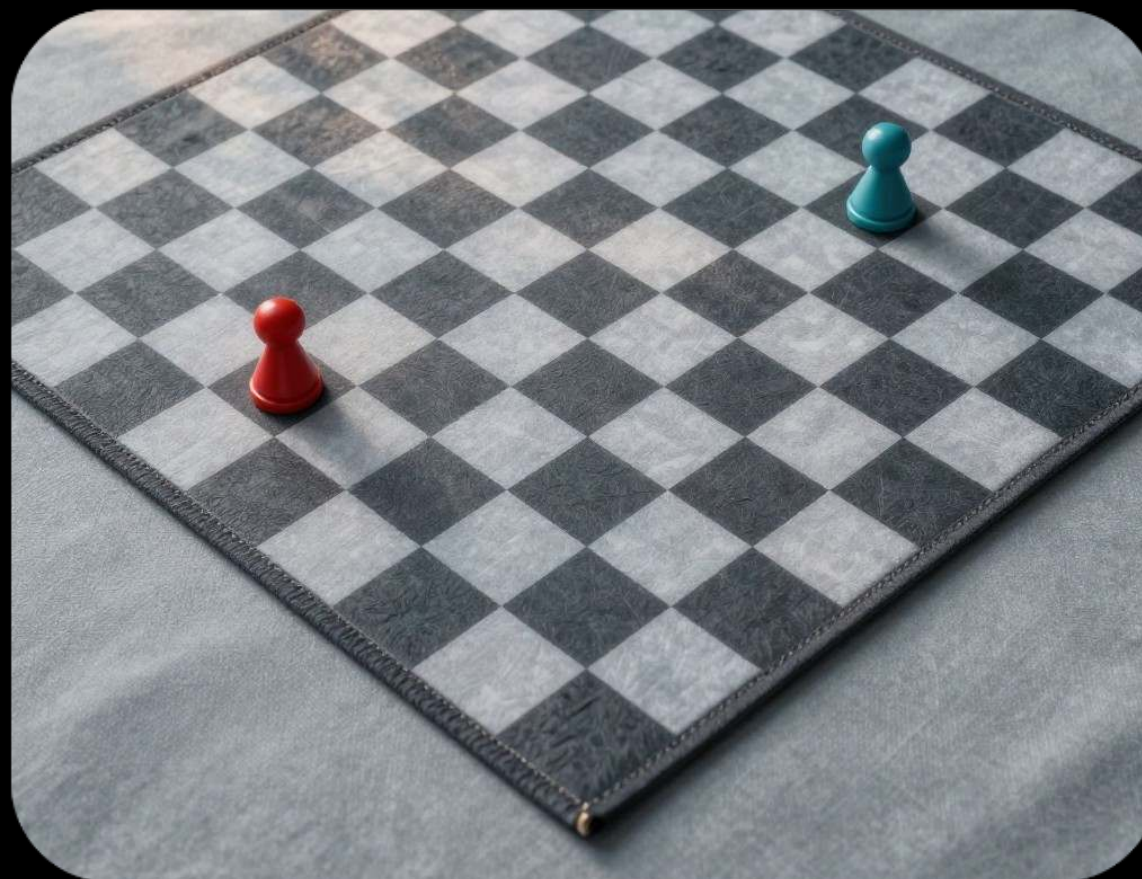
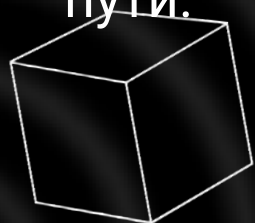


# Равные векторы в реальных ситуациях



## Маршрут на карте: одинаковый сдвиг

Вы строите путь по городу и замечаете: если итоговый сдвиг «как было» — например, вправо на два квартала и вверх на один, то два разных маршрута описываются равными векторами. Важно направление, а не выбранные улицы по пути.



## Клетчатое поле: шаги в игре

На клетчатом поле персонаж делает ходы: «влево 2 клетки и вверх 1» или «вправо 1 и вверх 2» до тех пор, пока итог не совпадёт. Когда совпадает одинаковый сдвиг по осям, векторы ходов равны, даже если траектории различаются.



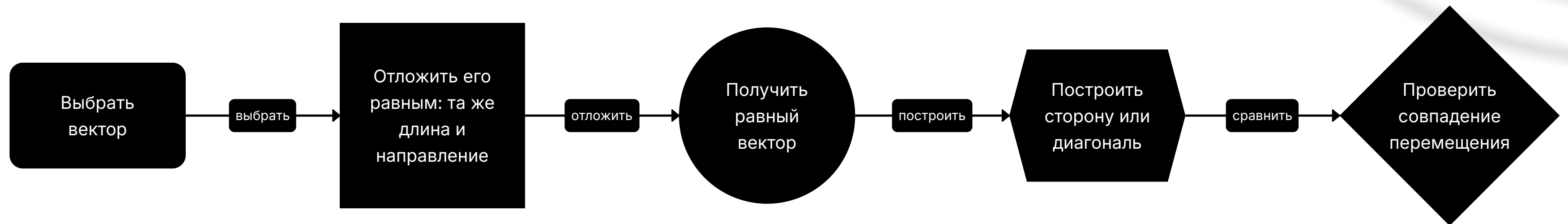
## Траектории движения: поворот и продолжение

В задачах по навигации часто встречаются команды вида «сдвиг на заданную длину в указанную сторону». Если две команды дают один и тот же сдвиг и направлены одинаково, их можно считать равными векторами. Это упрощает сравнение перемещений.

# Связь равных векторов с построением фигур

Параллельный перенос сохраняет длину и направление вектора, поэтому «отложить равный вектор» можно как при построениях, так и при проверке перемещений.

---



# Что важно запомнить

1

Равные векторы имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Это означает: они задают одно и то же перемещение на плоскости, каким бы ни был рисунок или где находятся стрелки.

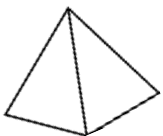
2

Такие векторы можно переносить параллельно, не меняя результата. При переносе сохраняются длина и ориентация стрелок, поэтому равенство не теряется и не зависит от выбора начала векторов.

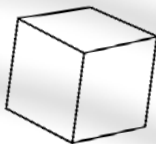
3

Место расположения на листе не влияет на равенство, если совпадают модуль и направление. Именно это правило применяют при сравнении векторов в задачах за 9 класс.

# Мини-проверка понимания признаков равенства



Если длина и направление совпали, векторы равны. Изменение их положения на чертеже само по себе не меняет равенства, поэтому «место» можно не учитывать в выводе.



Линия показывает: определяющими признаками являются два пункта — длина и направление. Третий параметр не является условием равенства, поэтому его вклад равен нулю.



# Итоговые случаи: равны ли векторы

| Случай                                  | Итог        | Почему                |
|-----------------------------------------|-------------|-----------------------|
| Длина равна, направления одинаковы      | равны       | сонаправлены          |
| Длина равна, направления противоположны | не<br>равны | направление<br>разное |
| Длины разные, направления одинаковы     | не<br>равны | длина не<br>совпадает |
| Приращения координат одинаковые         | равны       | тот же сдвиг          |

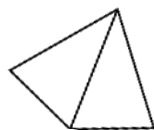
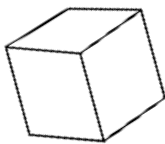


Таблица фиксирует ключевые случаи. В столбце «Итог» указано, равны ли векторы, а в «Почему» — причина. Главная идея: для равенства требуется одновременное выполнение двух условий — одинаковая длина и сонаправленность.



Во всех случаях равенство появляется только при совпадении длины и направления. Любое несоответствие в одном из условий достаточно, чтобы векторы стали неравными.

# Итог: зачем нужно равенство векторов

Равенство векторов помогает сравнивать перемещения, стороны фигур и координатные сдвиги без привязки к месту на рисунке. Поэтому задачи на построение и перенос решаются быстрее: векторы равны при совпадении длины и направления.

