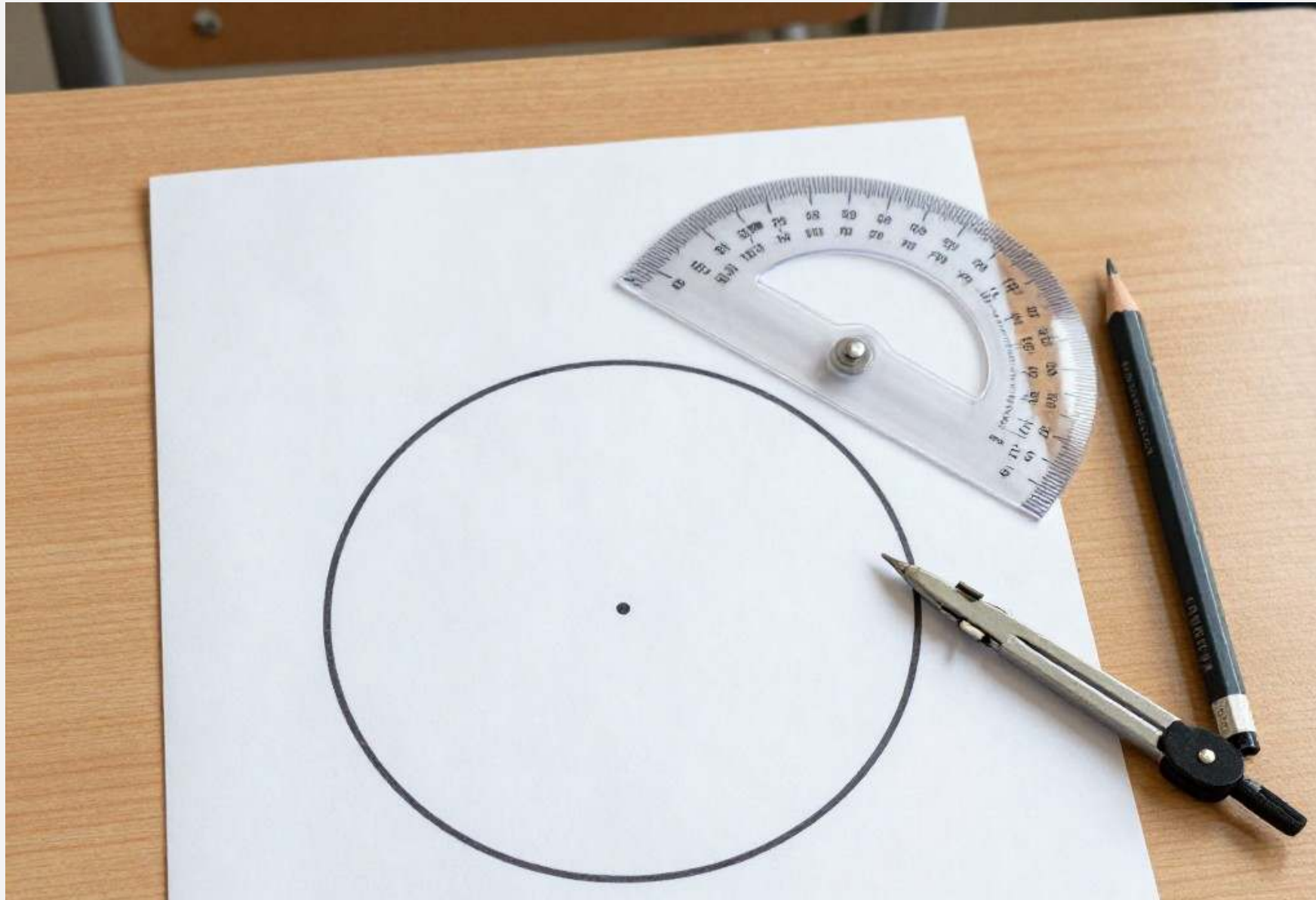


Измерение углов, связанных с окружностью

Узнаем, как находить углы через дуги: от центра и вписанных углов до касательной и хорд.

Окружность как основа для измерения углов



Окружность задаётся центром и радиусом, а её элементы — хорда, дуга, касательная и диаметр — помогают «переводить» задачу на язык дуг. В 9 классе это объединяет темы окружности и прямых и даёт инструмент для экзаменационных решений.

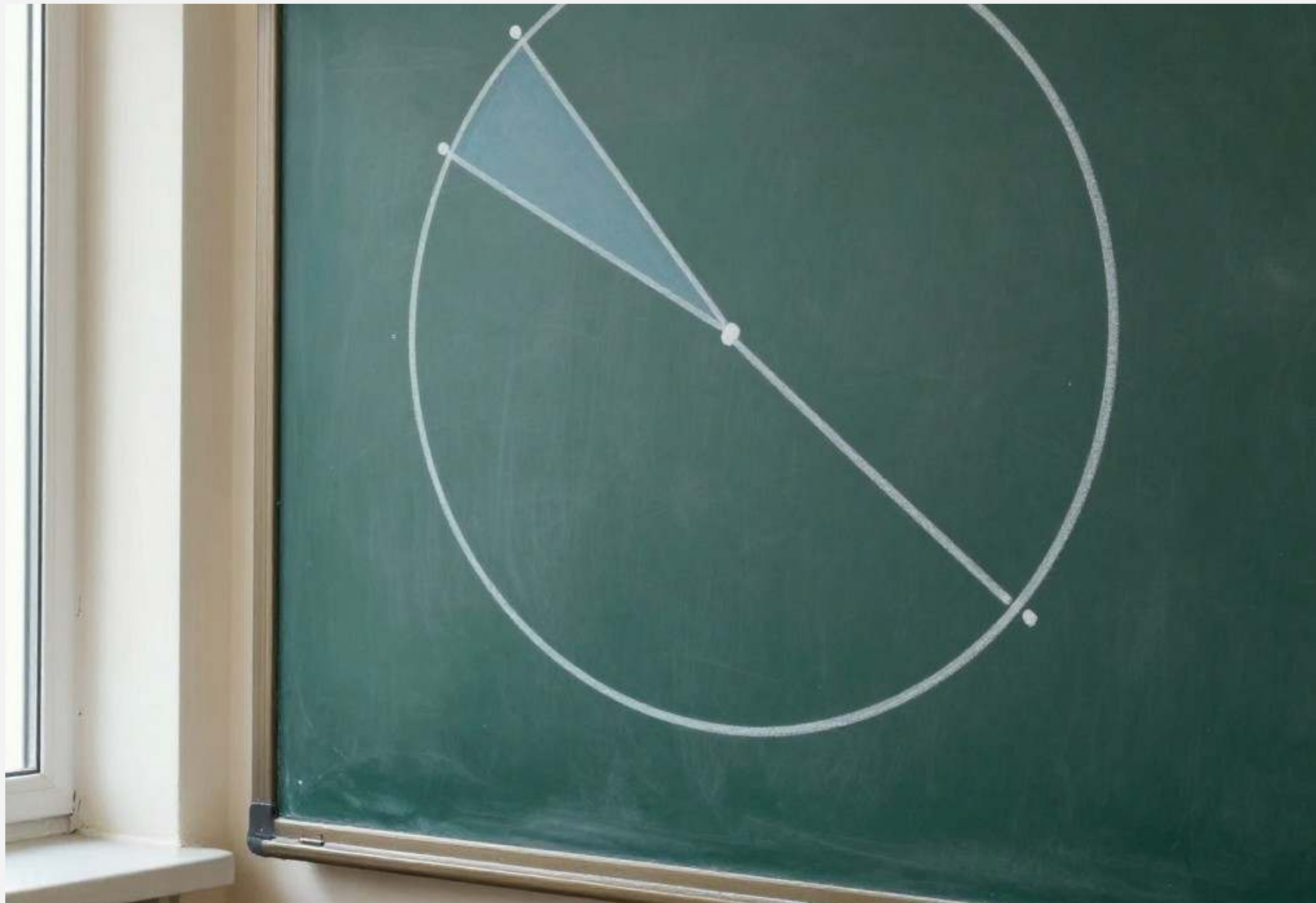
Центральный угол и его дуга

Центральный угол — это угол с вершиной в центре окружности. Его стороны проходят через две точки на окружности, образуя дугу, которую удобно «читать» по градусам.

Главное правило: градусная мера центрального угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается. Например, дуга 80° соответствует центральному углу 80° .

Если рассмотреть все центральные углы вокруг одного и того же центра, их сумма всегда равна 360° , потому что они полностью «закрывают» окружность по кругу.

Вписанный угол и половина дуги



Вписанный угол: вершина на окружности

Вписанный угол имеет вершину на окружности. Его стороны пересекают окружность в двух точках, поэтому угол опирается на определённую дугу между этими точками.

Дуга, хорды и связь между ними

Его градусная мера равна половине дуги, на которую он опирается. Например, дуга 120° соответствует вписанному углу 60° , если дуга выделена правильно на рисунке.

Связь дуги и вписанного угла

Во всех показанных случаях вписанный угол получается ровно «вдвое меньше» дуги, то есть зависимость постоянна и легко переносится на новые задачи.

График подтверждает общую закономерность: измерив дугу, вписанный угол находят делением на 2. Это ускоряет вычисления без транспортира.

Сопоставление по правилу: вписанный угол равен половине дуги (учебные примеры).

100°

При дуге 100° угол получается
ровно наполовину

Геометрическое правило из темы: угол между
касательной и хордой равен половине дуги внутри угла.

**Когда одна прямая касается
окружности, а другая проходит
через точки окружности,
используем правило для угла
между касательной и хордой.**

Угол, образованный двумя хордами внутри окружности

Если две хорды пересекаются внутри окружности, получившийся угол «смотрит» на две дуги. Эти дуги образуют угол и позволяют связать его меру с числами без измерений.

Правило такое: градусная мера угла равна половине суммы мер дуг, на которые он опирается, и которые соответствуют этому углу и его вертикальному углу.

Например, если дуги 70° и 110° , то половина суммы равна 90° . Важно брать именно две нужные дуги, а не всю окружность целиком.

Основные правила измерения углов в окружности

Вид угла	Вершина	Связь с дугой
Центральный	в центре	мера равна дуге
Вписанный	на окружности	мера равна половине дуги
Касательная–хорда	в точке касания	мера равна половине дуги
Пересекающиеся хорды	внутри окружности	мера равна половине суммы дуг

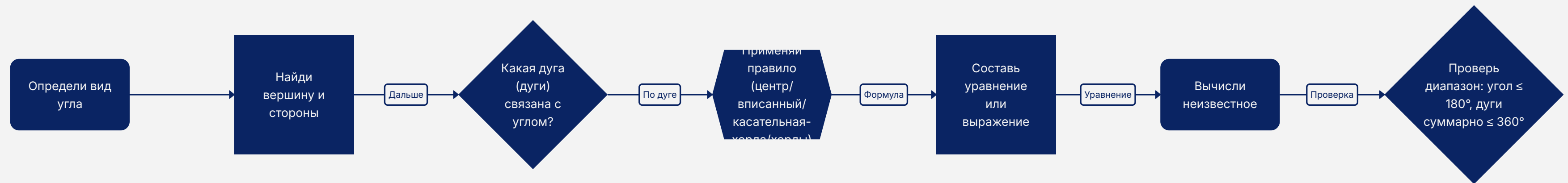
Таблица помогает быстро определить, с какой дугой (или дугами) связана мера угла.

Во всех случаях углы выражаются через дуги, поэтому сначала выделяют дугу (или две дуги), а затем применяют соответствующее деление на 2 и/или суммирование.

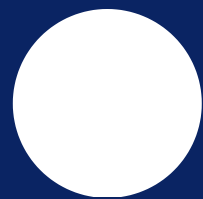
Свод правил из темы об углах и дугах окружности.

Алгоритм решения задач на углы с окружностью

Последовательность помогает не потерять связи между углом, вершиной и дугой.



Диаметр и прямой угол



Полуокружности по 180°

Диаметр делит окружность на две полуокружности. Каждая из них соответствует дуге 180° , поэтому такие углы удобно находить сразу, без дополнительных вычислений по дугам.



Вписанный угол над диаметром

Если вписанный угол опирается на диаметр, он всегда равен 90° . Это сильный признак: как только в задаче видят диаметр, прямой угол часто становится очевидным.



Основа для распознавания треугольника

Свойство про 90° помогает выявить прямоугольный треугольник, вписанный в окружность. В таких задачах диаметр работает как опорная линия для дальнейших шагов решения.



Удобно для вычислений

Диаметр не только «даёт» прямой угол, но и связывает несколько точек окружности через одну общую дугу. Поэтому его часто используют, чтобы быстрее получить нужные величины.

Теорема Фалеса и вписанный треугольник

Если треугольник вписан в окружность и одна его сторона — диаметр, то этот треугольник будет прямоугольным. Угол при вершине на окружности, опирающийся на диаметр, всегда равен 90° .

В задаче можно отметить диаметр, построить две хорды к двум другим точкам окружности и выделить прямой угол внутри треугольника. Такой чертёж помогает быстро понять, где именно искать искомую величину.



Какие типы углов встречаются в задачах чаще всего

На таких занятиях важно уметь не только считать, но и быстро распознавать тип угла, чтобы сразу выбрать правило через дуги.

Диаграмма показывает приоритет вписанных и центральных углов: именно они чаще дают основу для вычислений и доказательств.

Обобщение методики обучения (условные доли для наглядности, без привязки к конкретной выборке работ).

Равные хорды, равные дуги, равные углы

Если хорды в окружности равны по длине, то они стягивают равные дуги. Это свойство позволяет переходить от геометрической величины «отрезок» к величине «дуга».

Когда две хорды одинаковые, можно сравнивать углы, не измеряя их транспортиром. Достаточно установить равенство стягиваемых дуг и перейти к нужному типу угла.

Равные дуги соответствуют равным центральным углам: сколько градусов содержит дуга, столько же имеет центральный угол, который её «видит» из центра окружности.

Такие рассуждения полезны и при доказательствах на чертеже: вместо вычислений выстраивается логическая цепочка «равны хорды → равны дуги → равны углы».

Тренировочные значения для проверки правил

Примеры показывают, что для вписанного угла он равен половине дуги, а для диаметра — соответствует прямому углу. Для «внутреннего» угла при пересечении применяется сумма нужных дуг.

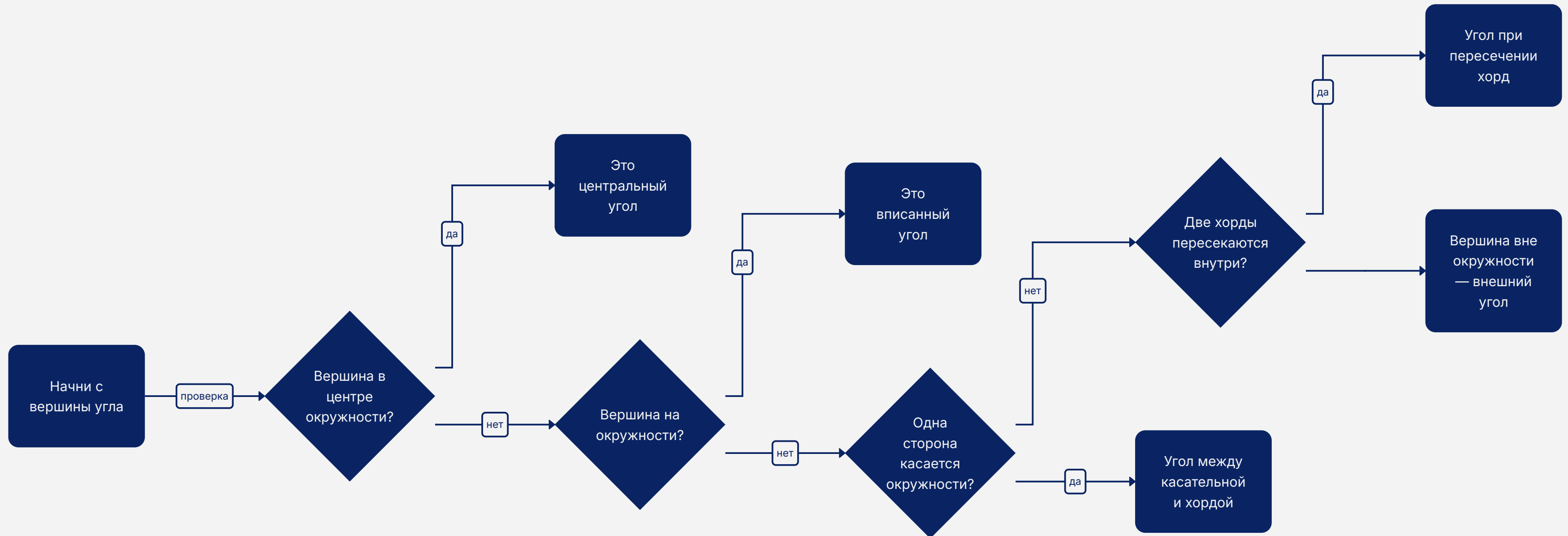
Все строки подтверждают единый принцип: сначала выбирается дуга (или две дуги), затем применяется правило, и результат получается без «догадок».

Дуга	Соответствие	Результат
30°	вписанный угол	15°
90°	вписанный угол	45°
140°	вписанный угол	70°
40° и 100°	внутренний угол	70°
180°	вписанный угол	90°

Учебные тренировочные соответствия на основе правил связи угла и дуги (условные примеры).

Как определить вид угла на чертеже

Ориентир — где расположена вершина и как устроены стороны относительно окружности.



Типичные ошибки в задачах на окружность

Часто путают дугу и хорду: берут длину отрезка там, где требуется мера дуги в градусах. В результате неверно применяется правило «угол равен дуге» или «угол равен половине дуги».

Ещё одна ошибка — использовать всю окружность вместо нужной дуги. В задачах с вписанными углами важно выделить именно ту дугу, на которую опирается угол, а не дугу «между другими точками».

Иногда забывают, что вписанный угол всегда в 2 раза меньше дуги. Также пропускают вертикальные углы при пересечении хорд: они равны, и без этого теряются значения и уравнения.

Пример последовательного вычисления углов

Дуга задана величиной 110° . Тогда вписанный угол, опирающийся на эту дугу, равен половине, и получаем 55° .

Обе оставшиеся величины совпадают, потому что в каждом случае используется правило «половина дуги»: сначала для вписанного угла, затем для угла с касательной.

Расчёт по стандартным правилам связи угла и дуги (без внешних данных).

Где встречаются окружности и углы в жизни



Колесо и разметка спиц: углы как ориентиры

На колесе видно, как радиусы образуют углы между спицами. Дуга помогает мысленно «отмерять» поворот: сколько градусов повернулось колесо, столько же соответствует длине дуги на окружности. Эти представления легко связать с задачами на центральные и вписанные углы.



Часы: движение по дуге и подсчёт поворота стрелок

Положение часовой и минутной стрелок задаёт угол, который можно рассматривать как часть окружности. Поворот стрелок соответствует дуге, а между стрелками получается угол, связанный с этой дугой. Поэтому циферблат превращается в наглядную схему измерения углов через окружность.

Формулы и факты, которые нужно знать

Центральный угол равен дуге, на которую он опирается: если центральный угол составляет 60° , то соответствующая дуга тоже имеет меру 60° . Это правило связывает геометрию с измерениями в градусах.

Вписанный угол всегда равен половине дуги, на которую он опирается. Поэтому одна и та же дуга «даёт» два разных значения: дуга целиком и угол половинного размера для вписанного треугольника.

Угол между касательной и хордой тоже связан с дугой: его мера равна половине дуги, заключённой внутри этого угла. Главное — правильно выделить именно ту дугу, которая формирует угол на рисунке.

Если внутри окружности пересекаются две хорды, то угол равен половине суммы двух дуг, соответствующих этому и вертикальному углу. Дополнительно: диаметр задаёт дугу 180° и вписанный прямой угол 90° .

Углы и дуги: ключ к успешным задачам 9 класса

Измерение углов, связанных с окружностью, опирается на связь между углом, дугой и центром окружности. Четыре правила помогают находить неизвестные величины, доказывать и проверять чертежи в заданиях 9 класса.