

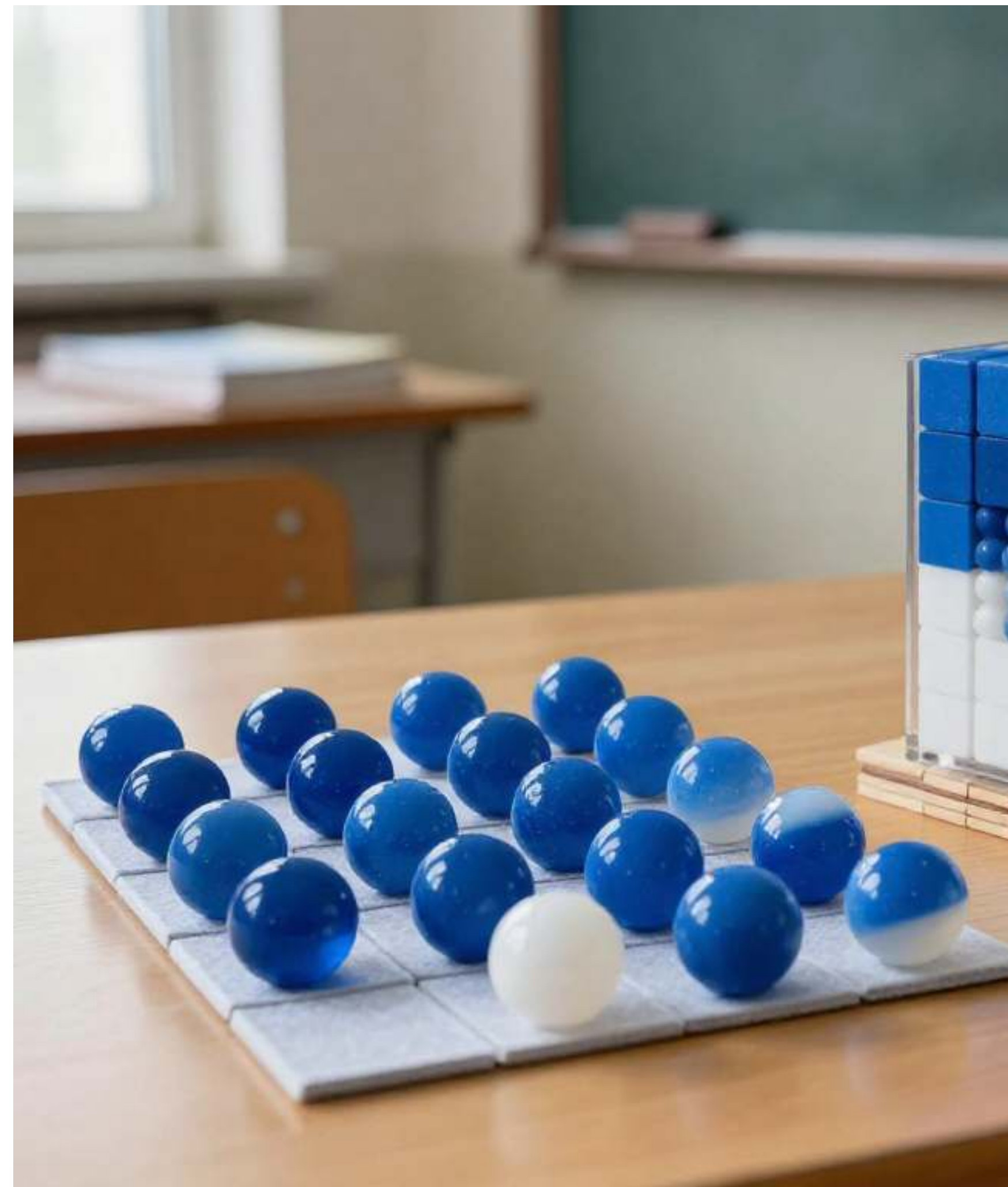
Сочетания без повторений и бином Ньютона

Выбор без порядка и формулы разложения связаны одной идеей.



Комбинаторика и многочлены в 11 классе

Эта тема соединяет подсчёт вариантов и преобразование алгебраических выражений. Она помогает находить число выборов, понимать треугольник Паскаля и быстро раскрывать степень суммы без лишних вычислений.



Сочетания без повторений: определение и формула

Что считают сочетания

Сочетания без повторений показывают, сколько существует способов выбрать k элементов из n , если порядок не имеет значения и каждый элемент можно взять только один раз.

Обозначение и формула

Записывают это число как $C(n, k)$. Основная формула имеет вид $C(n, k) = \frac{n!}{k! (n-k)!}$, где факториалы отражают количество перестановок и повторный учёт одинаковых наборов.

Крайние случаи

Если выбрать ничего нельзя или нужно взять все элементы, получается один способ: $C(n, 0) = 1$ и $C(n, n) = 1$. При выборе одного элемента число вариантов равно n .

Условия применения

Формула работает только при $0 \leq k \leq n$. Если два набора отличаются лишь порядком записи, они считаются одним и тем же сочетанием, а не разными ответами.

Смысл в задачах

Сочетания удобно использовать там, где важен сам состав группы, а не последовательность выбора: команды, наборы предметов, варианты эксперимента или случайные выборки.

Пример выбора команды из класса

● Условие задачи

Из семи учеников нужно выбрать трёх участников команды. Здесь важен только состав тройки, поэтому последовательность выбора не влияет на итоговый ответ.

● Подсчёт вариантов

Число возможных команд находим по формуле сочетаний: $C(7,3) = 7! / (3! \cdot 4!) = 35$. Это означает, что существует тридцать пять различных составов команды.

● Почему это удобно

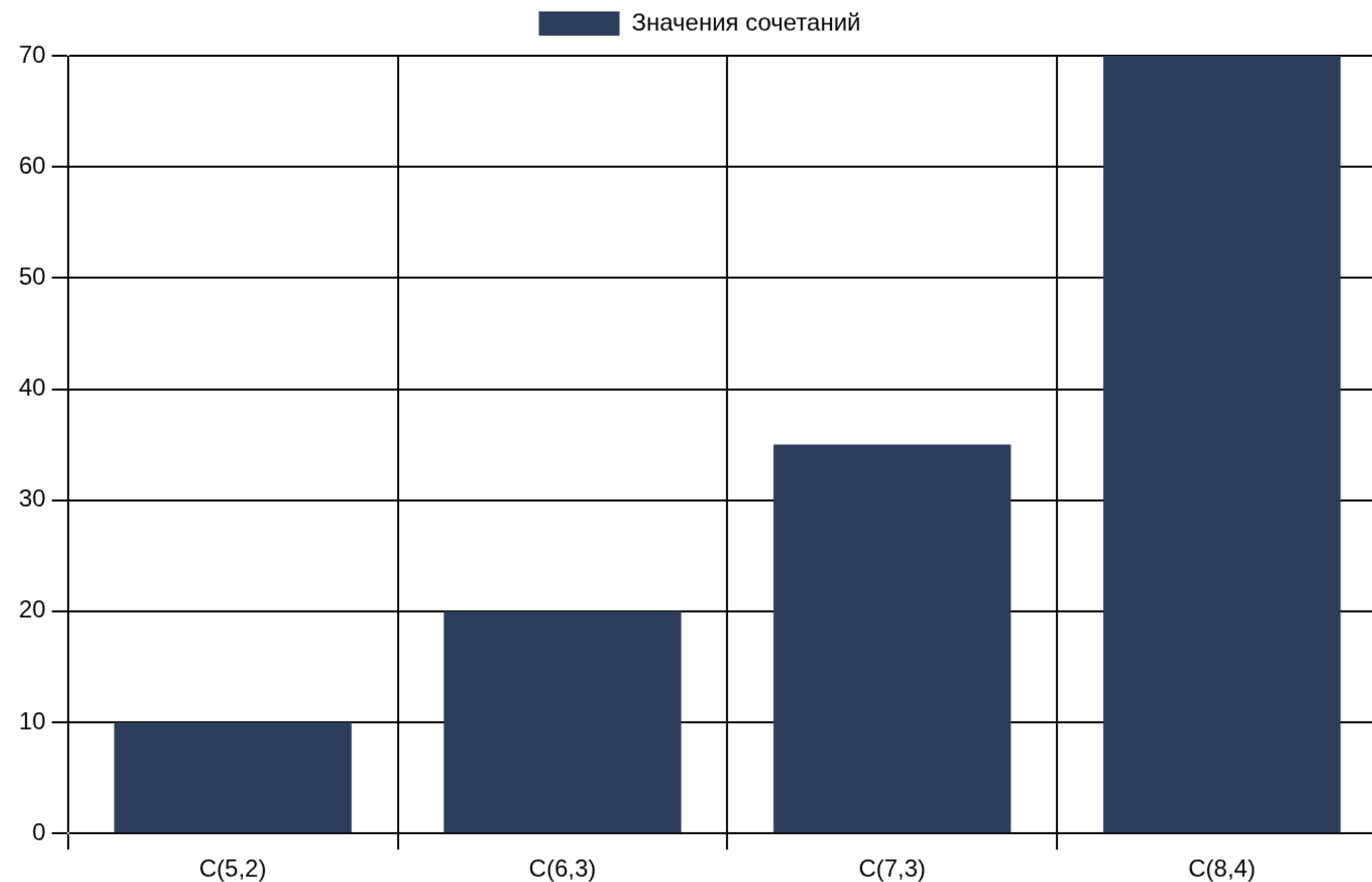
Такой пример показывает, что комбинаторная формула быстро заменяет длинный перебор вариантов. Она особенно полезна, когда вариантов много и пересчитать их вручную уже трудно.



Как быстро растёт число сочетаний

Даже при небольшом увеличении n значения становятся заметно больше, поэтому полное перечисление всех вариантов быстро усложняется.

Рост особенно заметен около середины строки Паскаля; симметрия $C(n, k) = C(n, n-k)$ подтверждается одинаковыми значениями по обе стороны.



По формуле $C(n, k) = n! / (k! (n-k)!)$, вычисления для указанных пар n и k .

Основные свойства сочетаний

01

Симметрия

Сочетания симметричны: $C(n, k) = C(n, n-k)$. Выбрать k элементов означает то же самое, что выбрать все остальные $n-k$ элементов, поэтому значения совпадают.

03

Сумма всех сочетаний

Если просуммировать все $C(n, k)$ по k от 0 до n , получится 2^n . Каждый из n элементов может либо войти в выбор, либо не войти.

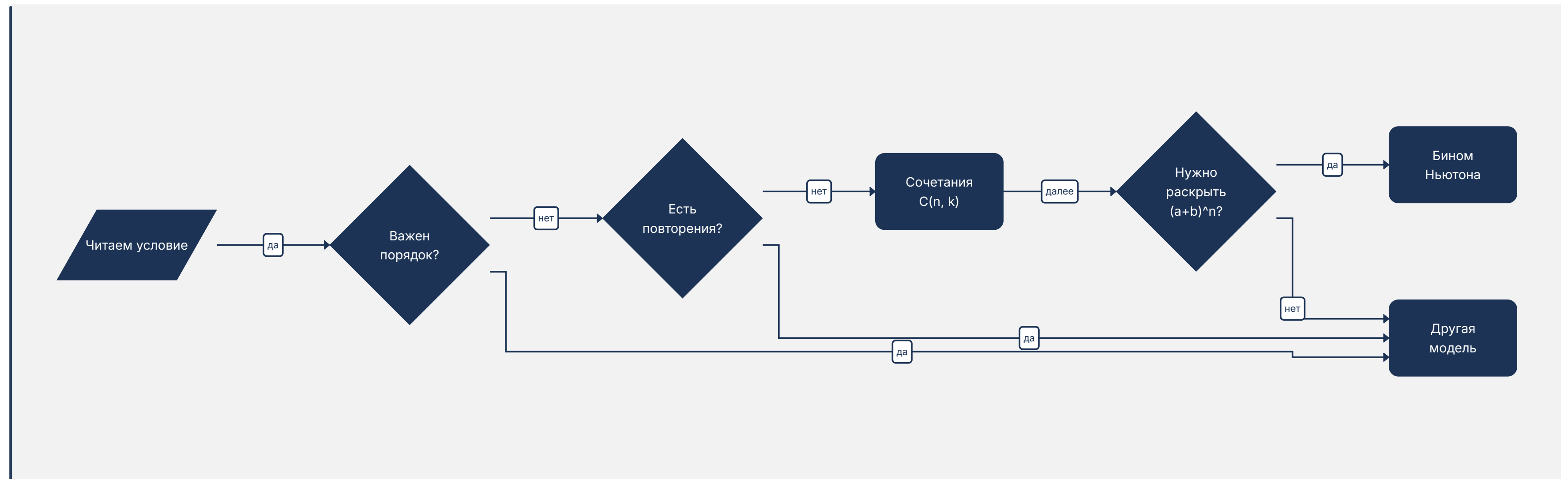
02

Рекуррентная связь

Формула $C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$ показывает, что каждое число строится из двух соседних над ним. Именно так возникает треугольник Паскаля.

Как выбрать нужную формулу

Схема помогает связать текст задачи с подходящим способом подсчёта или разложения.



Треугольник Паскаля в числах и формулах



Строка, где видны сочетания

В каждой строке треугольника Паскаля собраны коэффициенты для фиксированного n . Края всегда равны 1, а внутренние числа получаются как сумма двух ближайших элементов сверху. Поэтому таблица одновременно служит и инструментом подсчёта сочетаний, и способом увидеть закономерность без вычислений по формуле.



От рисунка к формуле

Если выделить одну строку, например для $n=5$ или $n=6$, можно сразу прочитать нужные значения $C(n, k)$. Та же строка становится коэффициентами в разложении бинома Ньютона, поэтому на рисунке особенно наглядно видно, как комбинаторика превращается в алгебру.

Типовые значения сочетаний

Таблица показывает несколько часто используемых значений и помогает быстро увидеть симметрию в строках треугольника Паскаля.

При замене k на n-k значение не меняется. Наибольшие числа в строке располагаются около середины, особенно при чётном n.

n	k	C(n, k)	Примечание
6	2	15	симметрия
6	3	20	центр строки
7	2	21	симметрия
7	3	35	центр ближе
8	4	70	середина

Бином Ньютона: общая формула

1. Общий вид

Формула бинома Ньютона записывается так: $(a+b)^n = \sum C(n, k) a^{n-k} b^k$, где k пробегает все значения от 0 до n . Она даёт готовое разложение суммы.

2. Откуда берутся коэффициенты

Каждый коэффициент при одночлене равен соответствующему сочетанию $C(n, k)$. Это означает, что алгебраическое разложение строится на том же комбинаторном принципе, что и подсчёт вариантов.

3. Как меняются степени

При увеличении k степень a уменьшается, а степень b возрастает. В результате все одночлены идут по строгой схеме: $a^n, a^{n-1}b, \dots, b^n$.

4. Практическая польза

Формула особенно удобна при больших n , когда перемножать скобки по очереди долго и неудобно. С её помощью можно быстро находить нужный член и коэффициент.

Разложение $(a+b)^3$ как наглядный пример

Три слагаемых

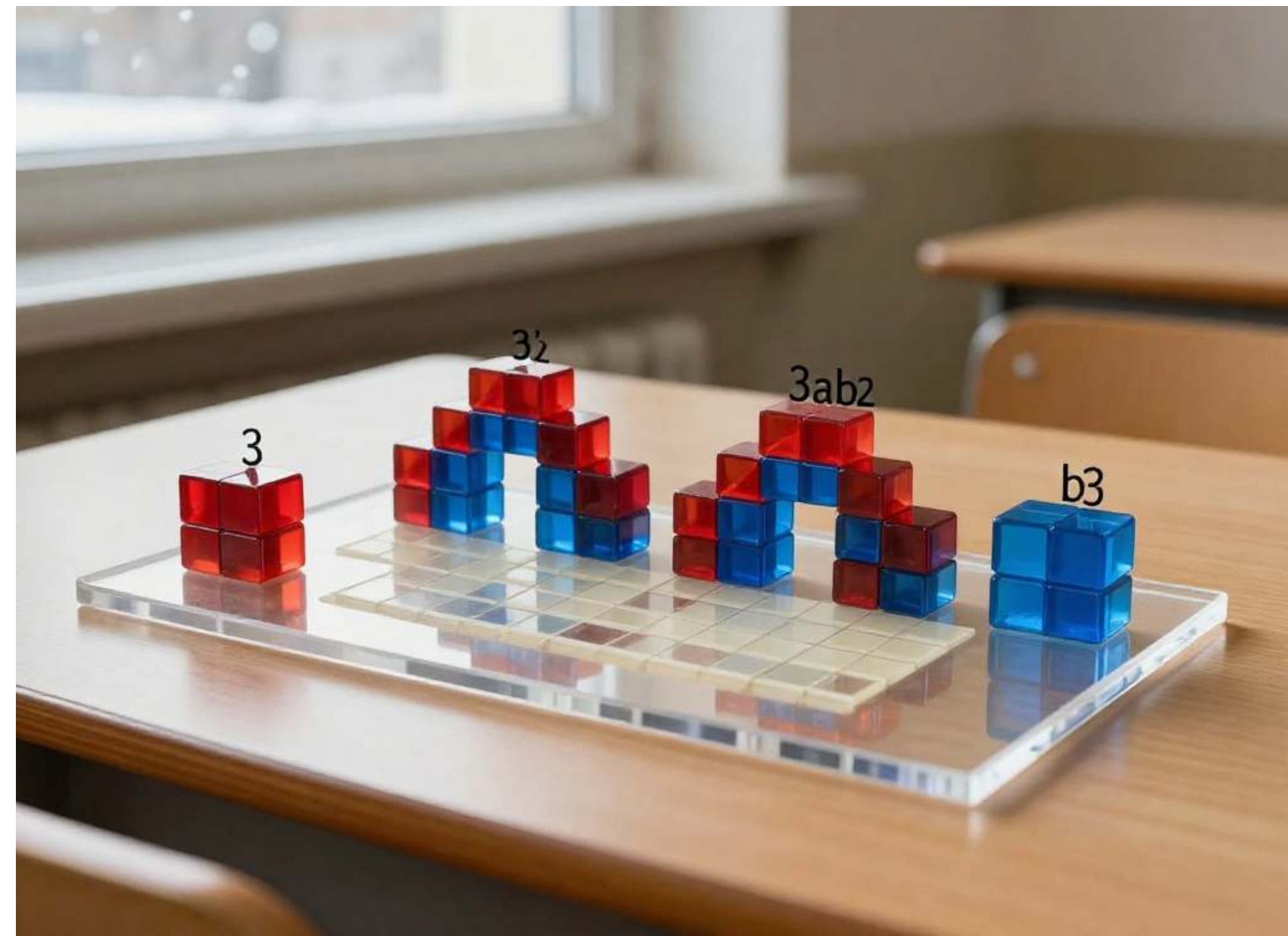
При $n=3$ формула даёт всего четыре члена: a^3 , $3a^2b$, $3ab^2$ и b^3 . Они появляются в строгом порядке, соответствующем уменьшению степени a и росту степени b .

Коэффициенты Паскаля

Числа 1, 3, 3, 1 совпадают с третьей строкой треугольника Паскаля. Это наглядно показывает, что каждый коэффициент в разложении связан с числом способов выбрать позиции для буквы b .

Связь двух тем

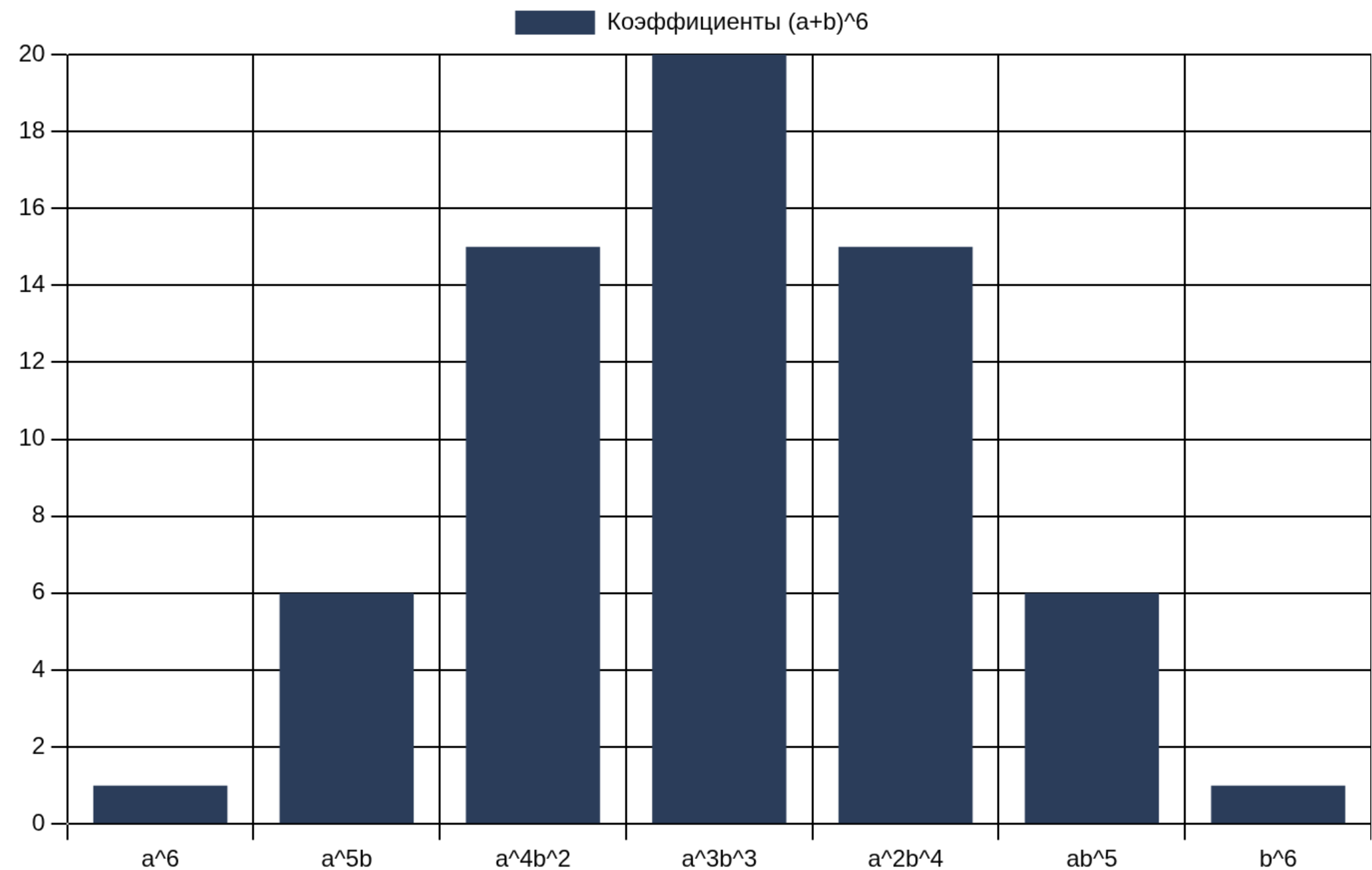
Пример удобно демонстрирует, как комбинаторный смысл сочетаний превращается в алгебраическое разложение. Одна и та же идея выбора без учёта порядка работает и в подсчёте, и в формуле бинома Ньютона.



Коэффициенты разложения $(a+b)^6$

Центральный член имеет наибольший коэффициент, поэтому середина строки Паскаля особенно заметна при $n=6$.

Коэффициенты растут к середине и затем убывают симметрично, что отражает свойство $C(n, k) = C(n, n-k)$.



Формула бинома Ньютона и строка треугольника Паскаля для $n=6$

$$C(n,k)$$

показывает, сколькими способами можно выбрать позиции для буквы b в разложении.

Этот коэффициент одновременно является числом сочетаний и множителем при одночлене $a^{(n-k)}b^k$. Именно поэтому алгебраическое разложение полностью согласуется с комбинаторным подсчётом.

Формула бинома Ньютона

Сочетания и бином Ньютона: сравнение понятий

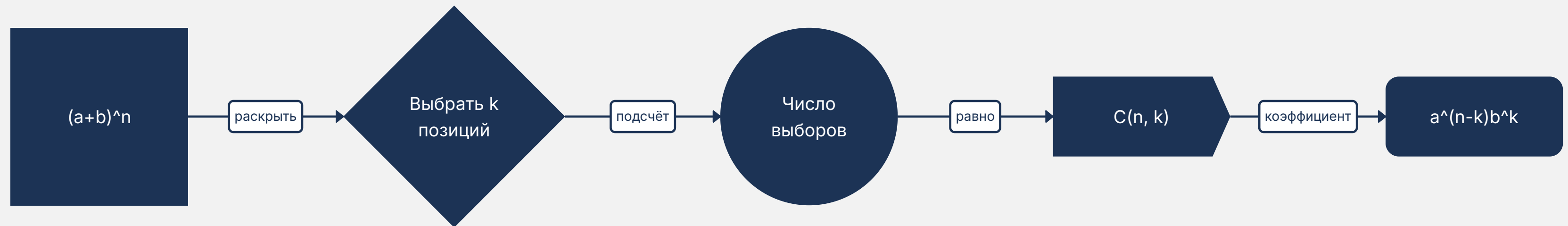
Признак	Сочетания	Бином Ньютона
Смысл	выбор k из n	коэффициенты разложения
Порядок	не важен	важны позиции
Пример	$C(7,3)=35$	$(x+y)^4$

Таблица показывает, что обе темы основаны на одной идее выбора, но применяются в разных задачах.

Сочетания дают число вариантов, а бином Ньютона использует те же числа как коэффициенты одночленов.

От выбора позиций к коэффициенту

Переход от комбинаторного выбора к члену разложения в формуле бинома Ньютона.



Типичные ошибки в решении задач



Путаница с перестановками

Если порядок выбора не влияет на результат, применять перестановки нельзя. В таких задачах нужно считать именно сочетания, иначе ответ будет завышен.



Ошибка в границах

Формула работает только при $0 \leq k \leq n$. Нарушение этого условия или неверная запись факториалов приводит к бессмысленному выражению и неправильному результату.



Неверные степени

В биноме Ньютона степень a уменьшается, а степень b возрастает. Иногда ученики делают наоборот и теряют структуру общего члена разложения.



Сбой в строке Паскаля

Коэффициенты нужно брать из одной строки треугольника Паскаля и не смешивать соседние строки. Ошибка в одном числе сразу меняет весь ответ.

Связь темы с вероятностью и реальными ситуациями



Карты как модель выбора

Если из колоды выбирают несколько карт, важен не порядок, а сам набор карт. Поэтому число благоприятных исходов удобно находить через сочетания, а затем сравнивать его с общим числом возможных наборов.



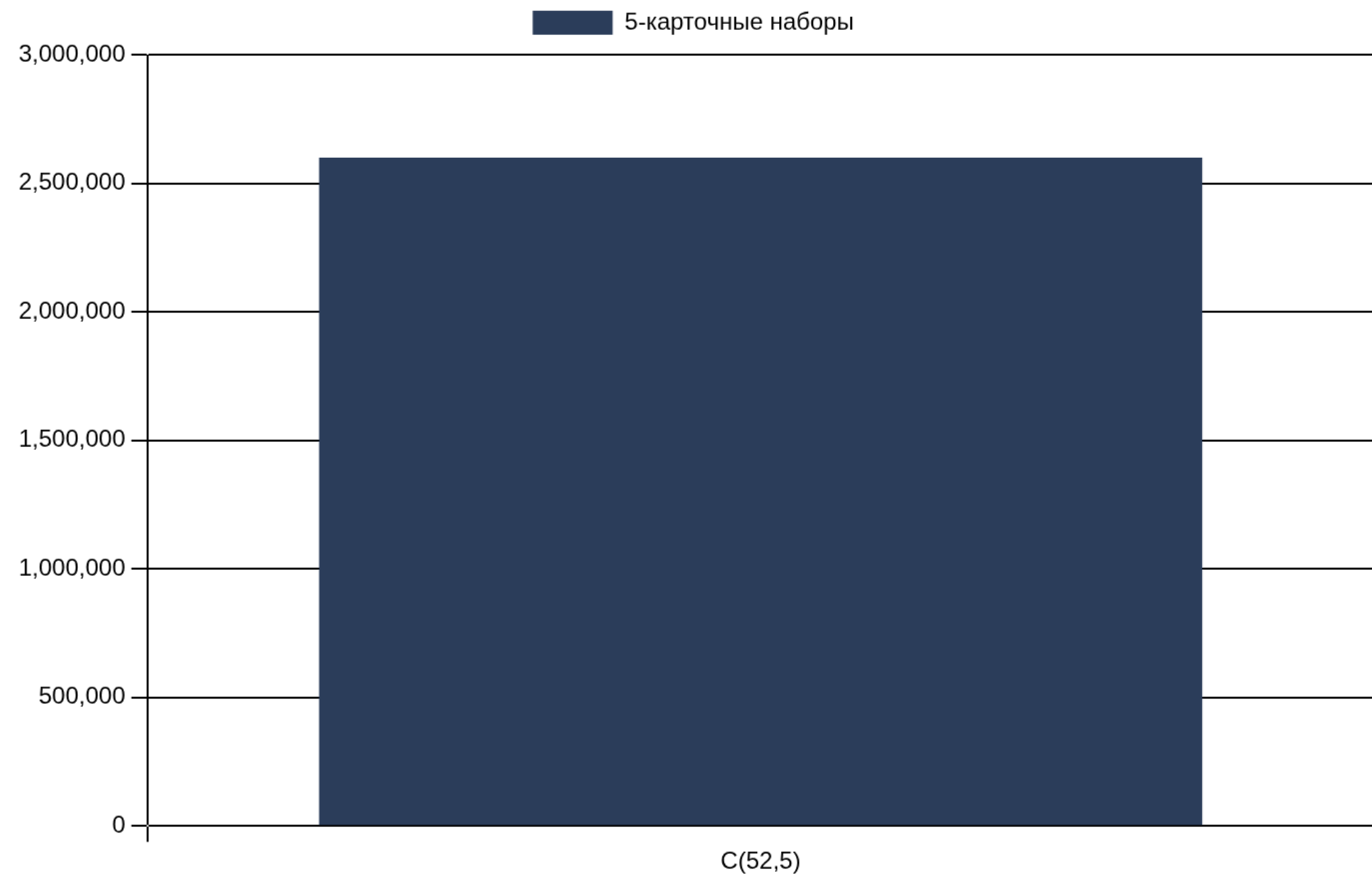
Случайные успехи и бином

В задачах о независимых испытаниях коэффициенты бинома Ньютона показывают, сколькими способами можно получить заданное число успехов. Это связывает алгебраическое разложение с вероятностной интерпретацией случайного эксперимента.

Сколько бывает 5-карточных комбинаций

Даже один фиксированный выбор пяти карт даёт почти 2,6 миллиона вариантов, поэтому ручной перебор здесь невозможен.

Большое значение $C(52,5)$ показывает, насколько быстро растёт число сочетаний и почему комбинаторика необходима в вероятности.



Формула $C(n, k) = n! / (k! (n-k)!)$ для $n=52, k=5$

Алгоритм решения школьных задач по теме

1. Определить условия

Сначала нужно понять, важен ли порядок выбора и допускаются ли повторения. От этого зависит, применять ли сочетания или другой способ подсчёта.

3. Записать ответ

Для бинома Ньютона определяют n , номер члена и соответствующие степени a и b . После этого ответ получают без лишних вычислений и проверяют по строке Паскаля.

2. Выбрать формулу

Если порядок не важен и повторений нет, используют $C(n, k)$. Если требуется разложить степень суммы, применяют бином Ньютона и находят нужный коэффициент.

Единая логика выбора и разложения

Сочетания без повторений и бином Ньютона объединяет одна идея: считать способы выбора и превращать их в алгебраические коэффициенты. Эта связь делает тему особенно важной для задач ЕГЭ.