

Теорема косинусов: СВЯЗЬ сторон и углов треугольника

Формула, которая помогает находить сторону или угол любого треугольника.



Когда треугольник уже не прямоугольный

- Теорема косинусов нужна, когда задача не сводится к прямому углу:
в остроугольных, прямоугольных
и тупоугольных треугольниках, особенно
при двух сторонах и угле между ними
или при трёх известных сторонах.



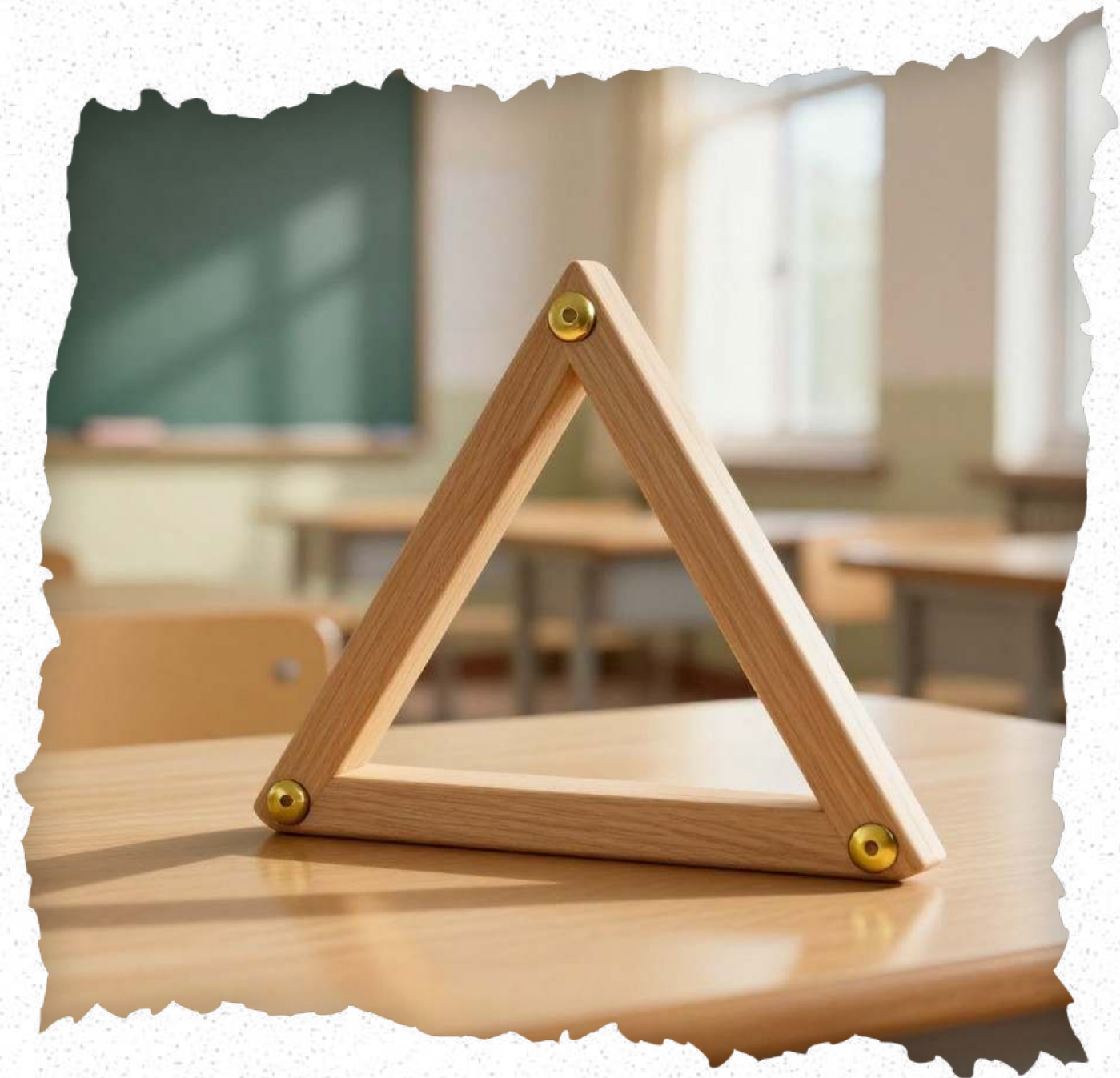
Формулировка теоремы косинусов

1. Общее правило

Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, уменьшенной на удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.

2. Запись для стороны a

Для стороны a формула записывается так: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. Она показывает, что на длину стороны влияет не только размер сторон, но и величина угла.



Обозначения в треугольнике ABC

Стороны и противоположные углы

Сторона a лежит напротив угла A , b — напротив угла B , c — напротив угла C . Такое соответствие удобно запоминать, чтобы не перепутать подстановку в формулу.

Где находится нужный угол

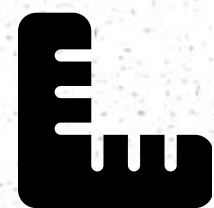
Угол A расположен между сторонами b и c , угол B — между a и c , угол C — между a и b . Именно этот угол подставляют в выражение с косинусом.

Зачем нужен чертёж

На рисунке обычно выделяют одинаковые буквы у стороны и противоположного угла. Это помогает быстро увидеть, какая запись теоремы косинусов подходит для задачи.



Три записи одной и той же формулы



Найти сторону a

Если неизвестна сторона a, используют запись $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. Она подходит, когда известны две стороны и угол между ними.



Найти сторону b

Когда нужно вычислить b, берут формулу $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$. Выбор зависит от того, какая сторона в задаче отсутствует.



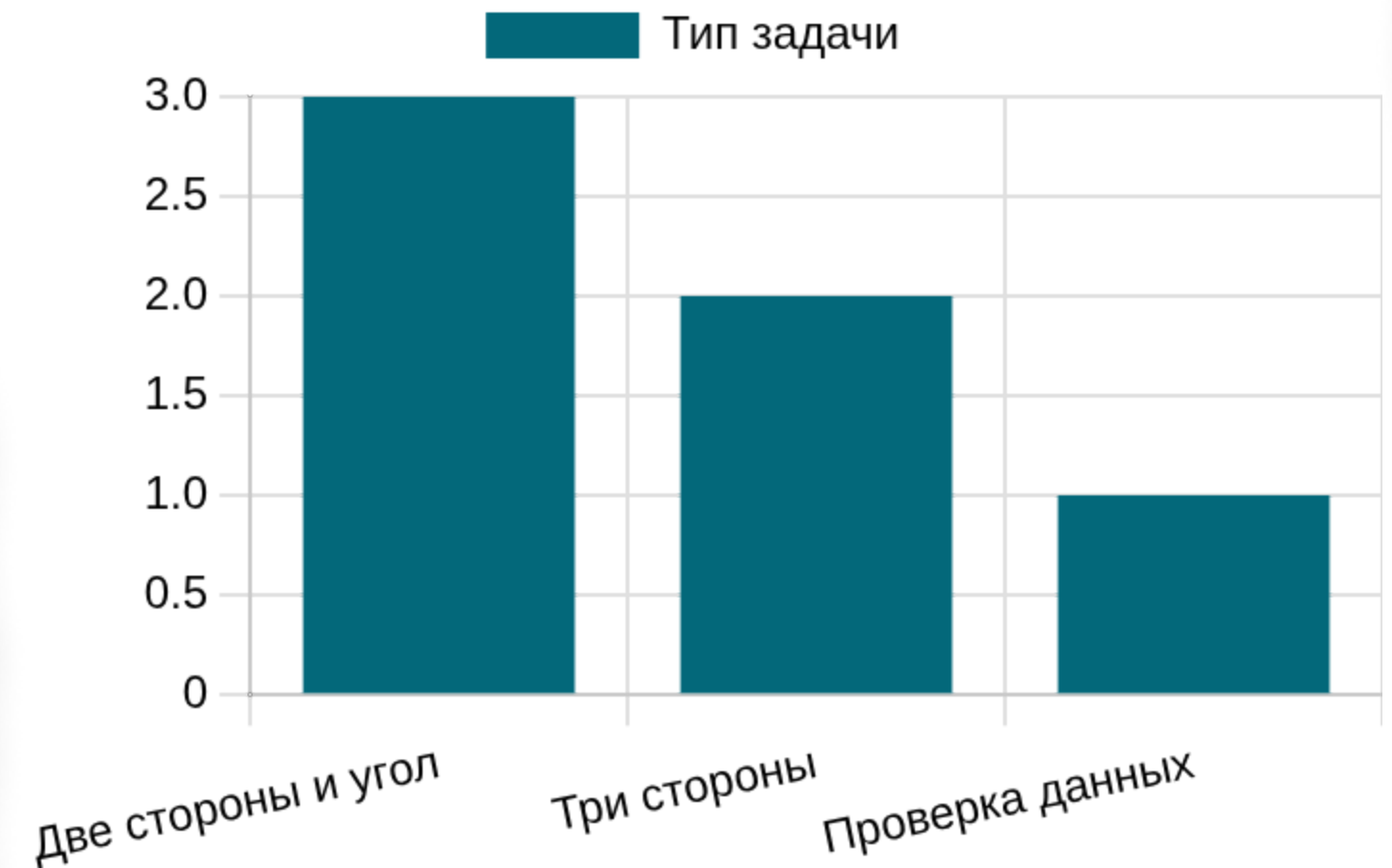
Найти сторону c

Для стороны c применяется $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$. Все три записи равноправны и отличаются только обозначениями известных и неизвестных элементов.

Какие задачи решает теорема косинусов

Формула особенно полезна, когда прямого угла нет и нужно работать с произвольным треугольником. В школьных задачах чаще всего ищут третью сторону.

Главный школьный сценарий — вычисление стороны по двум сторонам и углу между ними; остальные случаи встречаются реже.



Обобщение по материалу темы «Теорема косинусов»

Прямой угол делает теорему косинусов частным случаем более общей формулы для любого треугольника.

Тригонометрическое значение $\cos 90^\circ = 0$

90°

**при этом угле
косинус равен
нулю, и общая
формула
превращается
в теорему
Пифагора.**

Значения косинуса основных углов

Таблица помогает быстро подставлять знакомые значения в формулу и оценивать, как меняется результат при росте угла.

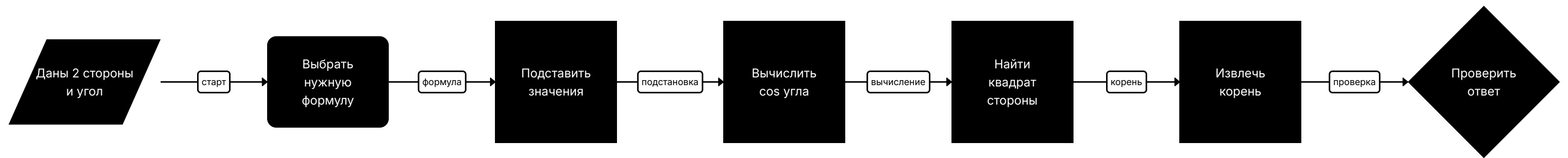
Чем больше угол, тем меньше косинус; для тупых углов он становится отрицательным, и сторона по формуле заметно увеличивается.

Угол	cos
0°	1
30°	$\sqrt{3}/2$
45°	$\sqrt{2}/2$
60°	$1/2$
90°	0
120°	$-1/2$
180°	-1

Таблица значений косинуса из школьного курса тригонометрии

Алгоритм нахождения неизвестной стороны

Последовательность действий при решении задачи по теореме косинусов



Как находят угол по трем сторонам

1. Преобразовать формулу

Если известны все три стороны, теорему косинусов записывают так, чтобы выразить косинус нужного угла: $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / (2bc)$.

2. Найти значение косинуса

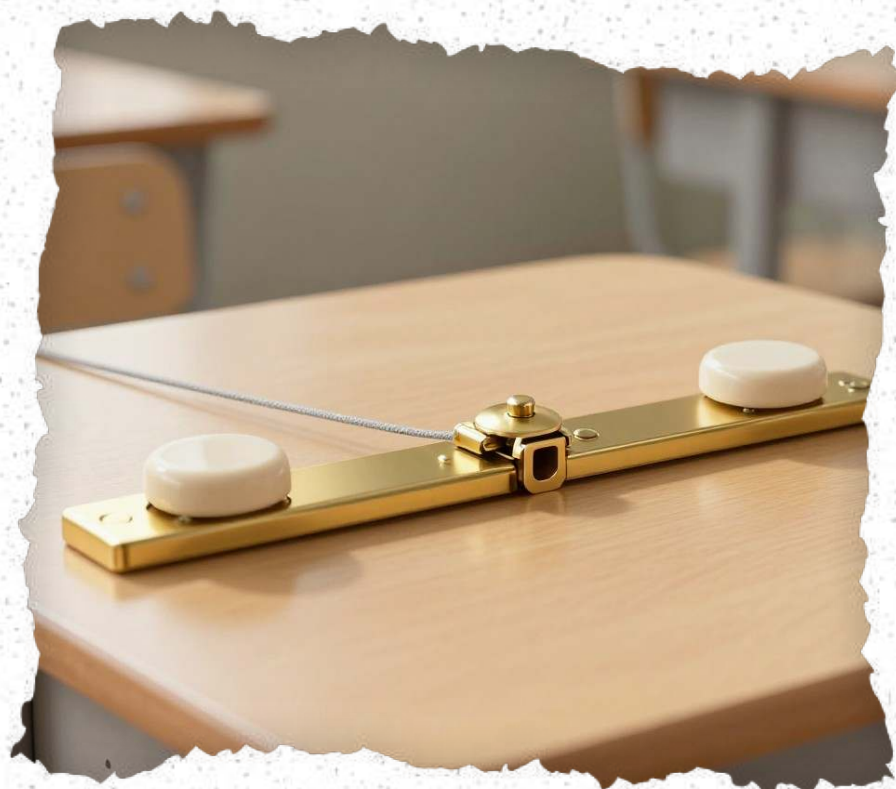
После подстановки чисел вычисляют дробь и получают значение $\cos A$. На этом шаге важно аккуратно считать квадраты сторон и не перепутать знак в числителе.

3. Определить сам угол

Затем по таблице, калькулятору или тригонометрической функции находят угол A . Такой способ удобен, когда измерить угол напрямую нельзя, но стороны уже известны.



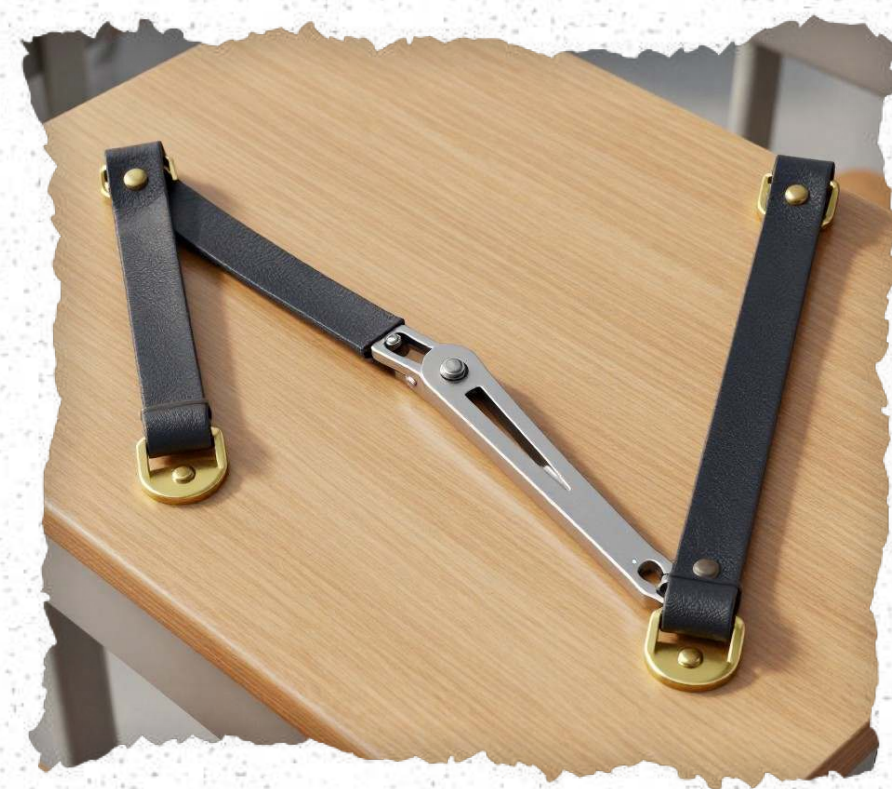
Геометрический смысл формулы



Угол задаёт длину стороны

Если две стороны остаются одинаковыми, а угол между ними уменьшается, противоположная сторона тоже становится короче.

Формула показывает это без чертежей: меняется не только размер, но и сама «открытость» треугольника.



Тупой угол и рост стороны

Когда угол становится тупым, косинус принимает отрицательное значение.

Поэтому вычитание превращается в прибавление по смыслу, и противоположная сторона заметно увеличивается. Так формула точно отражает изменение формы треугольника.

Как меняется сторона при разных углах

При одинаковых сторонах $b = 5$ и $c = 7$ рост угла между ними приводит к увеличению противоположной стороны.

Чем больше угол, тем длиннее третья сторона: зависимость получается плавной и устойчивой.



Вычисления по теореме косинусов для $b = 5$ и $c = 7$; значения углов 60° , 90° , 120° .

Типичные ошибки при применении теоремы

Неверный угол

Часто подставляют угол, который не находится между двумя данными сторонами. Из-за этого формула остаётся правильной, но результат получается неверным, потому что выбран не тот косинус.

Потеря знаков и степеней

Нужно помнить про квадраты сторон и минус перед выражением $2bc \cdot \cos A$. Если пропустить хотя бы один знак или степень, вычисление сразу даст неправильную длину стороны.

Путаница в обозначениях

Сторона a всегда лежит напротив угла A , b — напротив B , c — напротив C . Если перепутать соответствия, легко выбрать не ту запись формулы и ошибиться в ответе.



Вычисление стороны a

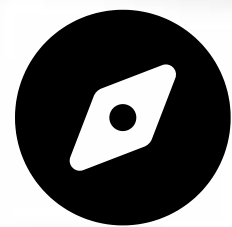
Шаг	Действие	Результат
1	Дано	$b = 6, c = 8, A = 60^\circ$
2	Подстановка	$a^2 = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 0,5$
3	Вычисление	$a^2 = 52$

Пример по теореме косинусов для школьной задачи.

Подставим данные в формулу и посмотрим, как шаг за шагом получается ответ.

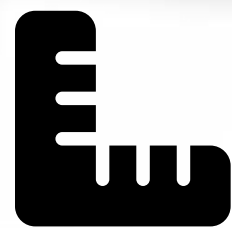
После подстановки получаем $a^2 = 52$, значит, $a \approx 7,2$. Ортогональный и острый случаи дают разную длину стороны.

Где используется теорема косинусов



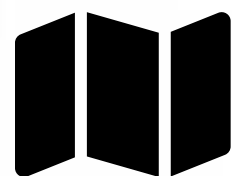
Навигация

Помогает находить расстояние между точками, если прямое измерение неудобно. Это важно при работе с картами, маршрутами и определением положения объектов.



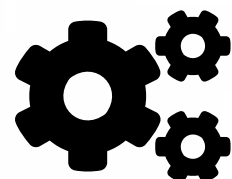
Геометрия

Используется для нахождения сторон и углов в произвольных треугольниках. Особенно полезна там, где нет прямого угла и нельзя применить только теорему Пифагора.



Геодезия

Позволяет рассчитывать расстояния на местности по измеренным углам и отрезкам. Такой способ удобен, когда один участок недоступен для прямого измерения.



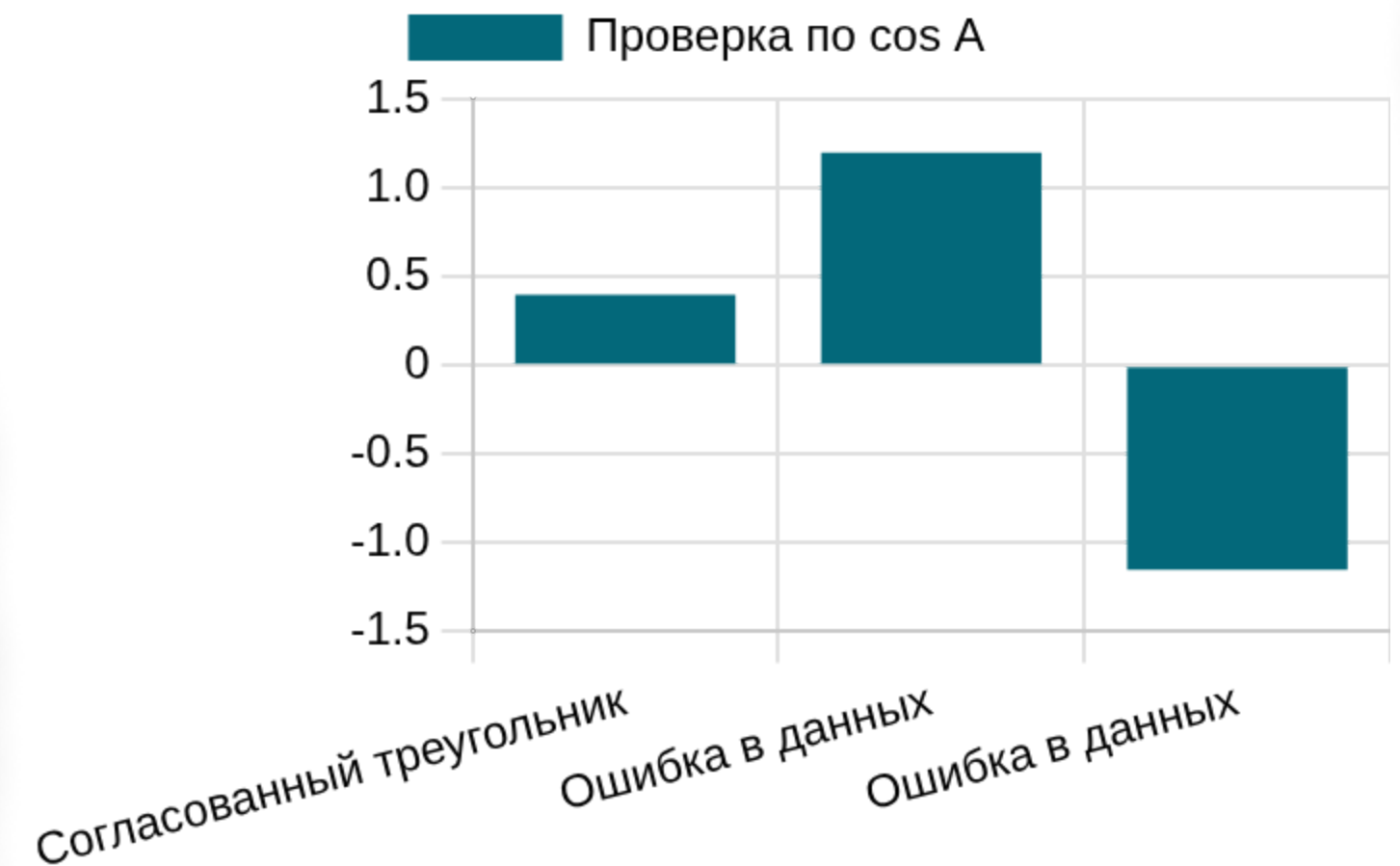
Техника

Применяется в чертежах, расчётах деталей и проверке размеров конструкций. Формула помогает точнее связывать форму, углы и длины элементов.

Проверка согласованности данных треугольника

Если рассчитанный косинус выходит за пределы от -1 до 1 , значит, измерения или подстановка выполнены неверно.

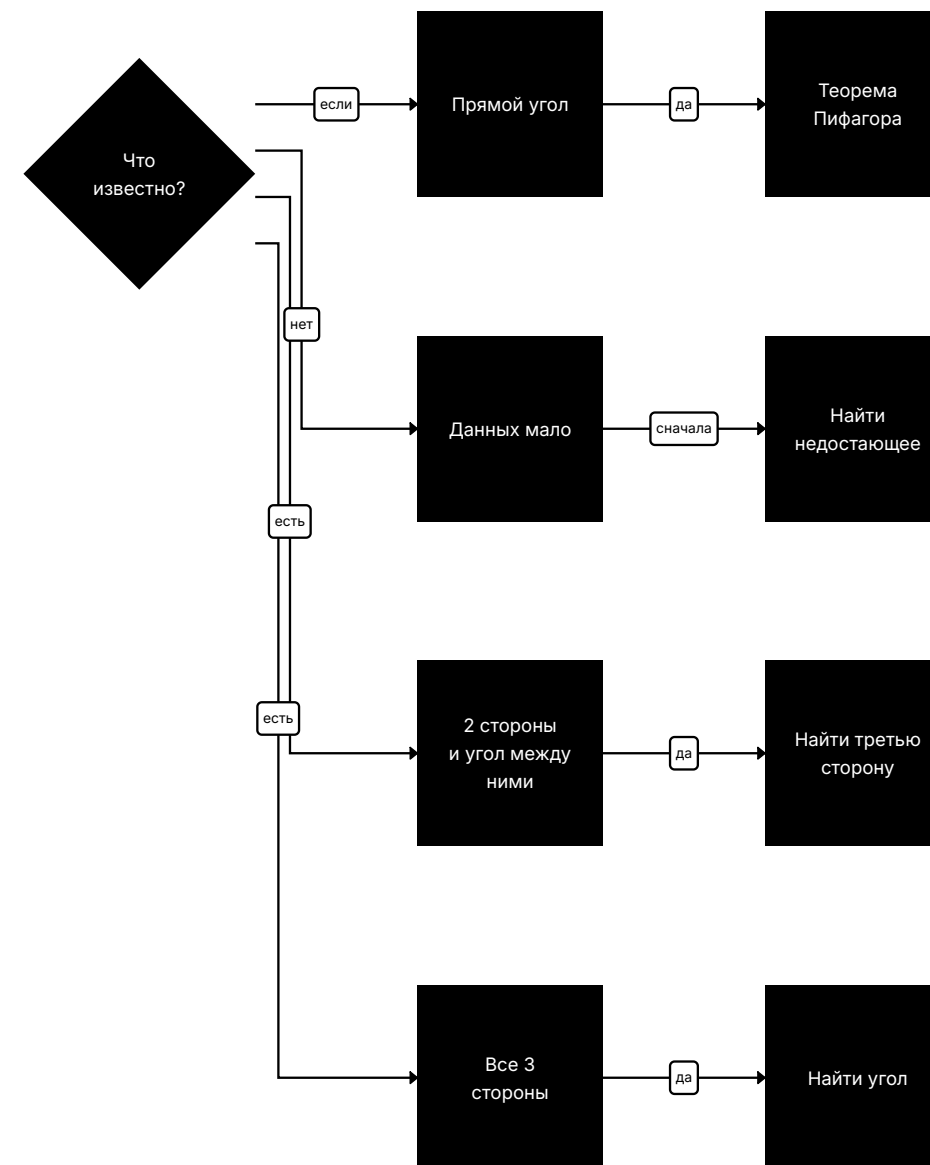
Значение внутри диапазона подтверждает согласованность, а выход за границы указывает на ошибку в исходных данных.



Учебная проверка по теореме косинусов; критерий допустимых значений $\cos A$.

Как выбрать нужную формулу в задаче

Схема выбора формулы по известным данным о треугольнике.



История появления идеи

От античных построений к формуле

Идея связи между сторонами и углами треугольника появилась ещё в античной математике. Тогда такие зависимости использовали вместе с чертежами и измерениями, чтобы находить недоступные расстояния без прямого прохода к объекту.



Удобный язык тригонометрии

Позже эту зависимость записали в современной форме, понятной для школьных вычислений. Формула стала короче и точнее: она позволяет работать с любым треугольником и не требует дополнительных построений на каждом шаге.



Что важно запомнить

1. Подходит для любого треугольника

Теорема косинусов работает не только для прямоугольных фигур. Её можно применять к острым и тупым треугольникам, если нужно связать стороны и угол между двумя из них.

2. Есть три равные записи

Формула записывается тремя способами, и выбор зависит от того, какую сторону нужно найти. Главное — правильно определить, какой угол лежит между данными сторонами.

3. Связана с Пифагором

Если угол прямой, косинус равен нулю, и общая формула превращается в теорему Пифагора. Это показывает, что теорема косинусов шире по применению.

4. Помогает находить и стороны, и углы

По двум сторонам и углу находят третью сторону, а по трём сторонам — угол. Именно поэтому эта формула часто встречается в задачах 9 класса.

Теорема косинусов — главный помощник в треугольнике

Эта формула расширяет возможности школьной геометрии
и помогает работать с любым треугольником.

Если научиться выбирать нужную запись и аккуратно
подставлять данные, найти сторону или угол становится
гораздо проще.