

Элементы комбинаторики и теории вероятностей в алгебре 9 класса

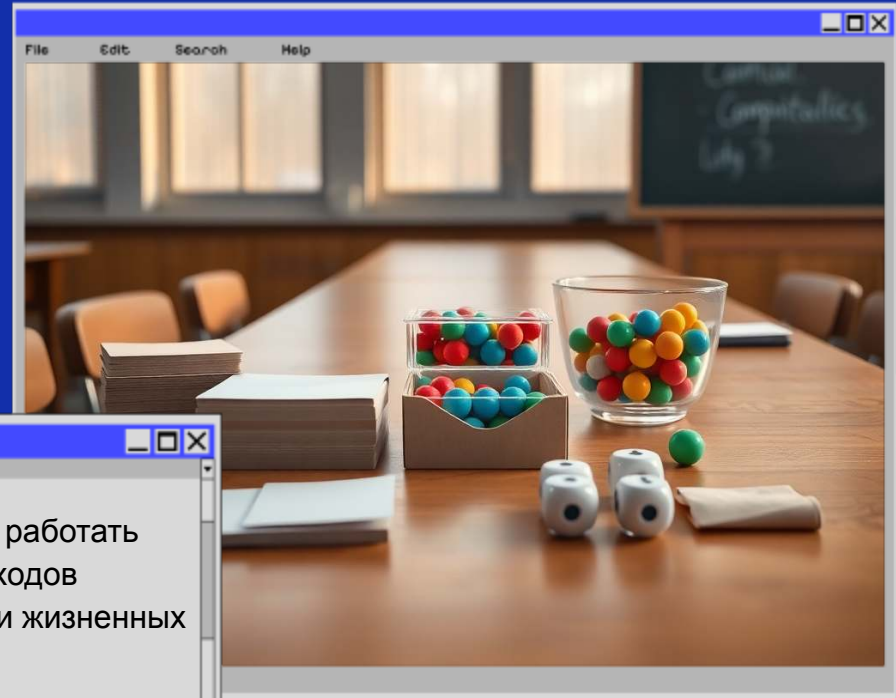
Как считать варианты и оценивать шансы в простых
ситуациях?

Ok

Зачем изучать комбинаторику и вероятность в 9 классе

Ok

Эти разделы учат точно считать варианты, работать с формулами и понимать, как из списка исходов возникает вероятность события в задачах и жизненных ситуациях.



Случайный опыт, исход и событие

Случайный опыт

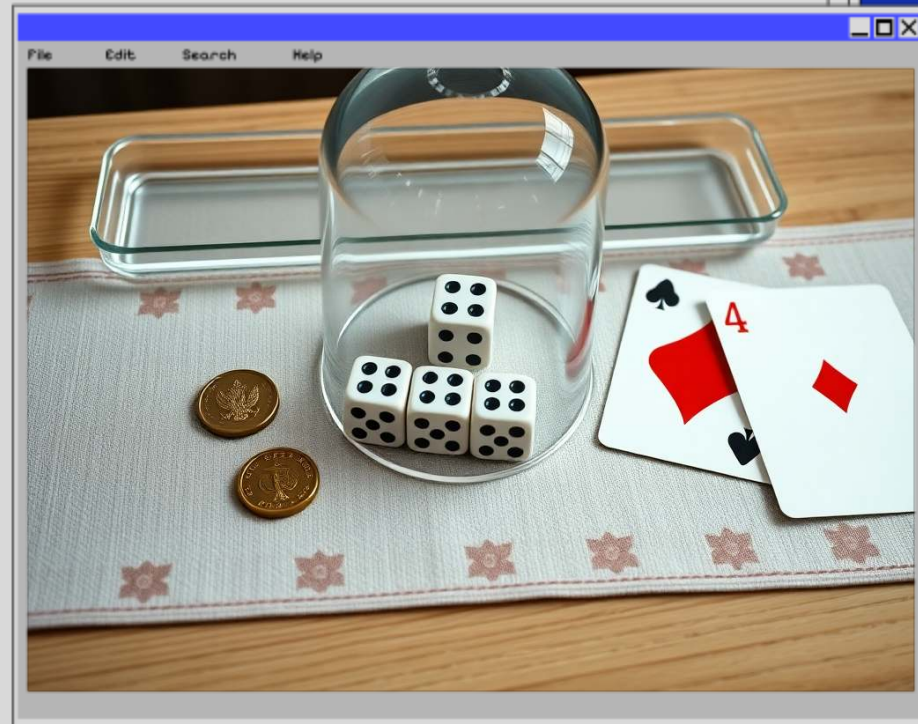
Это действие, результат которого заранее точно предсказать нельзя, хотя список возможных исходов известен. К таким опытам относятся бросок кубика, подбрасывание монеты и вытягивание карты.

Исход

Исход — это один конкретный результат опыта. Например, выпал орёл, выпала шестёрка или досталась красная карта. Каждый исход входит в общее множество возможных результатов.

Событие

Событие может включать один исход или несколько. Например, «выпало чётное число» на кубике объединяет сразу три исхода: 2, 4 и 6.



Правило суммы

1

Когда работает

Если нужно выбрать один вариант из двух разных групп, число способов складывают. Это подходит, когда варианты не смешиваются и относятся к отдельным наборам.

2

Простой пример

Если есть 3 вида сока и 4 вида чая, а выбрать можно только один напиток, получаем $3 + 4 = 7$ вариантов. Каждый выбор относится к своей группе.

3

Главная идея

Правило суммы удобно, когда задача построена как альтернатива: либо одно, либо другое. Сначала проверяют, пересекаются ли группы вариантов, и только потом считают.

Правило произведения

1 Последовательные шаги

Если выбор делается поэтапно, число вариантов находят умножением. Для каждого шага считают свои возможности, а затем объединяют их в общее число сочетаний.

2 Пример с одеждой

При 3 футболках и 4 брюках можно составить $3 \times 4 = 12$ комплектов. Здесь каждый верх можно соединить с любым низом, поэтому шаги перемножаются.

3 Пример с кодом

Если составляют двузначный код из цифр 0–9 и повторения разрешены, получается $10 \times 10 = 100$ вариантов. Каждый разряд выбирается отдельно.

Три основных типа комбинаторных задач

Таблица показывает, как порядок и полнота выбора влияют на тип комбинаторной задачи.

Сначала определяют, важен ли порядок, затем — выбирается весь набор или только его часть.

Школьный курс алгебры: комбинаторика			
File Edit Search Help			
Тип задачи	Порядок	Выбор	Пример
Перестановки	важен	все	5 книг
Размещения	важен	часть	2 дежурных
Сочетания	не важен	часть	команда из 5

24

**способа существует расположить 4
разные книги на полке.**

Даже для небольшого числа объектов
вариантов быстро становится много.
Факториал показывает, насколько
стремительно растёт число перестановок
при добавлении каждого нового элемента.

Ok

Размещения

1

Смысл размещений

Размещения используют, когда из нескольких объектов выбирают только часть, но порядок важен. Поэтому разные расстановки тех же выбранных элементов считаются разными вариантами.

2

Пример с ролями

Если из 5 учеников выбрать старосту и помощника, получится $5 \times 4 = 20$ вариантов. На первой позиции может быть любой ученик, а на второй — уже не он.

3

Почему ответ меняется

Если переставить выбранные элементы местами, ситуация станет другой. Именно поэтому размещения дают больше вариантов, чем сочетания, и меньше, чем перестановки всего набора.

Сочетания

Когда порядок не нужен

Сочетания применяют, если выбирают часть объектов и не учитывают, кто стоит первым или вторым. Важно только, какие элементы вошли в набор.

Пример выбора

Из 5 книг можно выбрать 2 книги 10 способами. Пары {A, B} и {B, A} считаются одним и тем же выбором, потому что порядок не влияет на результат.

Где встречаются

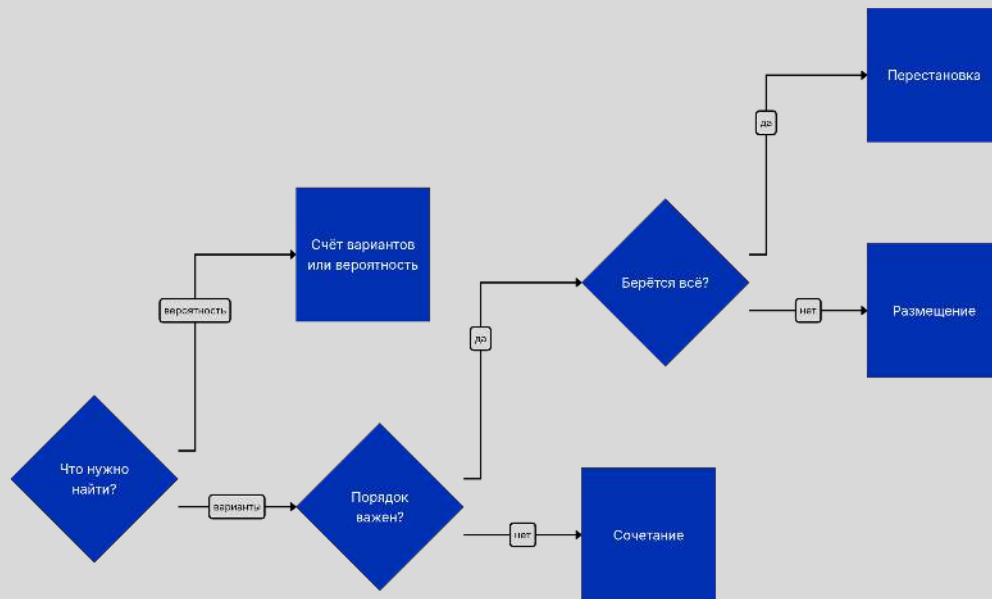
Сочетания часто нужны при выборе команды, группы, набора предметов или нескольких участников без распределения ролей. Они помогают считать именно состав, а не расположение.



Как выбрать нужную формулу

Схема помогает связать условие задачи с правилом подсчёта вариантов.

Ok



Сравнение числа вариантов в похожих задачах

Даже при близком числе объектов ответ меняется из-за порядка и условий выбора.

Порядок действий и тип выбора сильнее влияют на ответ, чем само число предметов.



Пространство исходов на простых примерах

Монета

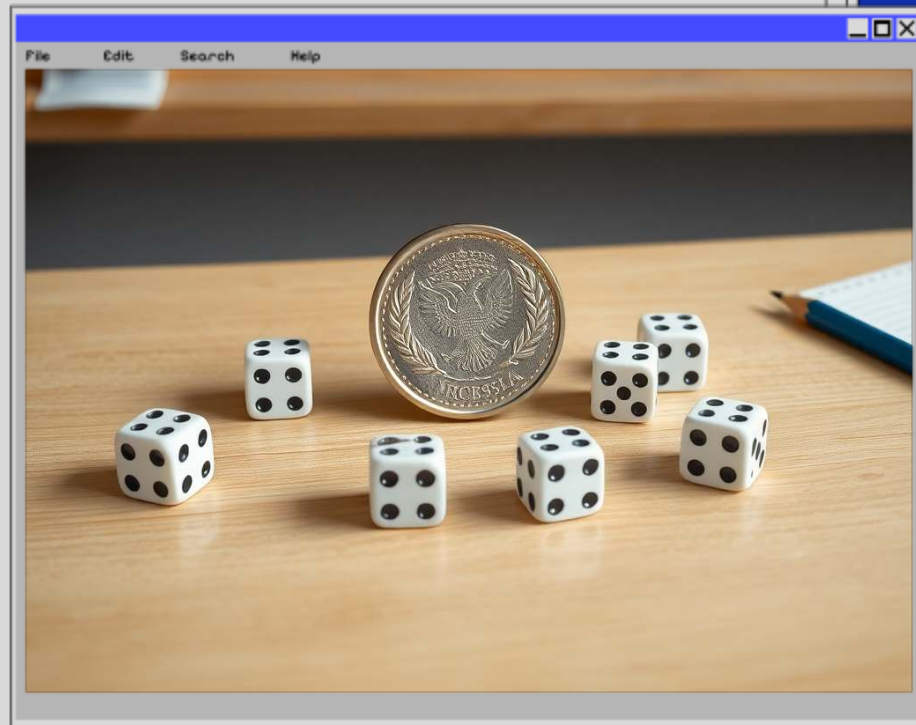
При броске монеты возможны только два исхода: орёл и решка. Они равновозможны, поэтому оба результата нужно учитывать заранее, ещё до вычисления вероятности события.

Кубик

У игрального кубика пространство исходов состоит из шести чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Каждый исход рассматривается отдельно, потому что любой из них может появиться в одном броске.

Зачем перечислять исходы

Полный список исходов помогает не пропустить ни одного варианта и правильно выбрать благоприятные результаты. Это особенно важно, когда событие описывается словами, а не одним числом.



Классическая вероятность

1 Формула

Если все исходы равновозможны, вероятность события находят как отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов: $P = m / n$. Значение всегда лежит между 0 и 1.

2 Примеры

Для монеты вероятность орла равна $\frac{1}{2}$, для выпадения шестёрки на кубике — $\frac{1}{6}$. Если нужно число больше 4, благоприятны 5 и 6, значит вероятность равна $\frac{2}{6}$, то есть $\frac{1}{3}$.

3 Как записывают ответ

Вероятность можно представить дробью, десятичной дробью или процентом. Выбор записи зависит от условия задачи и того, как удобнее сравнивать результаты между собой.

Невозможные, достоверные и противоположные события

Невозможное событие

Если событие не может произойти при данном опыте, его вероятность равна 0. Например, на обычном кубике невозможно получить число 7, потому что таких граней у него нет.

Достоверное событие

Событие называют достоверным, если оно обязательно происходит. При броске кубика выпадет число от 1 до 6, поэтому его вероятность равна 1.

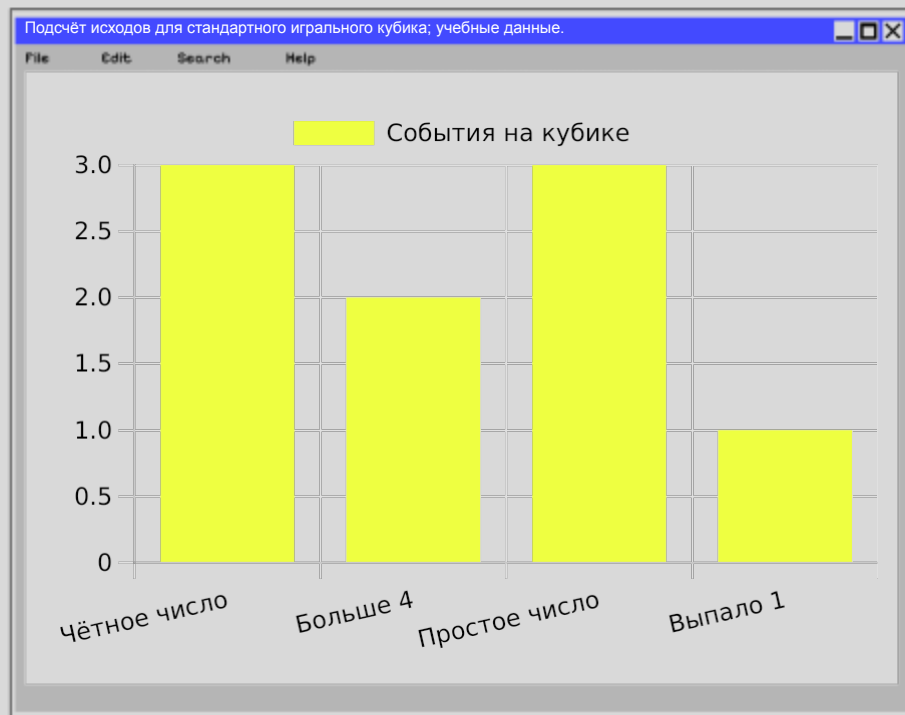
Противоположные события

Если событие A не произошло, значит произошло противоположное событие $\bar{A}$. Их вероятности в сумме дают 1, и это часто упрощает подсчёты в задачах.

Вероятности в опытах с кубиком

Все события относятся к одному опыту, но количество благоприятных исходов у них разное.

Чем больше благоприятных исходов, тем выше вероятность; одинаковый опыт не означает одинаковые шансы.



Как понять, какая формула нужна в задаче

Ситуация	Порядок	Формула	Выбор
Книги на полке	да	$n!$	всё
Два дежурных	да	$A(n, k)$	часть
Команда из двух	нет	$C(n, k)$	часть
Двузначный код	да	правило	часть

Сравнение типовых ситуаций помогает быстро выбрать нужную формулу и не смешивать разные виды подсчёта.

Сначала определяют, важен ли порядок, затем — выбирается ли весь набор или только часть.

Независимые события

1

Смысл независимости

События независимы, если одно не меняет вероятность другого. Это важное условие позволяет умножать вероятности и упрощает решение задач о нескольких последовательных испытаниях.

2

Пример с монетой

Два броска монеты независимы: результат первого не влияет на второй. Поэтому вероятность двух орлов подряд равна $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

3

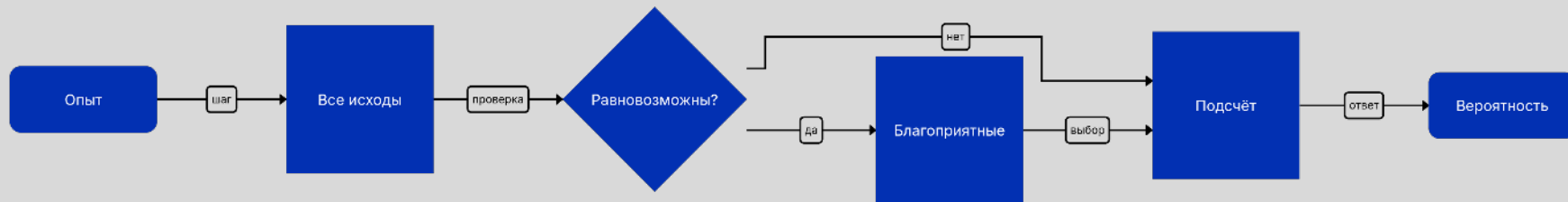
Когда зависимость появляется

Если предметы вытягивают без возвращения, состав набора меняется после каждого выбора. Тогда события обычно становятся зависимыми, и вероятность следующего исхода уже другая.

Как решать задачи на вероятность

Последовательность шагов для школьных задач с равновозможными исходами

Ok



Типичные ошибки в задачах

Путаница с порядком

Часто забывают, что перестановка ролей меняет результат, а простой выбор без порядка — нет. Из-за этого вместо сочетаний ошибочно применяют размещения или наоборот.

Неполный список исходов

Ещё одна ошибка — не перечислить все возможные исходы опыта. Тогда число благоприятных вариантов сравнивают с неправильным общим числом, и ответ получается неверным.

Двойной счёт

Иногда один и тот же вариант считают дважды, например при разбиении на группы или при перечислении событий разными способами. Проверка списка помогает этого избежать.

Вероятность и результат

Нельзя путать теоретическую вероятность с исходом одного опыта. Один бросок может дать неожиданное значение, но вероятность описывает не один случай, а всю модель опыта.

Математика, которая помогает считать выбор и случайность

Ok

Комбинаторика учит точно считать варианты, а вероятность — оценивать шансы событий. Вместе эти темы помогают уверенно решать задачи и лучше понимать случайные ситуации из жизни.