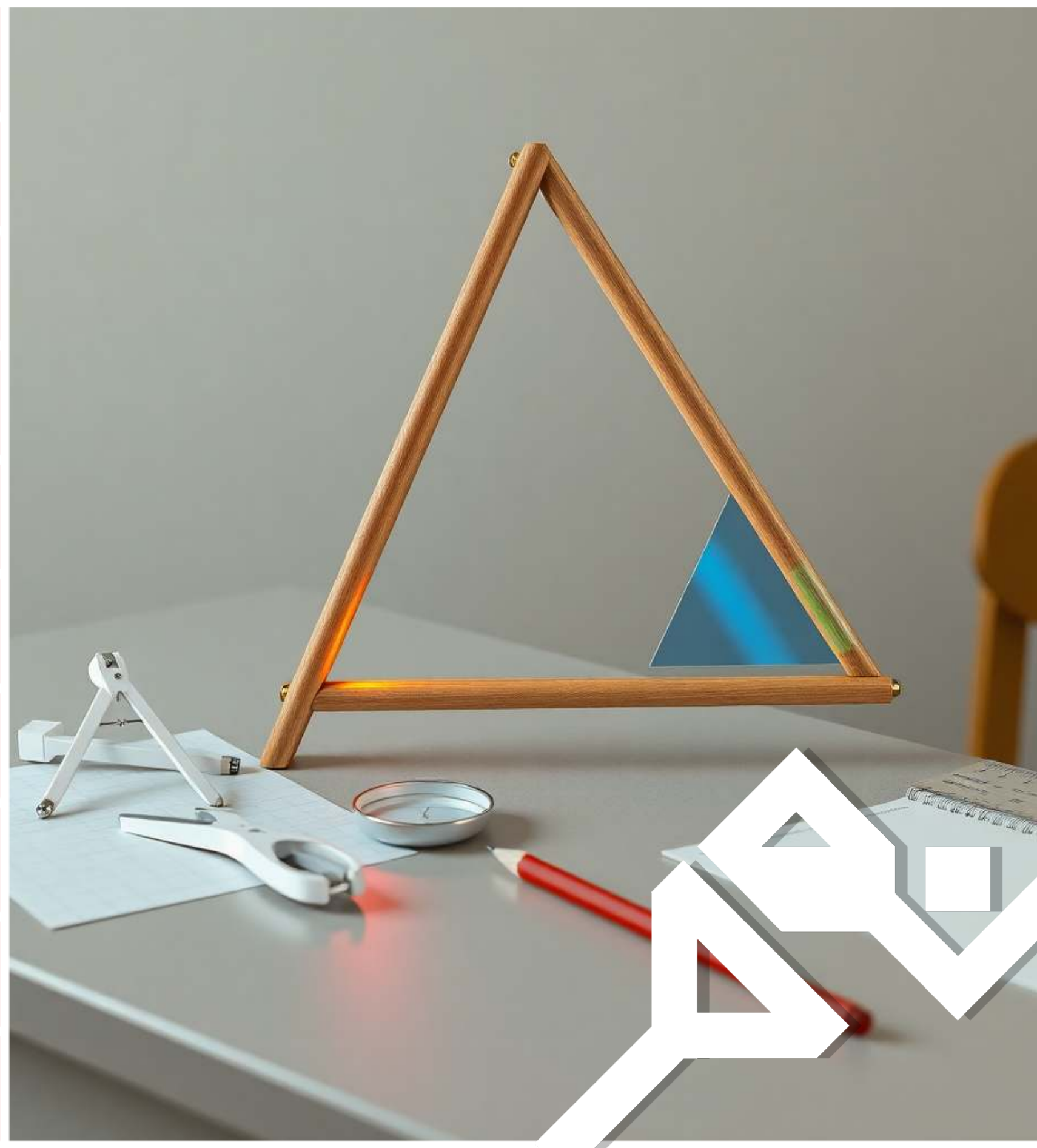


Теоремы косинусов и синусов в геометрии 7 класса

Две формулы, которые помогают решать
любой треугольник.

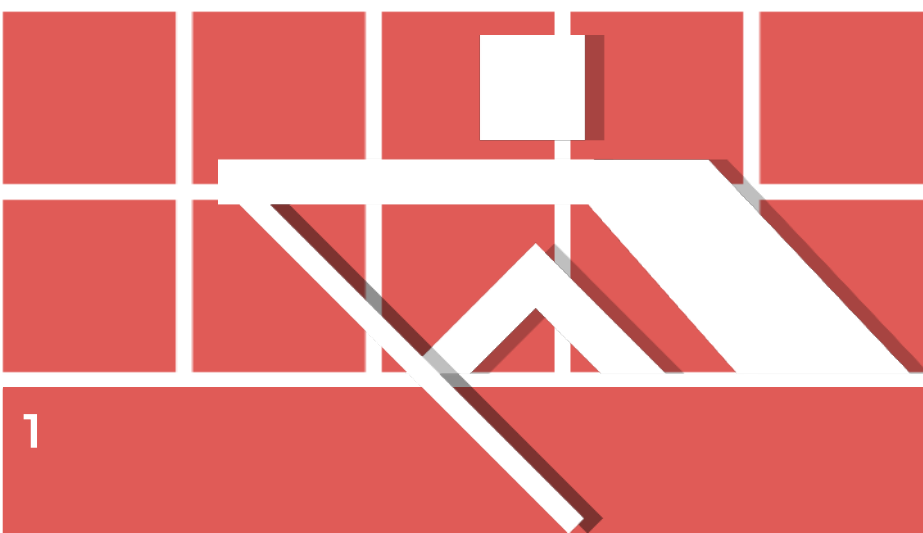


Зачем нужны новые формулы для треугольников

В 7 классе уже мало знать только признаки и теорему Пифагора. Для обычных треугольников без прямого угла нужны более общие способы, и именно теоремы косинусов и синусов дают такие возможности.



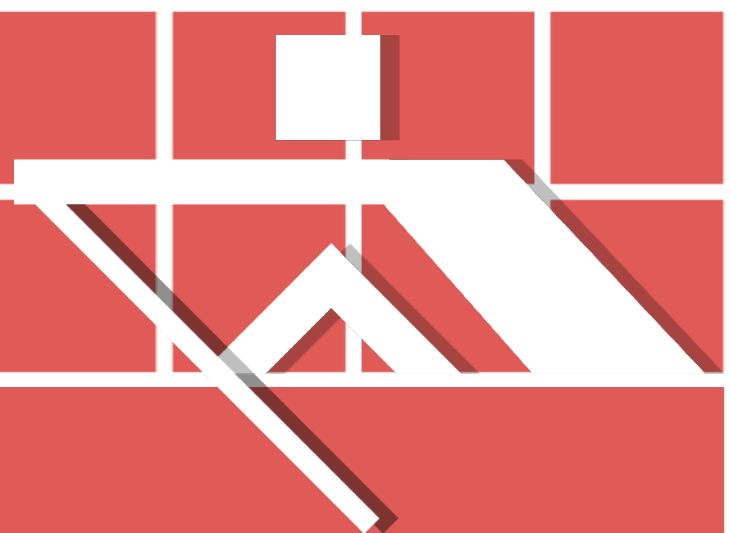
Обозначения сторон и углов в треугольнике



1

Стороны буквами

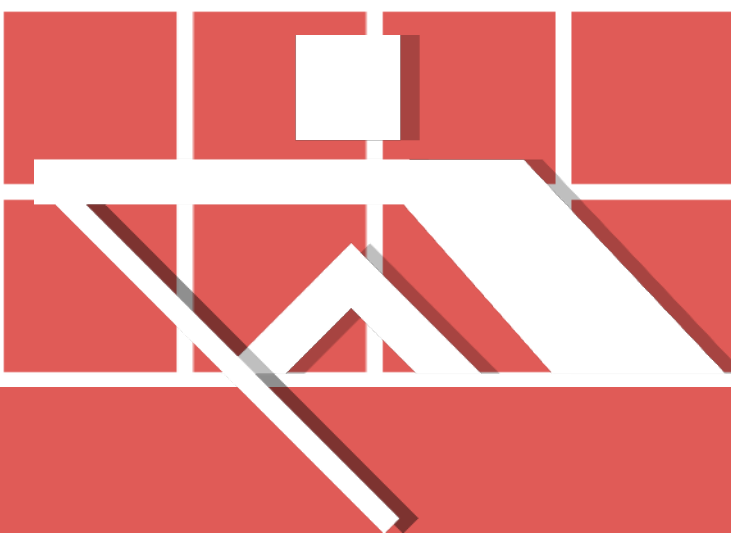
В треугольнике ABC стороны обычно обозначают буквами a , b и c . Такое краткое обозначение удобно в формулах и помогает быстро записывать вычисления без лишних слов.



2

Углы с теми же буквами

Углы треугольника обозначают заглавными буквами A , B и C . Это делает запись связной: каждая сторона и каждый угол легко сопоставляются между собой при решении задач.



3

Противолежащие пары

Сторона a лежит напротив угла A , сторона b — напротив B , сторона c — напротив C . Если помнить это правило, проще подставлять данные в формулы и не путать элементы треугольника.

Формулировка теоремы косинусов

1

Главная идея

Квадрат любой стороны треугольника выражается через квадраты двух других сторон и косинус угла между ними. Эта формула работает для любого треугольника, а не только для прямоугольного.

2

Запись формул

Для треугольника ABC используют записи:
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.
Выбор формулы зависит от того, какую сторону нужно найти.

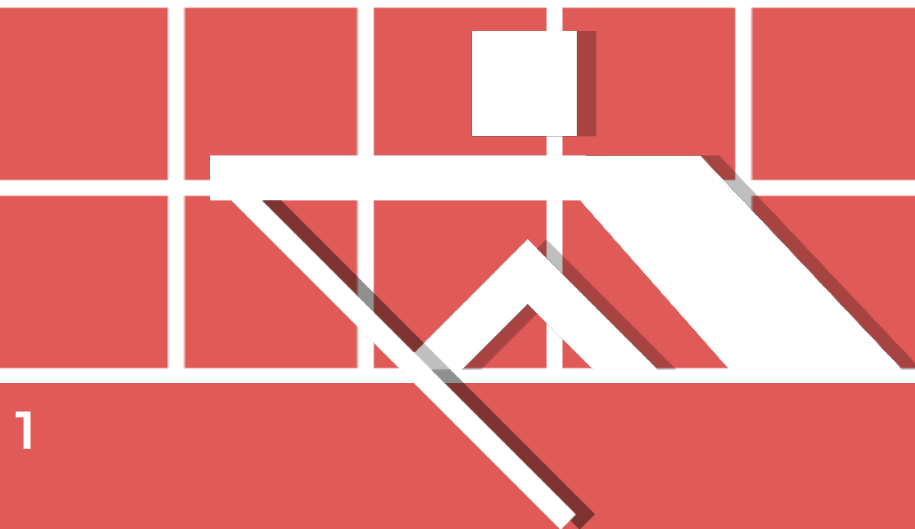
3

Универсальность

Теорема косинусов полезна, когда в задаче есть стороны и угол между ними или известны все стороны. Она позволяет находить неизвестные элементы там, где обычные школьные правила уже не помогают.



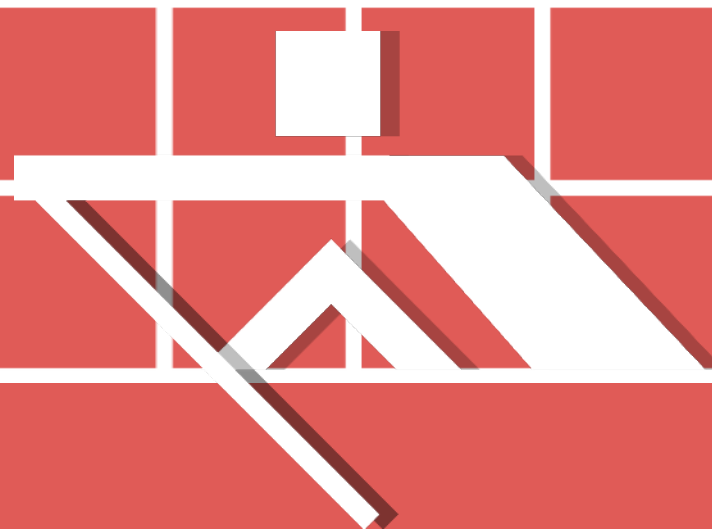
Теорема Пифагора как частный случай теоремы косинусов



1

Прямой угол

Если треугольник прямоугольный, один из его углов равен 90° . В таком случае нужно учитывать, что косинус прямого угла равен нулю.

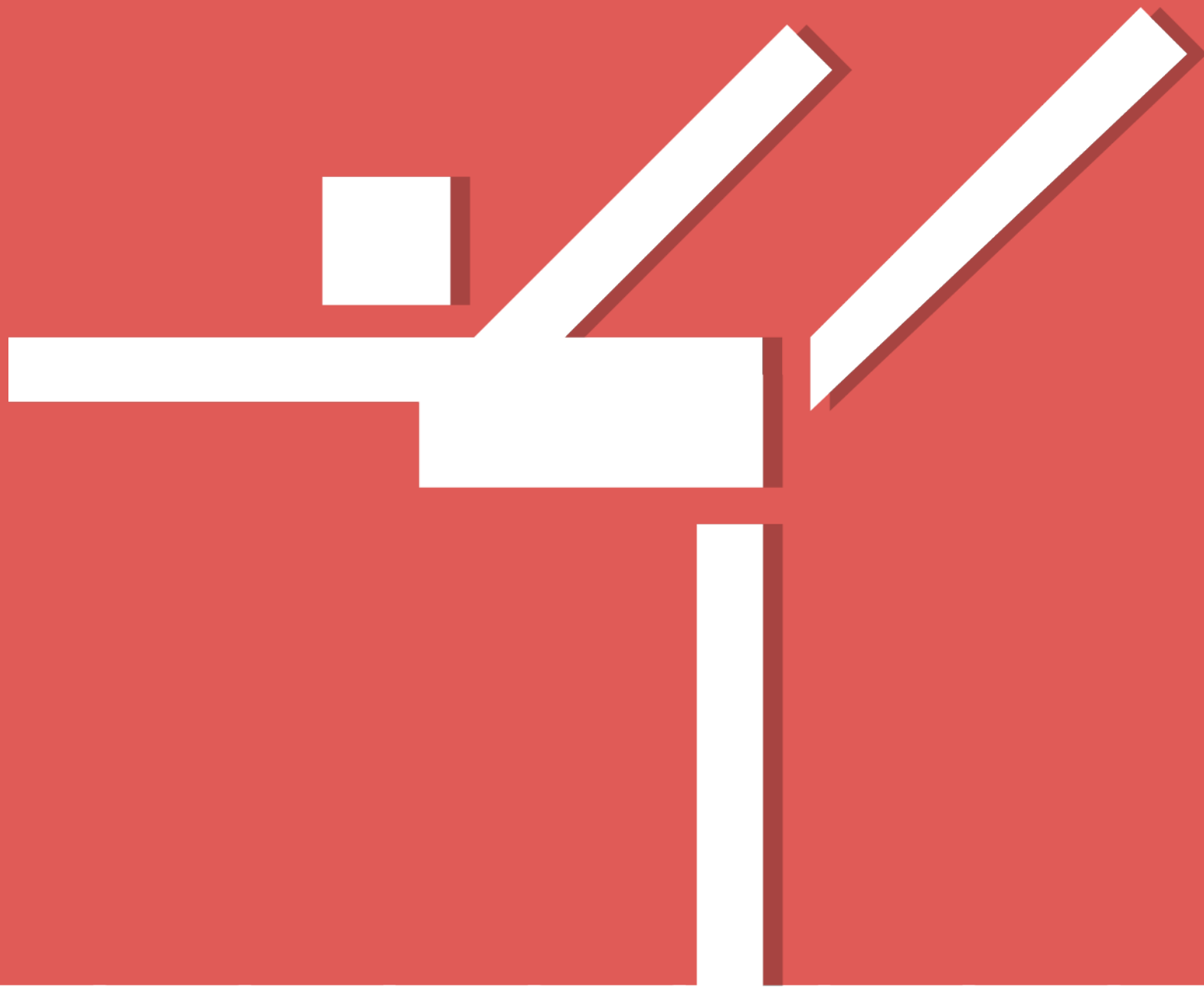


2

Связь формул

Когда $\cos 90^\circ = 0$, общий вид теоремы косинусов упрощается до $a^2 = b^2 + c^2$. Значит, известная теорема Пифагора является частным случаем более общей формулы.

Когда используют теорему КОСИНУСОВ



Две стороны и угол между ними

Если в треугольнике известны две стороны и угол между ними, теорема косинусов помогает найти третью сторону. Это один из самых удобных и частых случаев применения формулы.

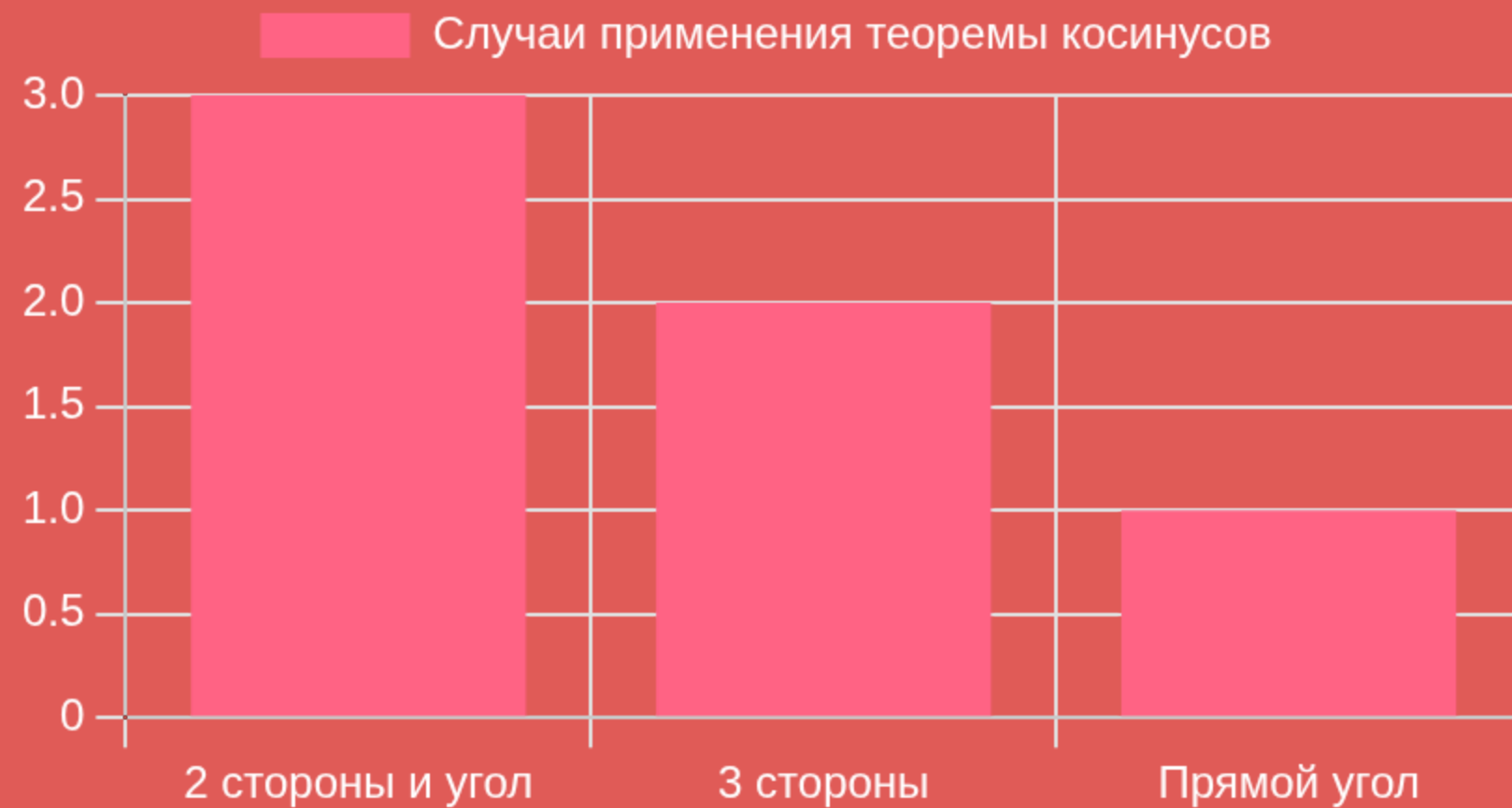
Три стороны

Когда известны все три стороны, теорема косинусов позволяет вычислить один из углов. Так можно полностью изучить треугольник, даже если в нём нет прямого угла.

Не прямоугольные треугольники

Эта теорема особенно нужна в задачах на произвольные треугольники. В них нельзя сразу применять теорему Пифагора, поэтому требуется более общий способ вычислений.

Случаи применения теоремы косинусов



Теорема особенно часто помогает находить неизвестную сторону по двум данным и углу между ними.

На практике чаще всего используют первый случай, а прямоугольный треугольник показывает связь с теоремой Пифагора.

Формулировка теоремы синусов

1

Основное равенство

Отношения сторон треугольника к синусам противолежащих углов равны между собой. Запись $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$ показывает, что для всего треугольника действует одна общая связь.

2

Что даёт формула

Если известны хотя бы одна сторона и один подходящий угол, теорема синусов помогает находить другие стороны и углы. Это делает её особенно полезной в задачах с неполными данными.

3

Как помнить правило

Важно запомнить, что в дроби всегда стоят именно соответствующие друг другу элементы: сторона и противолежащий ей угол. Тогда подстановка в формулу становится понятной и надёжной.



Когда используют теорему синусов

1

Пары «сторона и угол»

Теорема синусов удобна, когда известны две пары «сторона и противолежащий угол». В такой ситуации можно напрямую сравнивать отношения и находить недостающий элемент.

2

Два угла и сторона

Если даны два угла и одна сторона, сначала находят третий угол по сумме $A+B+C=180^\circ$. После этого становятся известны все углы, и можно применять теорему синусов.

3

Поиск неизвестной стороны

После нахождения нужного угла формула позволяет вычислить любую сторону треугольника. Поэтому теорема синусов особенно полезна, когда нужно перейти от углов к длинам отрезков.

Главное отличие теорем КОСИНУСОВ И СИНУСОВ



Сравнение двух формул помогает быстро выбрать нужный способ решения треугольника.

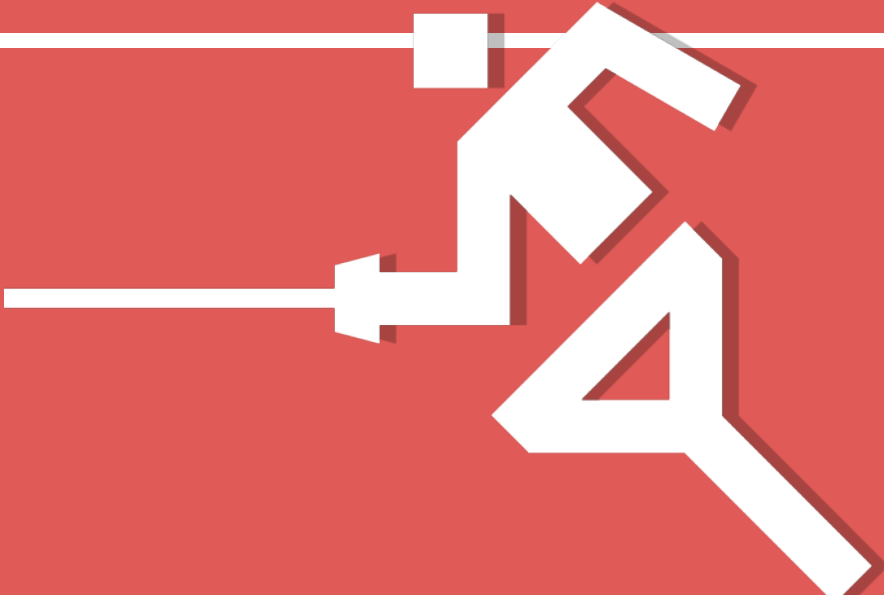
Теорема косинусов удобнее при данных о сторонах, а теорема синусов — когда опорой служат углы и одна сторона.

Признак	Косинусов	Синусов
Связывает	Стороны и угол	Стороны и углы
Нужны данные	3 стороны / 2 стороны	Угол + сторона
Находит	Сторону или угол	Сторону или угол
Чаще	Без прямого угла	По углам треугольника

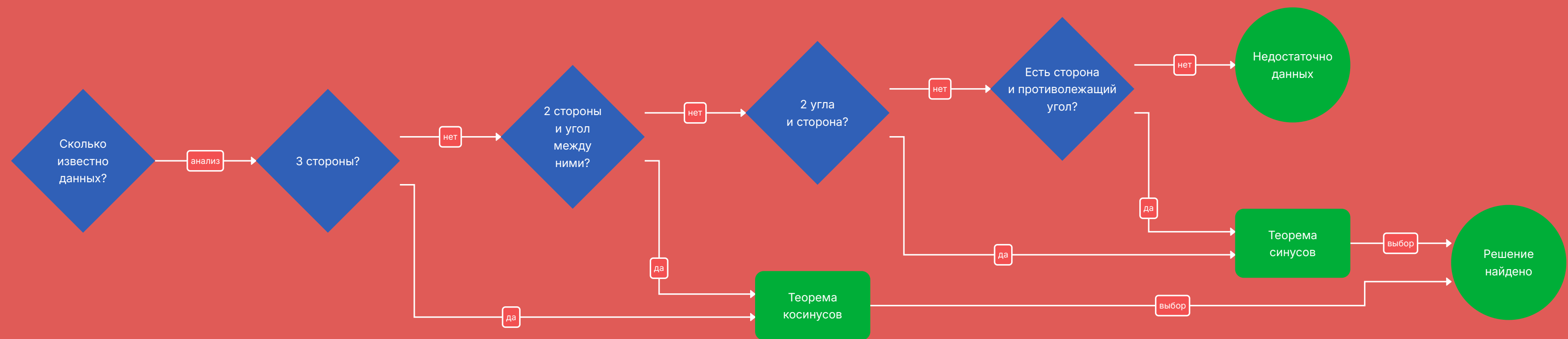
Формулировки теорем косинусов и синусов из школьного курса геометрии.

Как выбрать нужную теорему в задаче

Схема помогает по известным данным определить, какую формулу применять для произвольного треугольника.



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



После подстановки чисел и косинуса угла
удобно сначала вычислить квадрат
стороны, а затем извлечь корень.

67

получается значение
квадрата неизвестной
стороны, из которого
находят
приблизительно 8,2 см

Пример из условия: стороны 7 см и 9 см, угол 60° .

Пример решения с теоремой синусов

1. Находим третий угол

1 Сначала используем сумму углов треугольника и получаем $C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$. Без этого невозможно применить отношения синусов ко всем сторонам правильно.

2. Записываем отношение

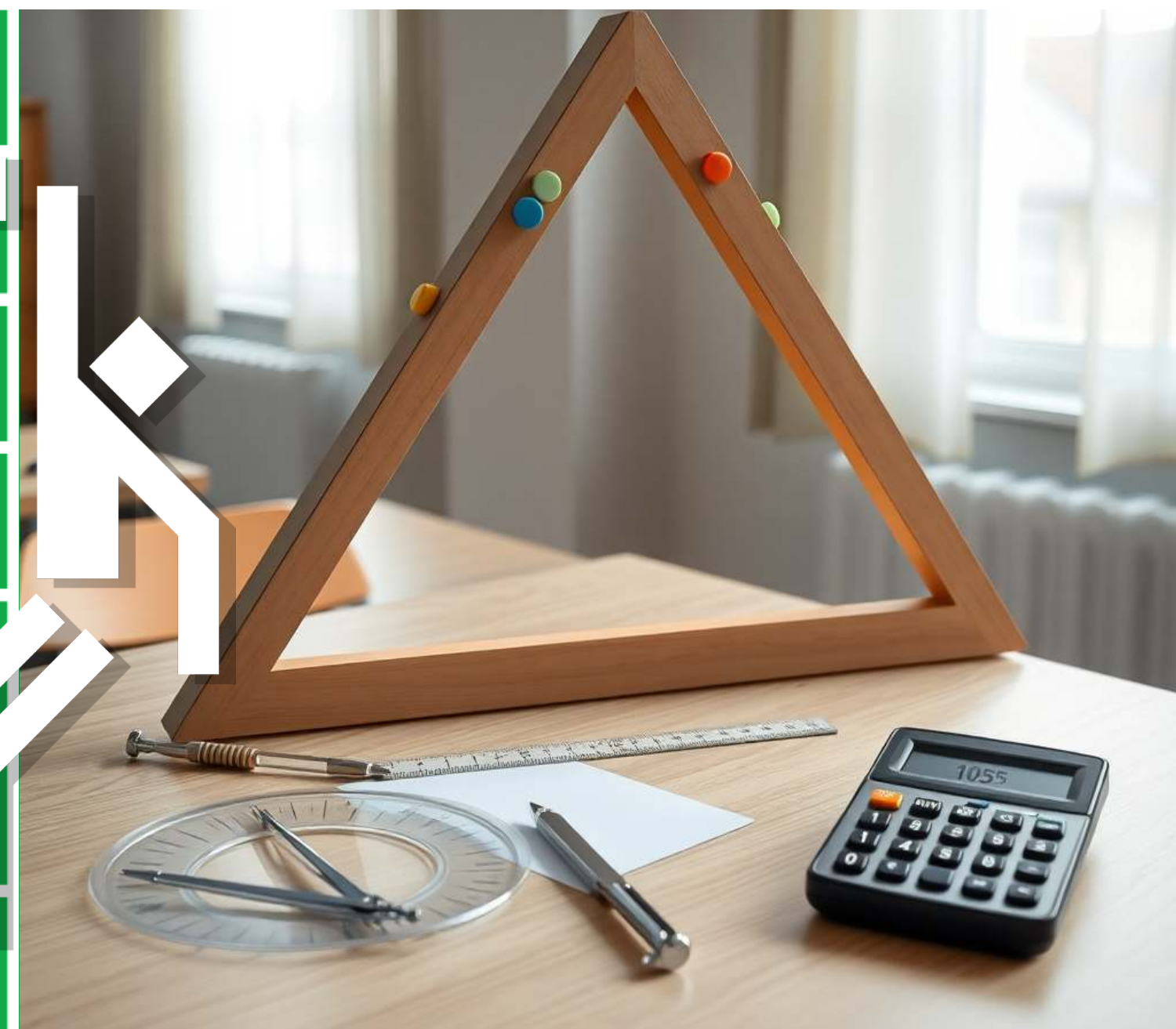
2 Берём равенство $a/\sin A = b/\sin B$ и подставляем известные значения. Здесь важно не перепутать стороны и противолежащие им углы, иначе ответ получится неверным.

3. Вычисляем неизвестную сторону

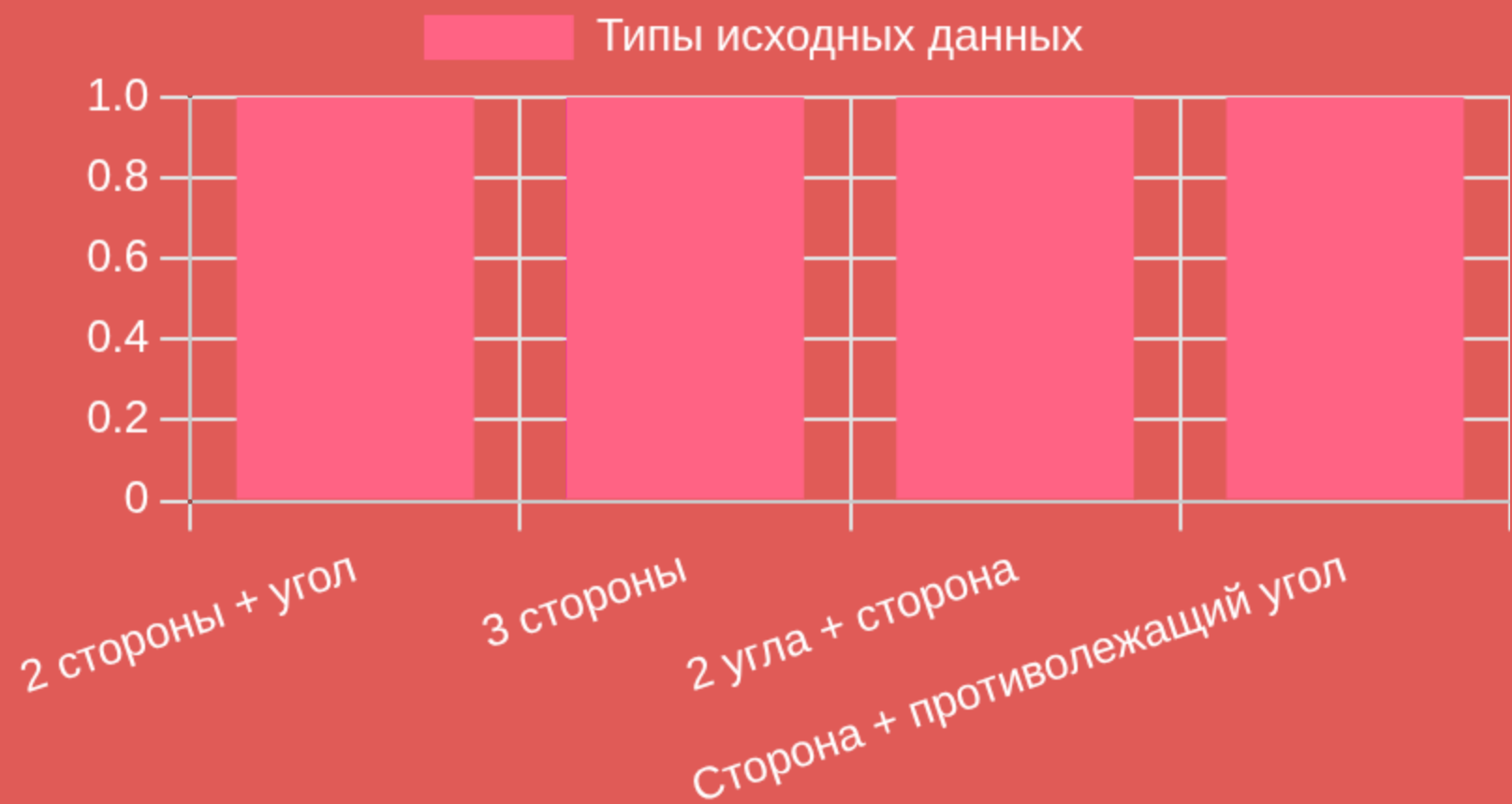
3 Подставляем числа: $b = 10 \cdot \sin 45^\circ / \sin 30^\circ$. После приближённых вычислений получаем около 14,1 см. Это показывает, как теорема синусов помогает находить сторону по одной известной паре.

4. Проверяем результат

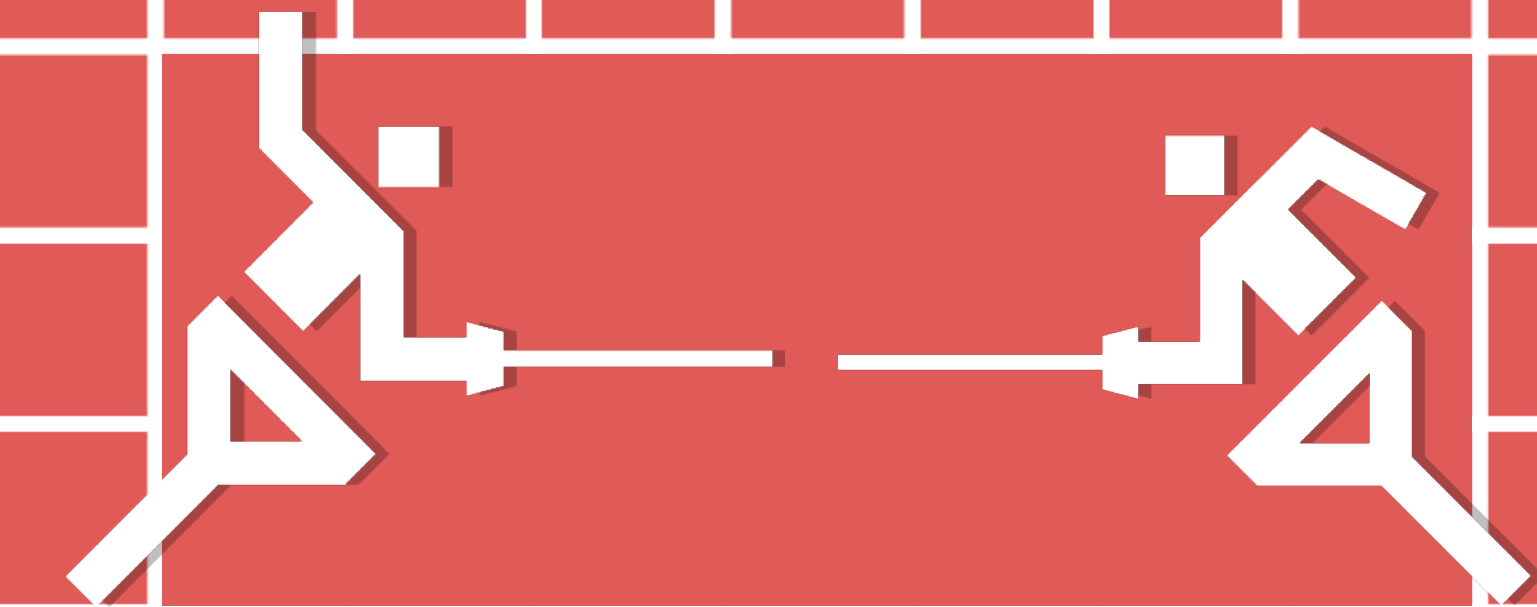
4 Ответ нужно сопоставить с размерами треугольника: найденная сторона больше 10 см, что логично, потому что напротив угла 45° лежит более длинная сторона, чем напротив 30° .



Какие данные чаще встречаются в задачах



Схематическое распределение по типам условий из учебных задач по теме.



Каждый тип данных указывает, с какой теоремы лучше начать решение и какие элементы треугольника уже можно считать известными.

Все четыре набора данных ведут к решению треугольника, но выбор формулы зависит от того, что именно известно сначала.

Обозначения на чертеже треугольника

Треугольник ABC

На чертеже удобно сразу подписать вершины A, B и C, а стороны обозначить a, b, c. Тогда видно, какая сторона лежит напротив каждого угла, и формулы читать значительно проще.



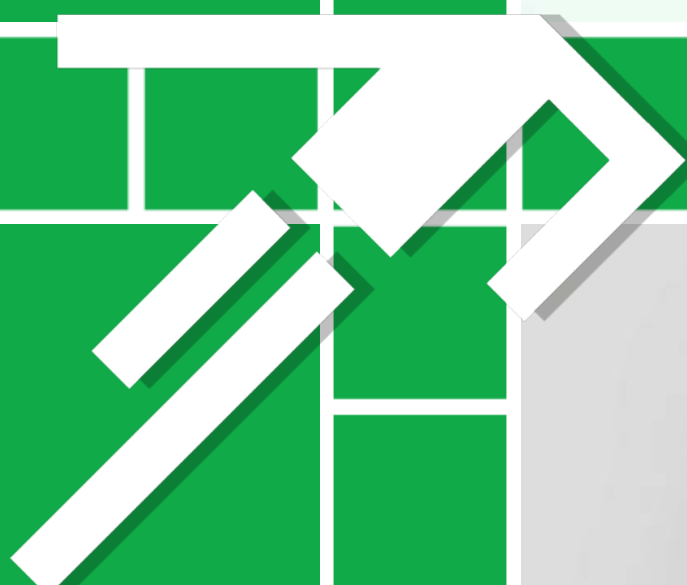
Отмеченный угол между сторонами

Если даны две стороны, на рисунке выделяют угол между ними. Именно он нужен для теоремы косинусов, поэтому его стоит отметить дугой или цветом, чтобы не перепутать с соседними углами.

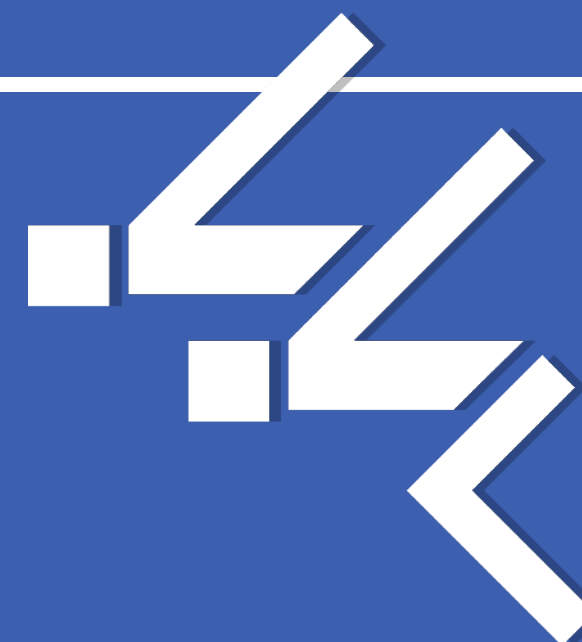


Пары «сторона — угол»

Для теоремы синусов на схеме полезно сразу показать противоположные пары: сторону и угол напротив неё. Такая разметка помогает быстро увидеть, какие элементы уже связаны между собой.



Типичные ошибки при решении задач



Путают обозначения

Часто забывают, что сторона a лежит напротив угла A , а не рядом с ним. Из-за такой путаницы в формулу подставляют неверные элементы и получают ошибочный ответ.

Берут не тот угол

В теореме косинусов нужен угол между двумя известными сторонами, а не любой угол треугольника. Если выбрать соседний угол, вычисление перестанет соответствовать условию задачи.

Применяют теорему синусов раньше времени

Эта формула работает, когда известна хотя бы одна пара «сторона и противолежащий угол». Без такой пары отношения синусов не дают нужного результата.

Слишком рано округляют

Если округлять промежуточные значения до десятых или сотых на каждом шаге, итог может заметно измениться. Лучше сохранять больше знаков до самого конца вычислений.

Не проверяют сумму углов

После нахождения неизвестного угла полезно убедиться, что все углы треугольника в сумме дают 180° . Такая проверка помогает вовремя заметить ошибку в решении.

Что известно и какую формулу выбрать



Известно	Теорема	Находят
3 стороны	косинусов	угол
2 стороны + угол	косинусов	третью сторону
2 угла + сторона	синусов	вторую сторону
сторона + противолежащий угол	синусов	остальные элементы

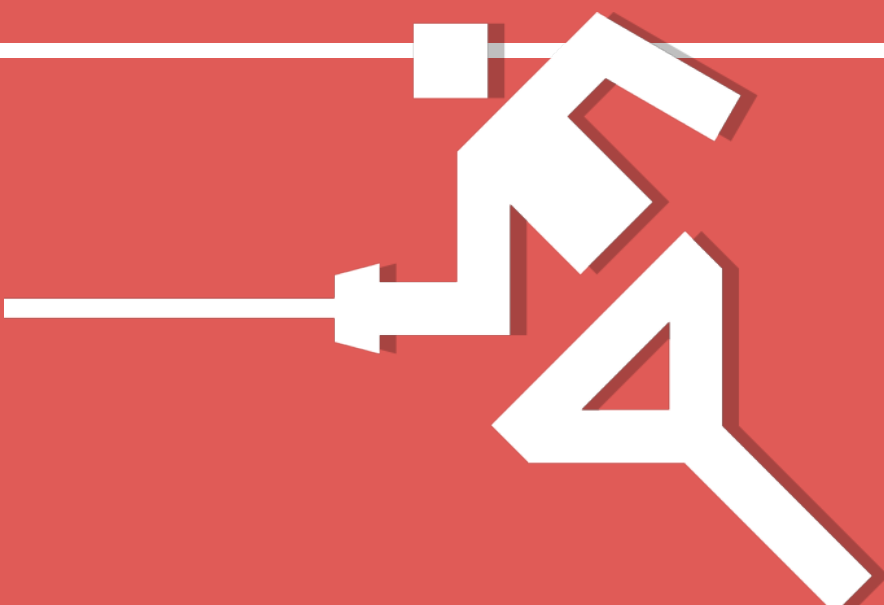
Таблица показывает, какие данные уже достаточны для начала решения и какую теорему удобно применять в каждом случае.

Выбор формулы зависит не от вида задачи, а от набора известных элементов. Косинусы удобны для сторон, синусы — для углов и одной стороны.

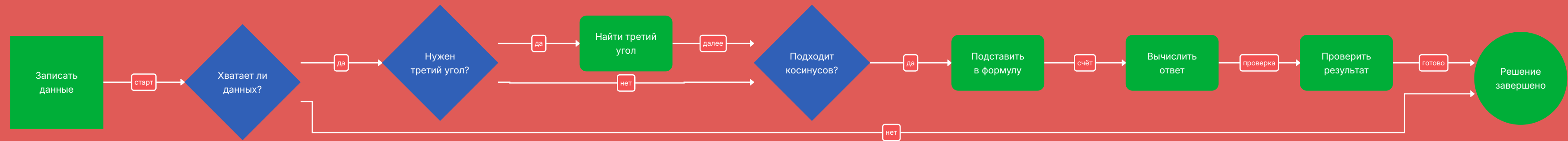
Учебные правила применения теорем косинусов и синусов.

Алгоритм решения треугольника

Последовательность действий помогает не пропустить важный шаг и выбрать подходящую формулу без лишних вычислений.



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Где применяются теоремы косинусов и синусов



Геометрия и измерения

В школьной геометрии теоремы помогают находить стороны и углы в произвольных треугольниках. Это удобно, когда прямоугольного угла нет и теорема Пифагора не подходит.



Геодезия и навигация

При измерении расстояний на местности часто нельзя дойти до каждой точки напрямую. Тогда используют известные углы и опорные отрезки, чтобы вычислить нужное расстояние.



Архитектура

Проектировщикам важно точно задавать наклоны, размеры и взаимное расположение деталей. Треугольные расчёты помогают проверять, как элементы конструкции будут соединяться между собой.



Компьютерная графика

В компьютерной графике треугольники лежат в основе многих изображений и моделей. Формулы позволяют вычислять длины и углы, чтобы объекты выглядели реалистично и правильно поворачивались.



Учёба и тренировка мышления

На уроках эти теоремы развивают аккуратность в вычислениях и умение выбирать верную формулу по условию. Это полезный навык для дальнейшего изучения математики.



Итог: две главные формулы для произвольного треугольника

Теорема косинусов помогает работать со сторонами, а теорема синусов — с углами и одной известной стороной. Вместе они делают произвольный треугольник понятным и решаемым.

