

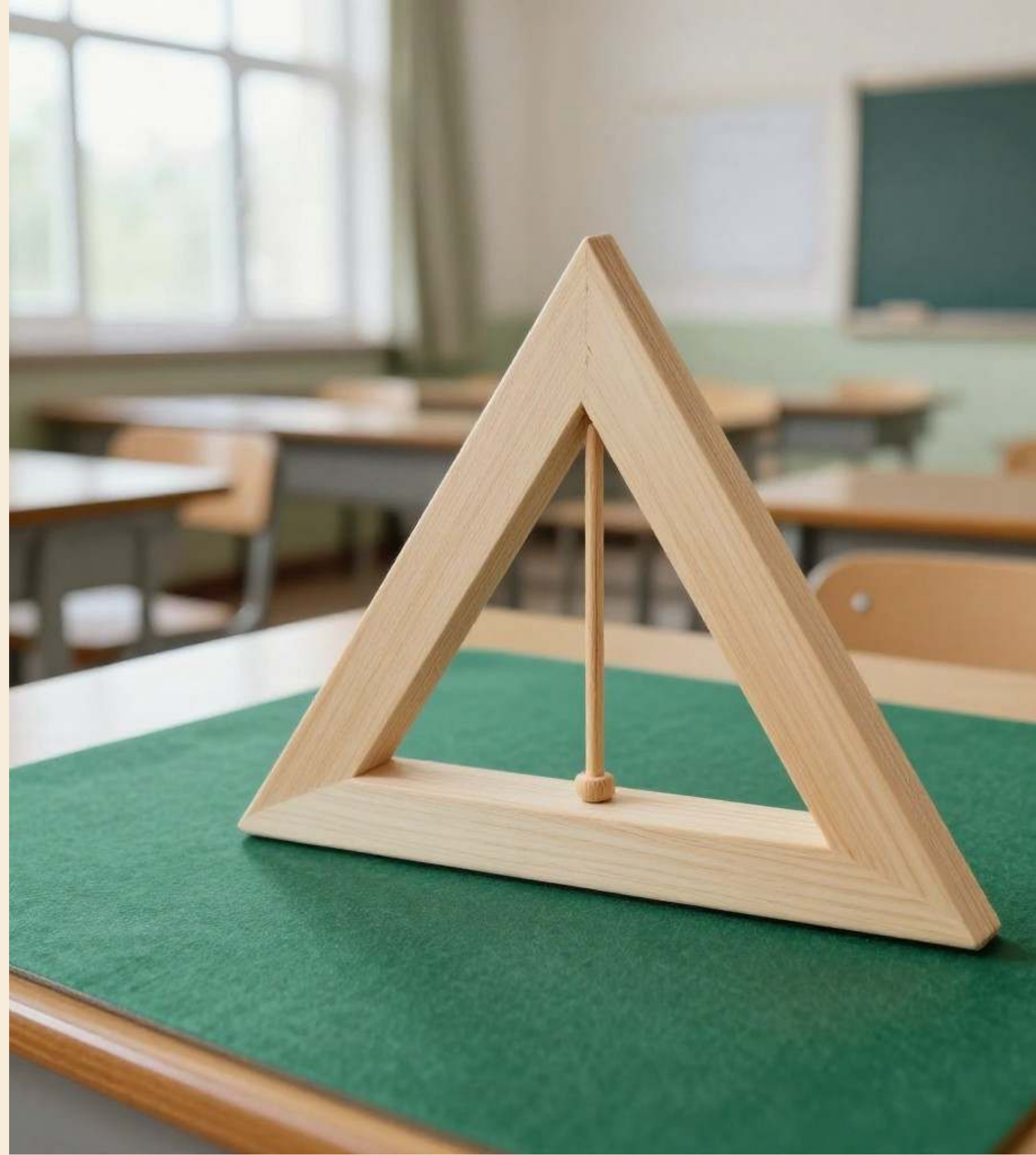
Высота, вписанная и описанная окружности в правильном треугольнике

Три величины, одна сторона, единые формулы.



Зачем изучать правильный треугольник

Правильный треугольник часто встречается в задачах на площади, окружности и построения. В 9 классе важно уметь находить его высоту, а также радиусы вписанной и описанной окружностей.



Свойства правильного треугольника

Равные стороны

01

В правильном треугольнике все три стороны равны, поэтому его удобно обозначать одной буквой a . Это сразу упрощает записи и делает формулы короче.

Равные углы

02

Каждый внутренний угол правильного треугольника равен 60° . Такая симметрия помогает быстро находить другие элементы фигуры и проверять правильность решения.

Одна особая линия

03

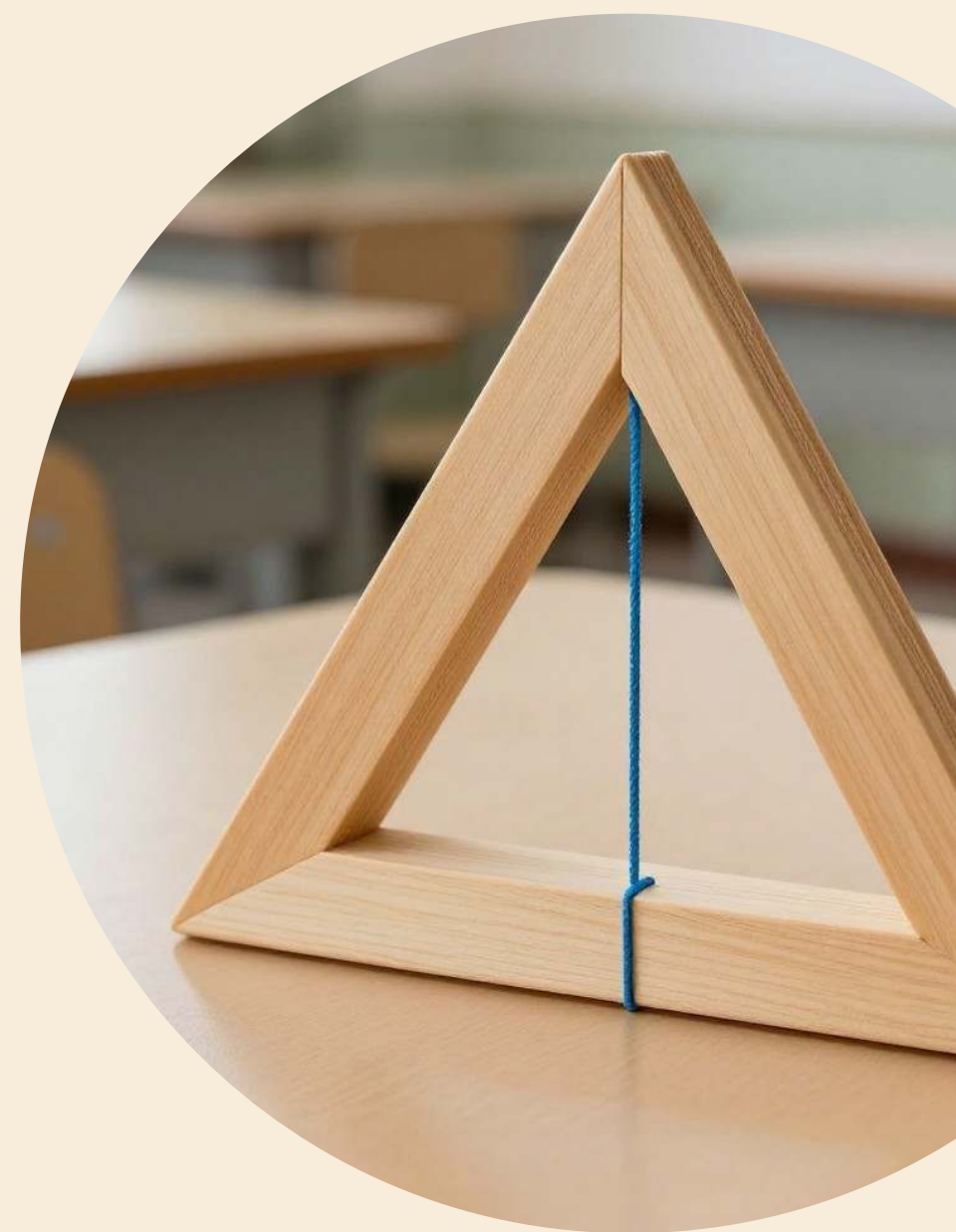
Линия, проведённая из вершины к противоположной стороне, одновременно является высотой, медианой и биссектрисой. Она делит треугольник на две равные части.

3

Два прямоугольных треугольника

04

После проведения этой линии фигура распадается на два одинаковых прямоугольных треугольника $30^\circ-60^\circ-90^\circ$. Именно из них выводятся основные формулы темы.



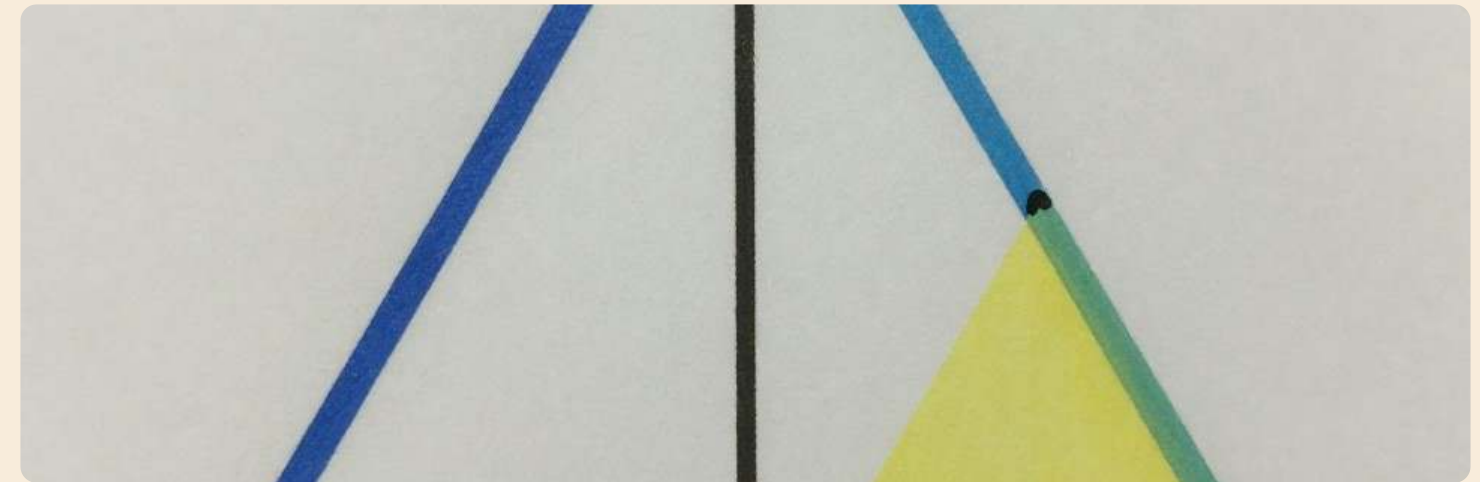
Разбиение на два прямоугольных треугольника

Половина основания

Высота, опущенная из вершины, делит противоположную сторону пополам. Поэтому один из катетов нового треугольника равен $a/2$, а не всей стороне.

Гипотенуза и высота

Гипотенузой становится сторона правильного треугольника, то есть a . Второй катет — это искомая высота h , которую нужно выразить через сторону.



Углы 30° и 60°

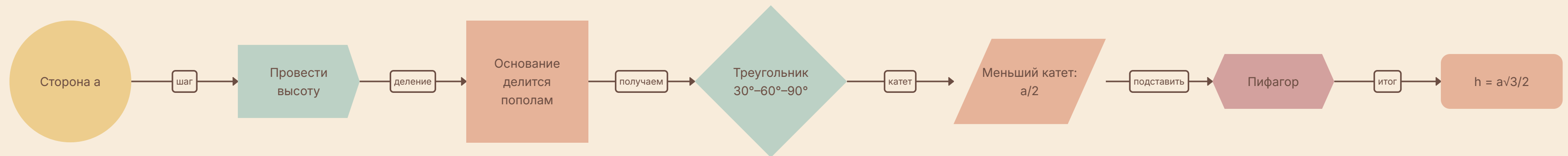
Внутри получаются углы 30° и 60° , поэтому можно использовать известные свойства треугольника $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ и теорему Пифагора.

Основа для формулы

На схеме особенно важно видеть обозначения a , h и $a/2$. Именно этот рисунок показывает, почему высота выражается через сторону с множителем $\sqrt{3}/2$.

Как находят высоту правильного треугольника

Переход от стороны к прямоугольному треугольнику и применению теоремы Пифагора.



$$a\sqrt{3}/2$$

— это высота правильного
треугольника через его сторону.

Геометрический вывод по теореме Пифагора

Формула показывает, что высота
зависит только от стороны и всегда
больше половины этой стороны.

Соотношения в треугольнике 30°–60°–90°

Таблица показывает стандартные связи между сторонами и углами, которые используют при выводе формул правильного треугольника.

По этим отношениям легко находить высоту и проверять вычисления.

Элемент	Через a	Смысл
Гипотенуза	a	Сторона треугольника
Меньший катет	a/2	Половина основания
Больший катет	a√3/2	Высота
Острый угол	30°	Меньший угол
Острый угол	60°	Больший угол

Центр вписанной окружности в правильном треугольнике

Точка равновесия

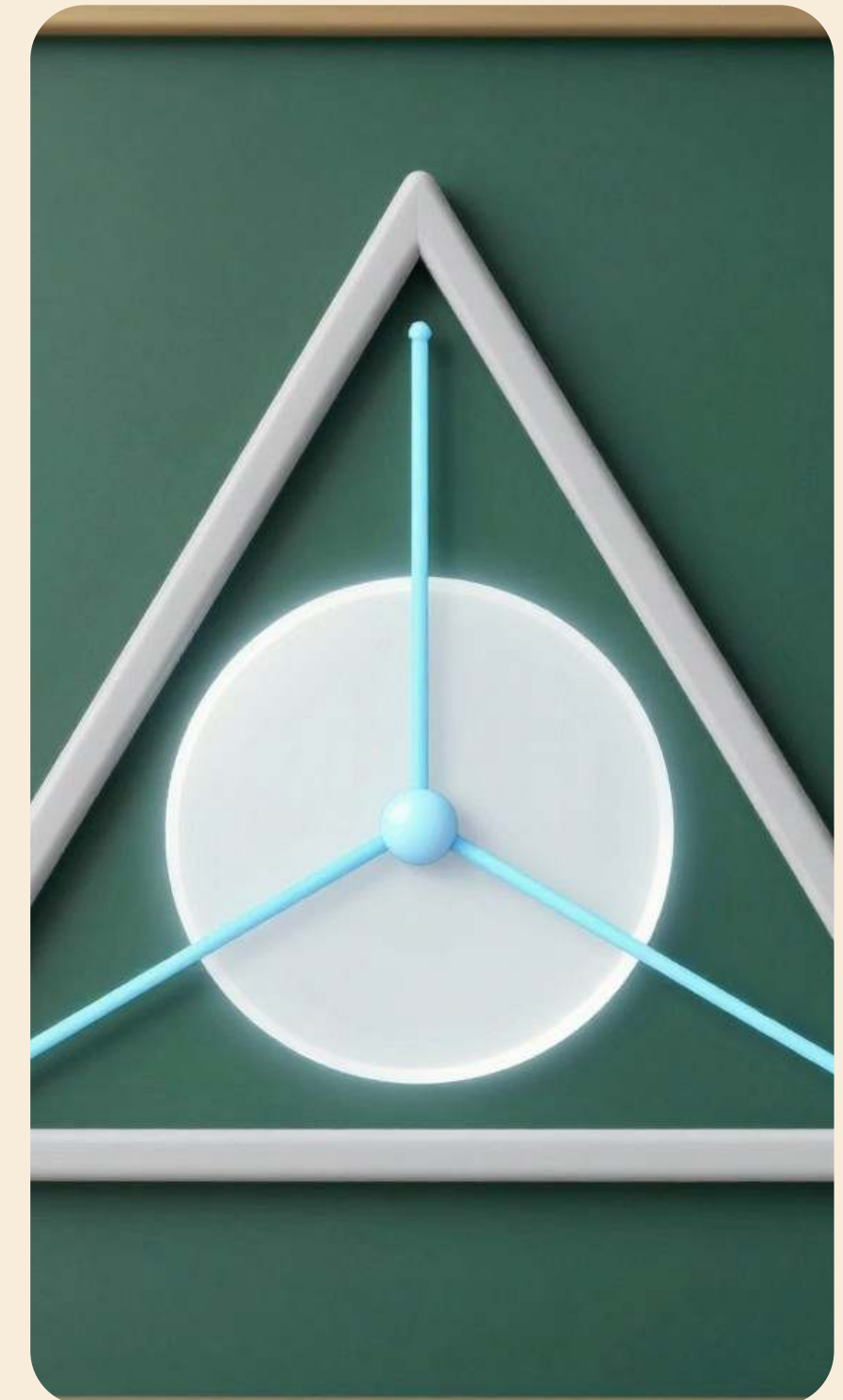
В правильном треугольнике центр вписанной окружности находится в одной и той же точке, где пересекаются медианы, биссектрисы и высоты.

Равные расстояния до сторон

Эта точка одинаково удалена от всех сторон фигуры. Поэтому из неё можно провести три одинаковых перпендикуляра к сторонам треугольника.

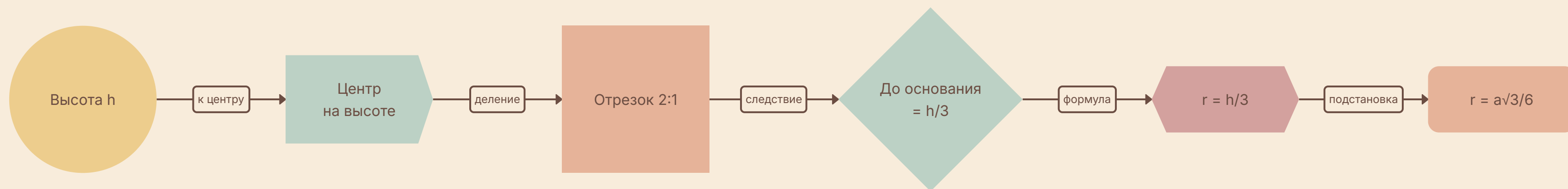
Что означает радиус r

Расстояние от центра до стороны называют радиусом вписанной окружности. Оно одинаково для любой стороны, потому что треугольник обладает полной симметрией.



Путь к формуле радиуса вписанной окружности

Связь между высотой правильного треугольника и положением центра вписанной окружности.



$$a\sqrt{3}/6$$

— это радиус вписанной окружности правильного треугольника.

Геометрический вывод через высоту правильного треугольника

Эта формула получается из связи $r = h/3$ и помогает быстро находить радиус по одной стороне.

Как устроен центр описанной окружности



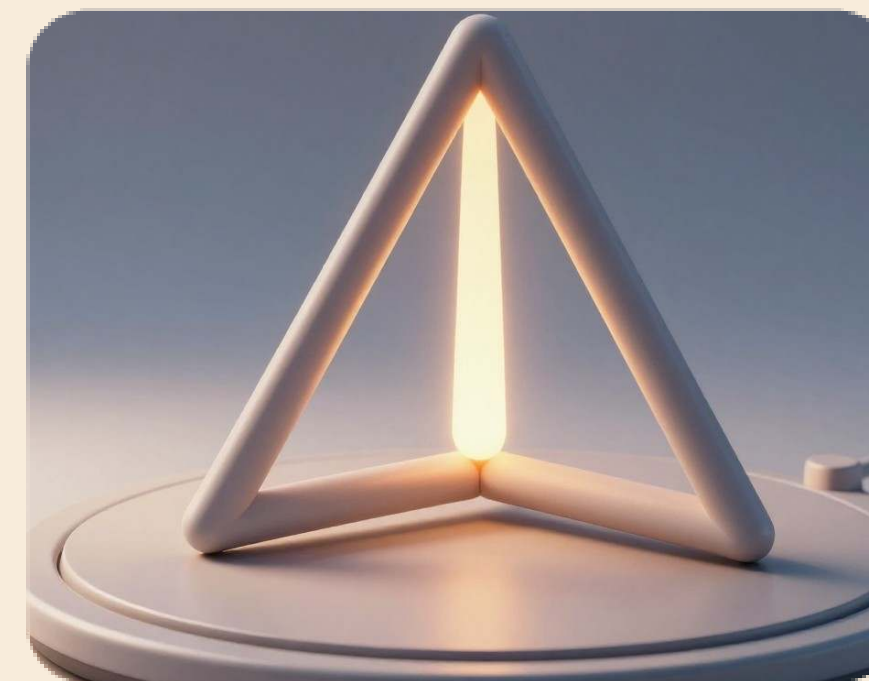
Одна точка для трёх вершин

В правильном треугольнике центр описанной окружности находится ровно в середине фигуры. От него до каждой вершины можно провести радиус одинаковой длины. На рисунке это удобно показать тремя равными отрезками, выходящими из одной точки.



Совпадение с центром вписанной окружности

У правильного треугольника все важные центры совпадают. Поэтому одна и та же точка одновременно помогает строить и вписанную, и описанную окружности. Такое совпадение хорошо видно на симметричной схеме с вершинами, окружностью и общим центром.



Радиусы как часть симметрии

Три радиуса к вершинам подчёркивают, что фигура одинаково устроена во всех направлениях. Если повернуть правильный треугольник, его вид не изменится, а расстояния от центра до вершин останутся равными. Именно поэтому радиус описанной окружности удобно обозначать одной буквой R .

Сравнение высоты, радиуса вписанной и описанной окружностей

Все три величины выражаются через одну и ту же сторону, но отличаются коэффициентами. Это помогает быстро сравнивать их без дополнительных построений.

Высота самая большая, радиус вписанной окружности — самый маленький; при этом R вдвое больше r , а h в три раза больше r .



Как получить формулу радиуса описанной окружности

Берём правильный треугольник со стороной a . Благодаря симметрии его центр окружности легко связать с высотой и вершинами фигуры.

⋮

Шаг 1. Известна сторона

Шаг 2. Связь с высотой

Шаг 3. Итоговая формула

⋮

Подставляя $h = a\sqrt{3}/2$, получаем $R = a/\sqrt{3}$. Так одна сторона сразу задаёт радиус окружности, проходящей через все вершины.

⋮

Из равенства частей высоты получаем отношение $R = 2h/3$. Это позволяет выразить радиус окружности через уже найденную высоту.

Формулы для основных элементов

Величина	Через a	Через h
h	$a\sqrt{3}/2$	h
r	$a\sqrt{3}/6$	$h/3$
R	$a/\sqrt{3}$	$2h/3$

Таблица показывает, как высота, радиусы вписанной и описанной окружностей выражаются через сторону правильного треугольника и через высоту.

Все три величины связаны между собой простыми отношениями. По одной стороне можно сразу найти и высоту, и оба радиуса.

12 см

позволяет сразу найти все три величины без дополнительных измерений.

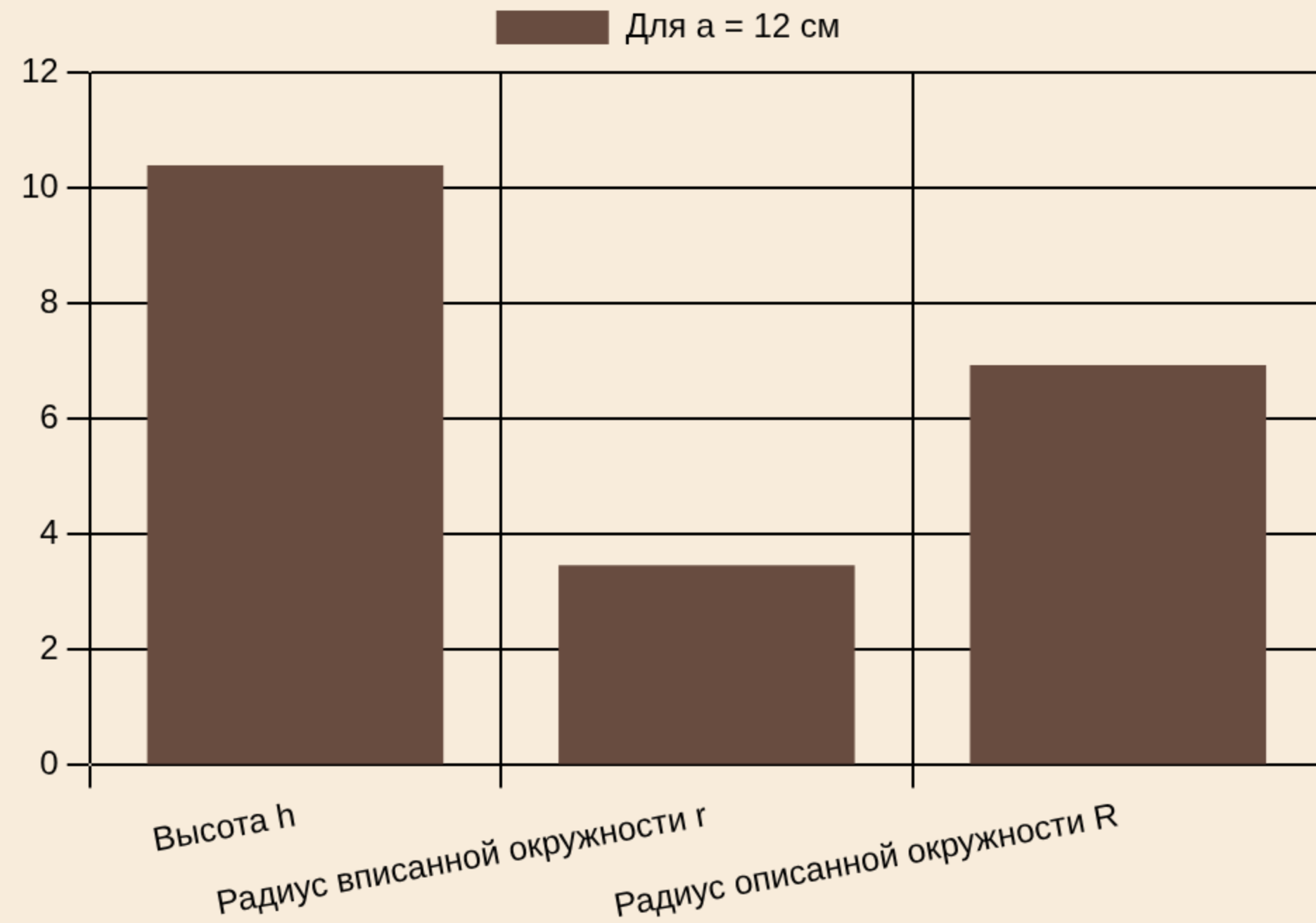
Подстановка $a = 12$ см в формулы правильного треугольника.

При такой стороне удобно проверить, что формулы работают согласованно: высота, радиус вписанной окружности и радиус описанной окружности выражаются через один и тот же параметр.

Числовой пример для $a = 12$ см

На диаграмме видно, что все значения кратно связаны между собой. Это делает проверку вычислений особенно быстрой и наглядной.

Соотношение сохраняется: h больше R , а R больше r . Значит, одна сторона полностью определяет размер фигуры и её окружностей.



Расчёт по формулам $h = a\sqrt{3}/2$, $r = a\sqrt{3}/6$, $R = a/\sqrt{3}$ при $a = 12$ см.

Типичные ошибки при решении задач

1

Путают два радиуса

Часто r и R меняют местами, хотя один относится к расстоянию до сторон, а другой — к расстоянию до вершин. Полезно сразу подписывать окружности на рисунке, чтобы не потерять смысл формулы.

2

Забывают про половину основания

При проведении высоты основание делится пополам, поэтому появляется отрезок $a/2$. Если пропустить этот шаг, невозможно правильно получить треугольник $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ и верную формулу высоты.

3

Ставят неверный коэффициент

Иногда пишут $h = a/2$, но в правильном треугольнике высота больше половины стороны. В формуле обязательно присутствует множитель $\sqrt{3}/2$, который появляется из теоремы Пифагора.

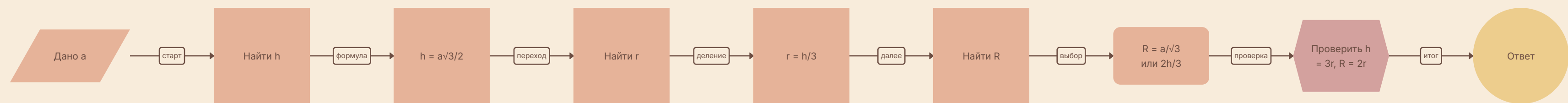
4

Неправильно понимают радиус R

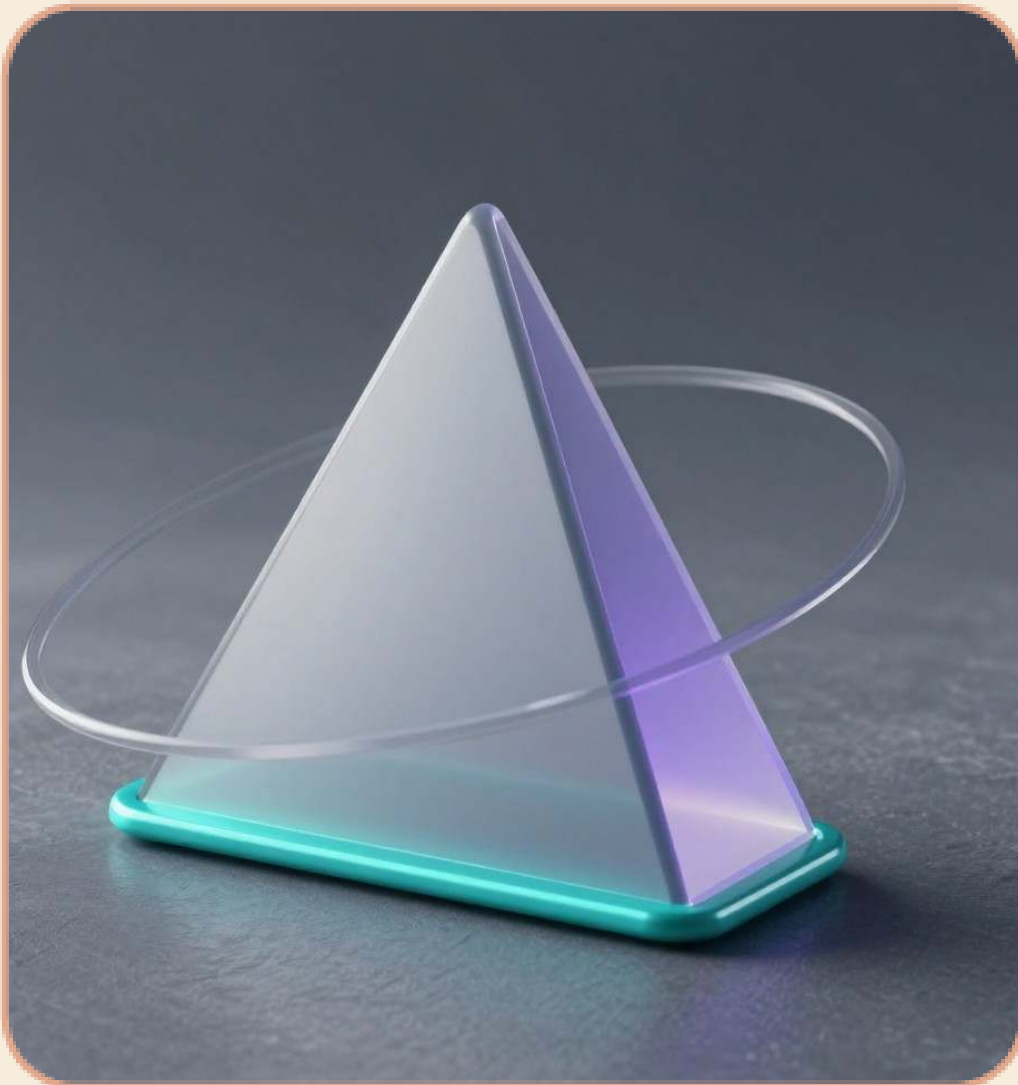
Радиус описанной окружности — это расстояние от центра до вершины, а не до стороны. Если помнить это, легче отличить R от r и избежать путаницы в ответе.

Порядок решения задач

Последовательность основана на стандартных формулах правильного треугольника.



Что показывают формулы на самом деле



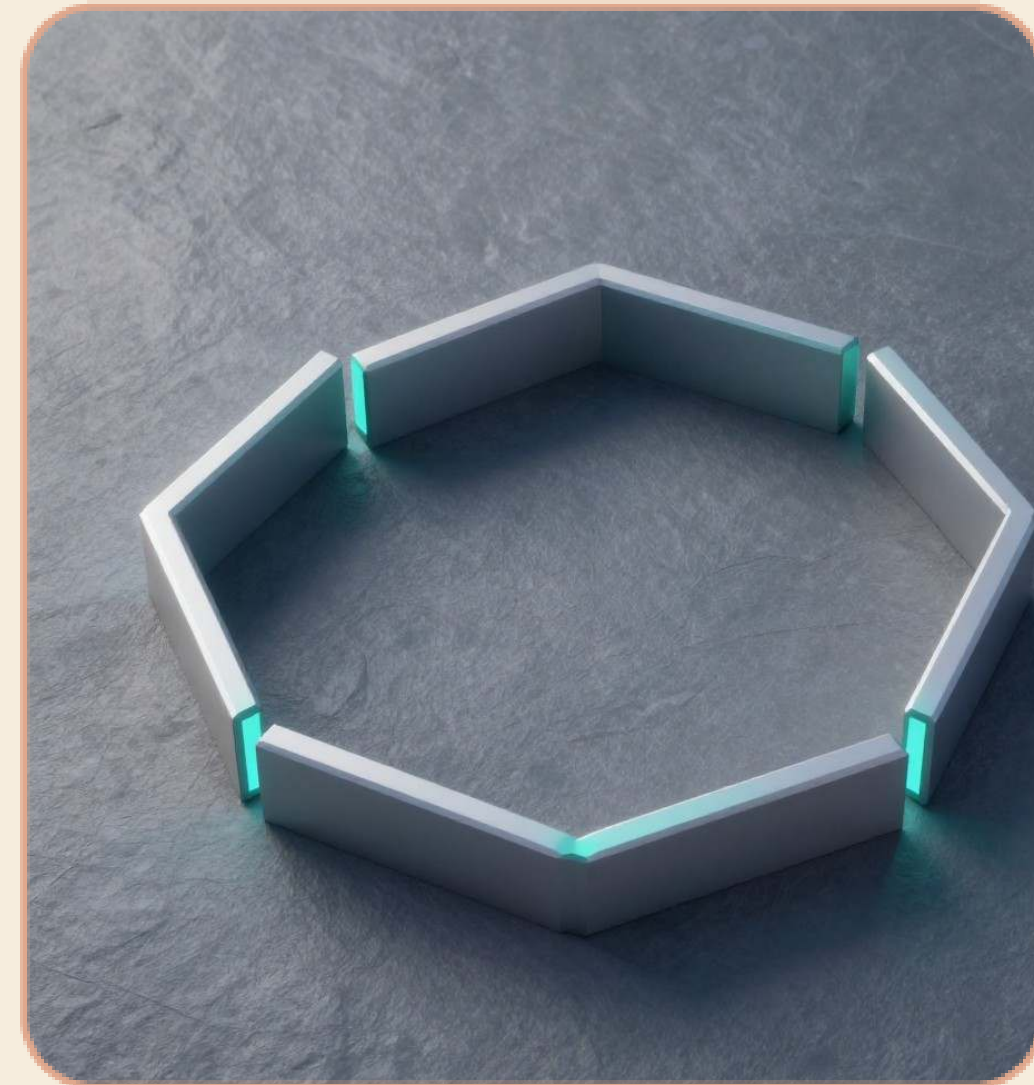
Одна сторона — вся фигура

Если известна сторона правильного треугольника, форма уже определена полностью. Из-за равных сторон и углов высота, вписанная окружность и описанная окружность тоже становятся однозначно известными. На схеме это видно по строгой симметрии и общему центру.



Центр как точка равновесия

В правильном треугольнике центр окружностей находится в особом месте, где сходятся главные линии. Он одинаково удалён и от сторон, и от вершин, поэтому фигура выглядит уравновешенной. Именно это свойство объединяет все изученные формулы.



Симметрия в каждом отрезке

Три равных угла по 60° и совпадающие центры показывают, что треугольник устроен очень упорядоченно. Отрезки к сторонам и вершинам имеют чёткие связи, а это позволяет быстро находить нужные величины без лишних вычислений.

Главный вывод по теме

У правильного треугольника одна сторона определяет высоту, радиус вписанной окружности и радиус описанной окружности. Формулы $h = a\sqrt{3}/2$, $r = a\sqrt{3}/6$ и $R = a/\sqrt{3}$ связаны простыми отношениями и отражают его симметрию.