



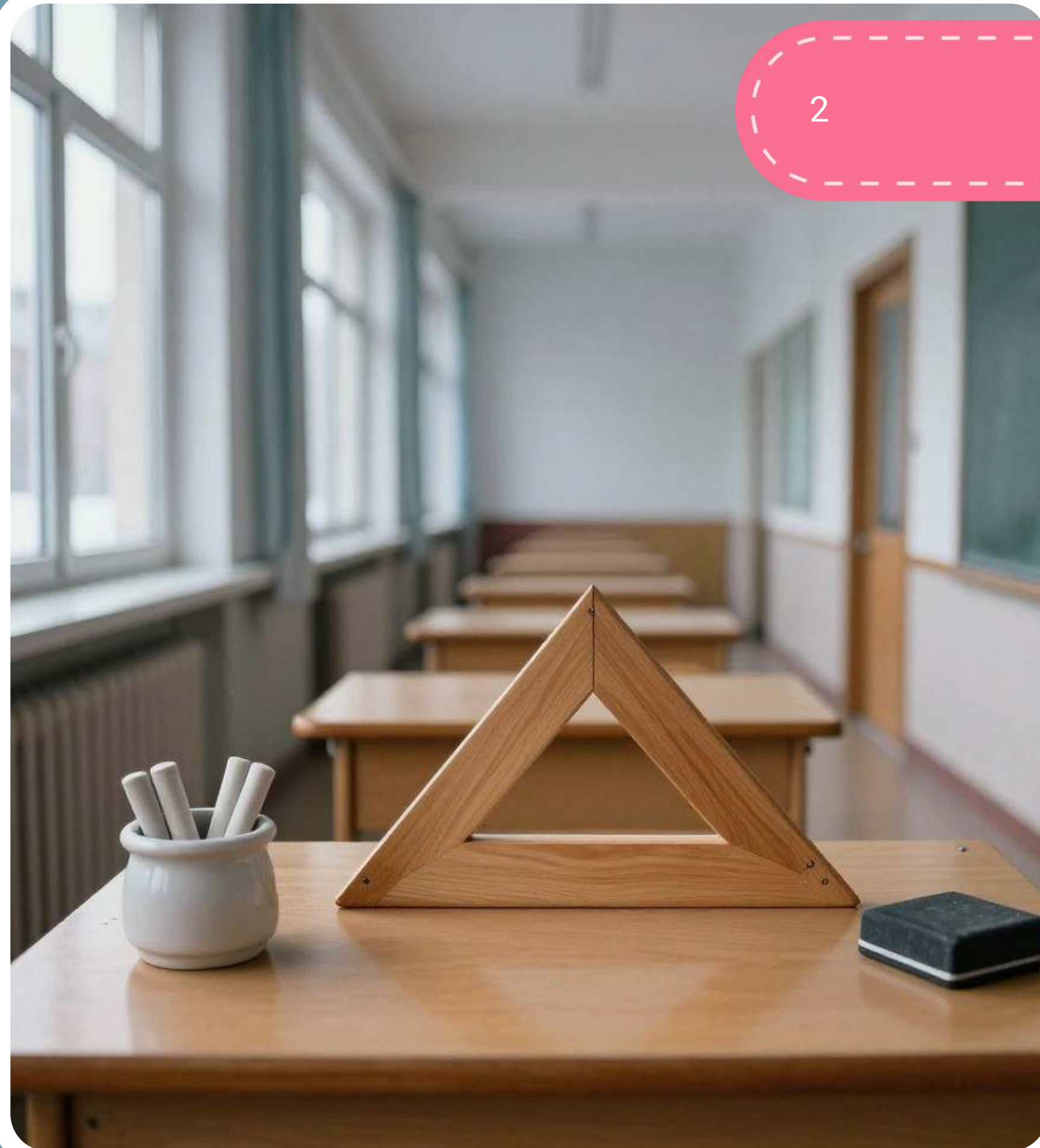
Соотношения в прямоугольном треугольнике

Разберём катеты, гипотенузу и
острые углы: как их сравнивать и
находить неизвестные.



Почему эта тема важна в школьной геометрии

Прямоугольный треугольник встречается на чертежах, при измерениях и построениях. В нём один угол 90° , а два других в сумме дают 90° . Зная связи углов и сторон, можно вычислять неизвестное без лишних измерений.



Элементы прямоугольного треугольника

3

01

Катеты образуют прямой угол, поэтому они «встречаются» в точке с отметкой 90° . Именно катеты участвуют в прямом угле, и от них зависит форма треугольника.

02

Гипотенуза лежит напротив прямого угла и всегда самая длинная сторона. В обозначениях её удобно записывать как c , потому что она фигурирует в главной формуле.

03

Острые углы обычно называют α и β , причём $\alpha + \beta = 90^\circ$. Стороны записывают как a , b и c : a и b — катеты, c — гипотенуза; так проще работать с формулами.

Как связаны углы и стороны

4



В прямоугольном треугольнике большему острому углу соответствует более длинная сторона напротив него: если угол α больше, то противолежащий катет длиннее. Эта связь помогает сравнивать стороны без вычислений.



Если острый угол увеличивается, противолежащий ему катет тоже растёт, а другой катет — уменьшается. На рисунках это особенно хорошо видно, когда сравнивают треугольники с одной гипотенузой.

Сравнение острого угла и противолежащего катета

5

При фиксированной гипотенузе длина
противолежащего катета равна
произведению гипотенузы на $\sin$ угла.

График показывает устойчивую
закономерность: чем больше угол, тем больше
противлежащий катет; при уменьшении угла
он сокращается.

Построено по соотношению длины катета и функции $\sin$ для демонстрации (данные
условные, без привязки к конкретному масштабу).



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Она позволяет находить длину гипотенузы или катета по двум другим сторонам.

Школьный курс геометрии (классическая теорема Пифагора).



Теорема Пифагора — основное правило для прямоугольных треугольников. Именно она связывает стороны через квадрат длины, поэтому вычисления получаются надёжными и быстрыми.

Пифагоровы тройки

7

Наборы чисел (a, b, c) образуют прямоугольный треугольник, если выполняется равенство $a^2 + b^2 = c^2$. Их удобно держать под рукой для проверки расчётов и эскизов.

Катеты	Гипотенуза
3 и 4	5
5 и 12	13
8 и 15	17
7 и 24	25

Такие тройки помогают быстро убедиться, что найденные стороны «сходятся» и что выбранная сторона действительно является гипотенузой.

Школьная геометрия: задания и справочные сведения о пифагоровых тройках.

Синус, косинус и тангенс острого угла

8

.1 •    •

Синус острого угла — это отношение противолежащего катета к гипотенузе. Он отвечает за «насколько противолежащая сторона заметна» по сравнению с самой длинной.

.2 •    •

Косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе. Через него удобнее описывать вклад стороны, которая лежит рядом с данным углом.

.3 •    •

Тангенс — отношение противолежащего катета к прилежащему. Поэтому он связывает два катета напрямую и часто нужен, когда в условии даны обе эти стороны.

.4 •    •

Все три величины зависят только от величины угла. Это позволяет решать задачи, где угол известен, а надо найти длину одной стороны.

Значения синуса для углов 30° , 45° и 60°

9

По мере увеличения угла значение синуса растёт, потому что противолежащий катет «становится заметнее».

Значения для 30° , 45° и 60° удобно запоминать: они помогают быстро подбирать сторону без сложных вычислений.

Стандартные значения тригонометрических функций для углов 30° , 45° , 60° (школьные таблицы).

Треугольник $30^\circ-60^\circ-90^\circ$

10

.1

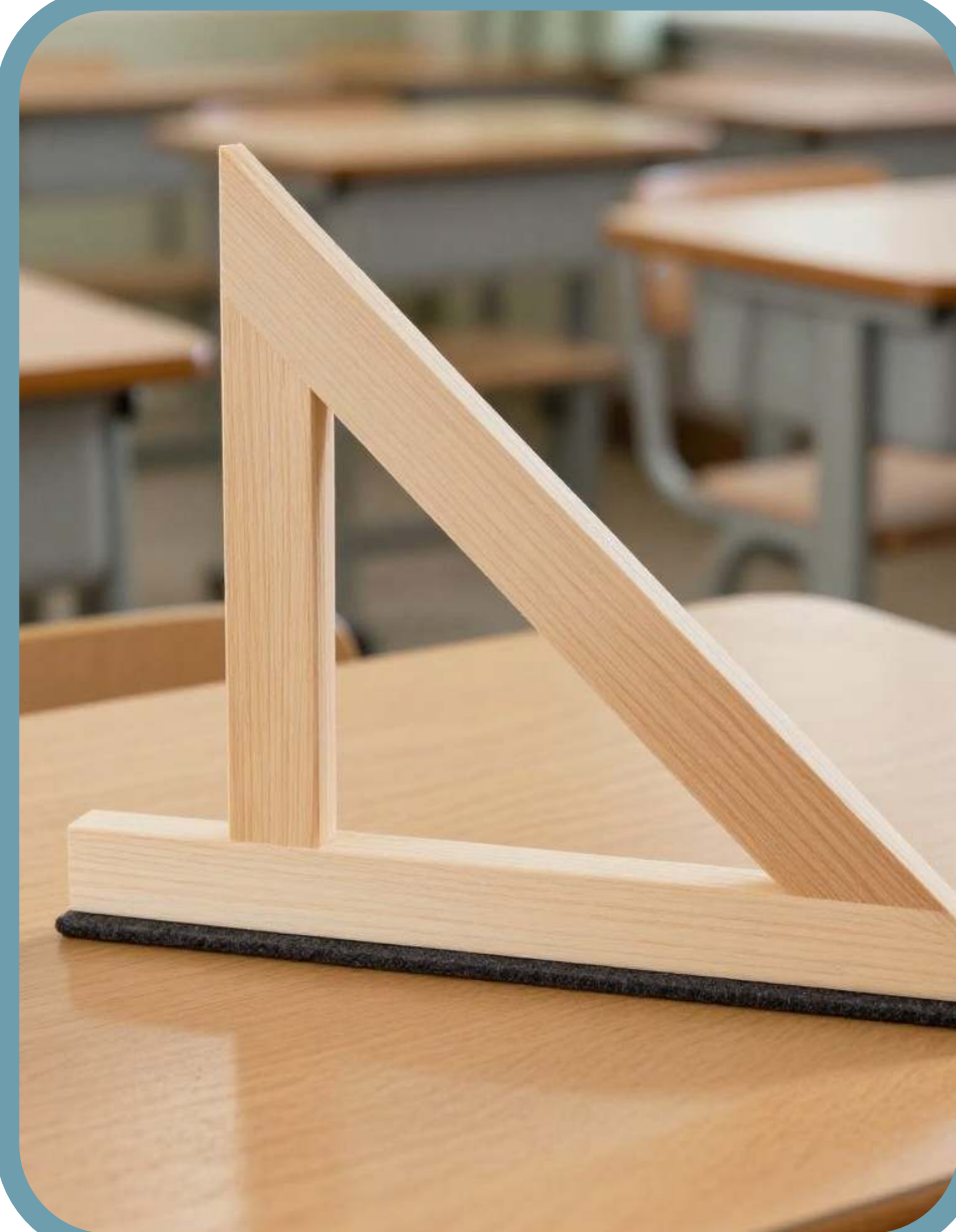


В треугольнике $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ гипотенуза в 2 раза больше меньшего катета, а больший катет равен меньшему катету, умноженному на $\sqrt{3}$. Это даёт готовые соотношения для задач.

.2



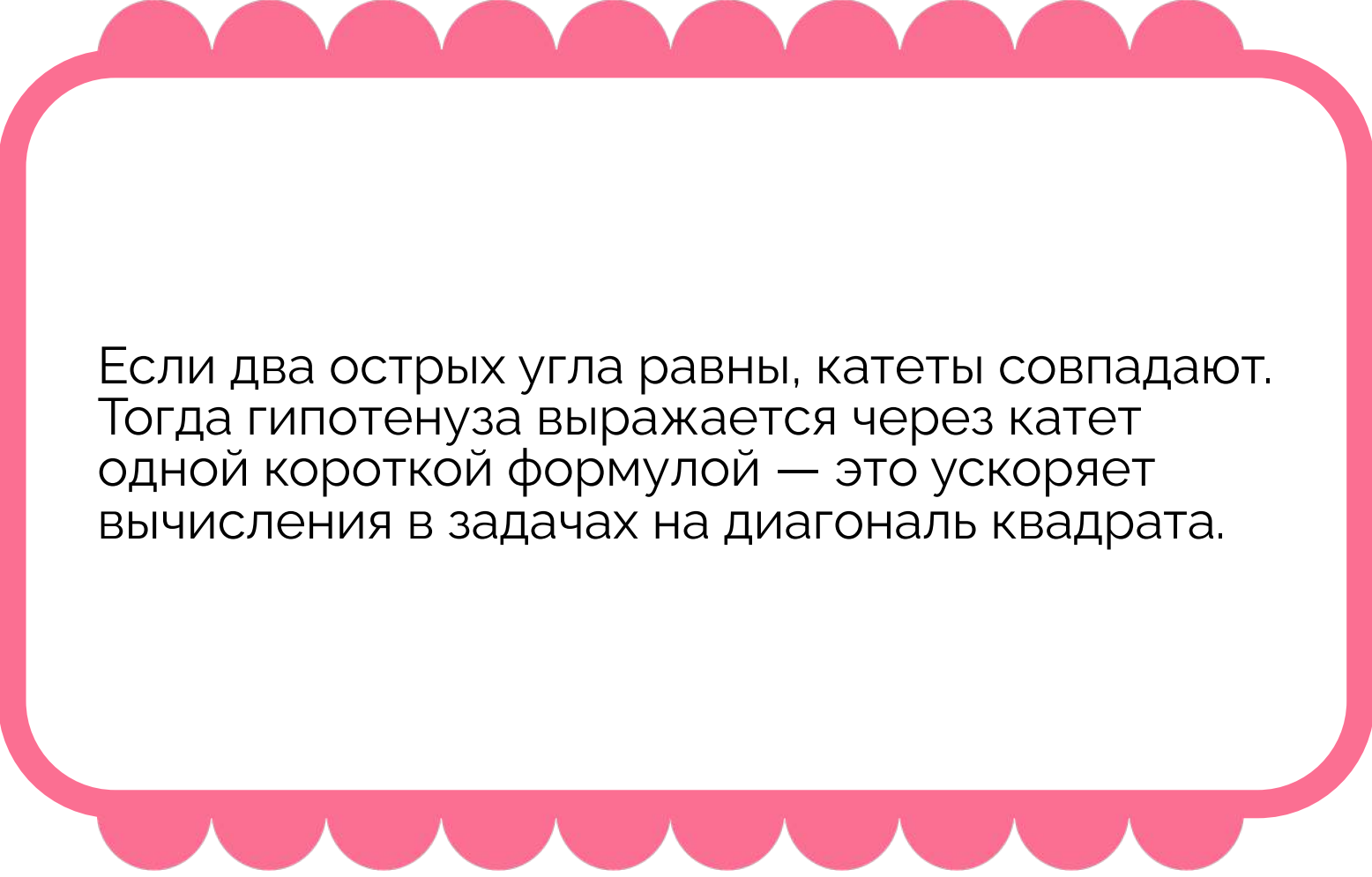
Если меньший катет обозначить x , то стороны будут x , $x\sqrt{3}$ и $2x$. Такой «набор» часто используется, когда угол 30° или 60° уже задан в условии.




$$\sqrt{2}$$

Умножение катета на $\sqrt{2}$ даёт длину гипотенузы в этом равнобедренном прямоугольном треугольнике.

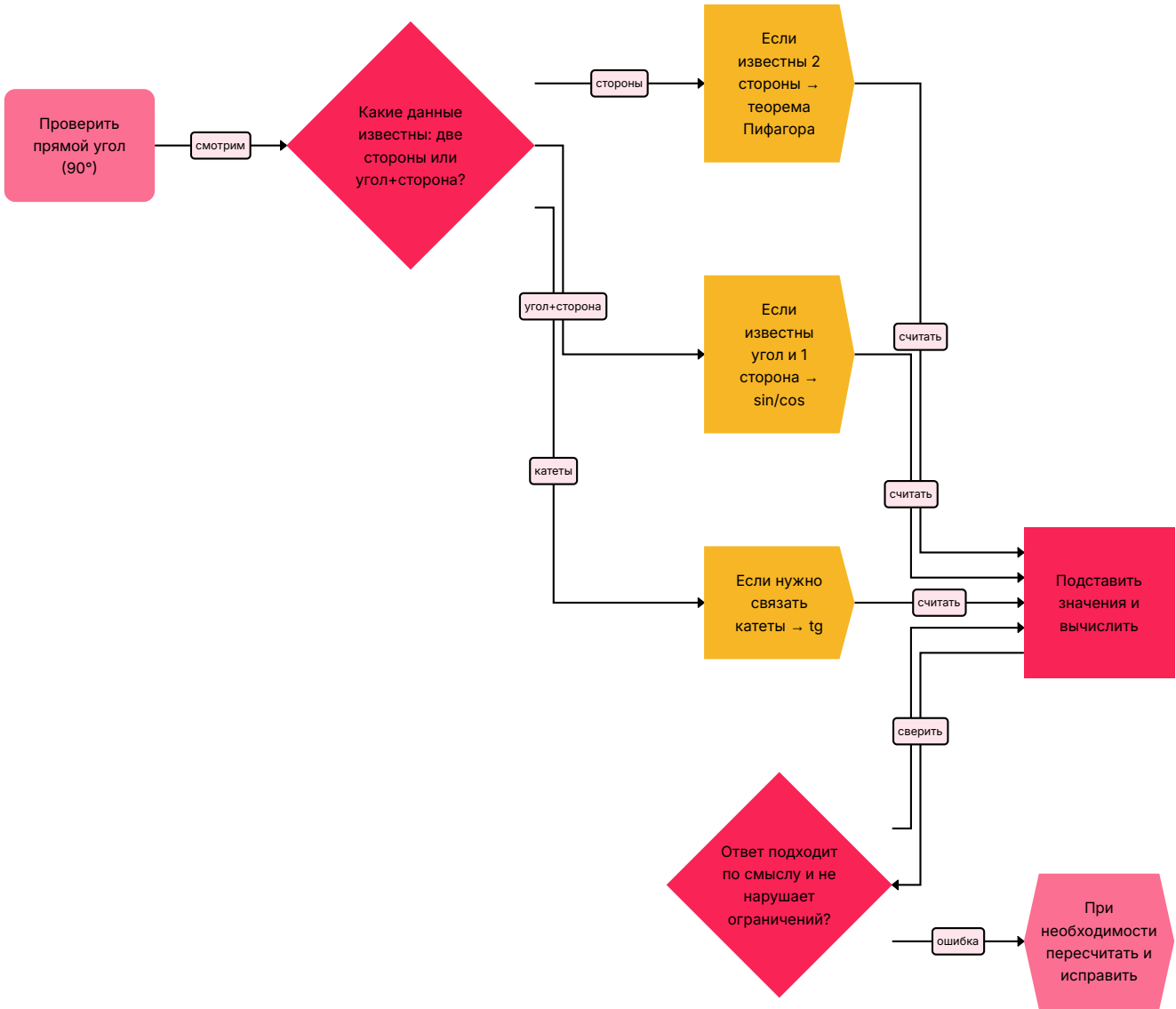
Школьный курс геометрии (свойства равнобедренного прямоугольного треугольника).



Если два острых угла равны, катеты совпадают. Тогда гипотенуза выражается через катет одной короткой формулой — это ускоряет вычисления в задачах на диагональ квадрата.

Алгоритм нахождения неизвестной стороны

Последовательность выбора формулы в прямоугольном треугольнике: по данным условия выбирают Пифагора или тригонометрию.



Как находят неизвестный угол

13



1) Если известны две стороны, вычисляют один острый угол через синус, косинус или тангенс: выбирают отношение, в котором «подходящие» стороны стоят в числителе и знаменателе.



2) Затем находят второй острый угол: он равен 90° минус найденный первый, потому что в прямоугольном треугольнике сумма острых углов всегда 90° .



3) Подставляют проверку по смыслу: угол должен получиться острым, а числа не должны противоречить длинам сторон и исходному рисунку задачи.

Когда выбирать Пифагора, синус, косинус или тангенс

14

Определяйте нужное отношение по рисунку: что стоит напротив угла, что прилежит к нему, и какие стороны даны целиком.

Диаграмма показывает: теорема Пифагора работает только при знании двух сторон треугольника с прямым углом, а тригонометрия — при наличии угла.

Школьные правила и определения синуса, косинуса, тангенса (учебная программа 7 класса).

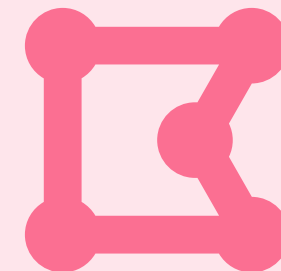
Прямоугольный треугольник в реальных измерениях

15



Высота и расстояние

Высоту здания или столба удобно находить, когда измерен наклон и расстояние по земле: прямой угол задаёт рамку для расчёта по сторонам и углам.



Тень и угол солнца

По длине тени и росту можно восстановить угол наклона лучей. Прямоугольный треугольник помогает перейти от измерения одной величины к другой.



Ширина реки и обходы

Если известны две точки на берегу и расстояние между ними, угол позволяет связать прямые и «скрытые» расстояния через треугольник с прямым углом.



Наклон лестницы

При известной длине лестницы и угле к стене вычисляют высоту подъёма или безопасный наклон. Формулы выбирают по тому, что именно задано.

Основные специальные случаи

Угол(ы)	Малый катет	Большой катет	Гипотенуза
30°–60°–90°	x	$x\sqrt{3}$	2x
45°–45°–90°	x	x	$x\sqrt{2}$

Сравните два часто встречающихся треугольника: в каждом сразу известны соотношения между катетами и гипотенузой.

Специальные значения позволяют записать стороны сразу: меньше тратить времени на вычисления и меньше допускать ошибок при подстановке.

Школьные правила геометрии, свойства специальных прямоугольных треугольников.

Типичные ошибки при решении задач

17



Часто путают катет и гипотенузу: гипотенуза всегда лежит напротив прямого угла и является самой длинной стороной. Если перепутать, итоговые значения выйдут заведомо неверными.

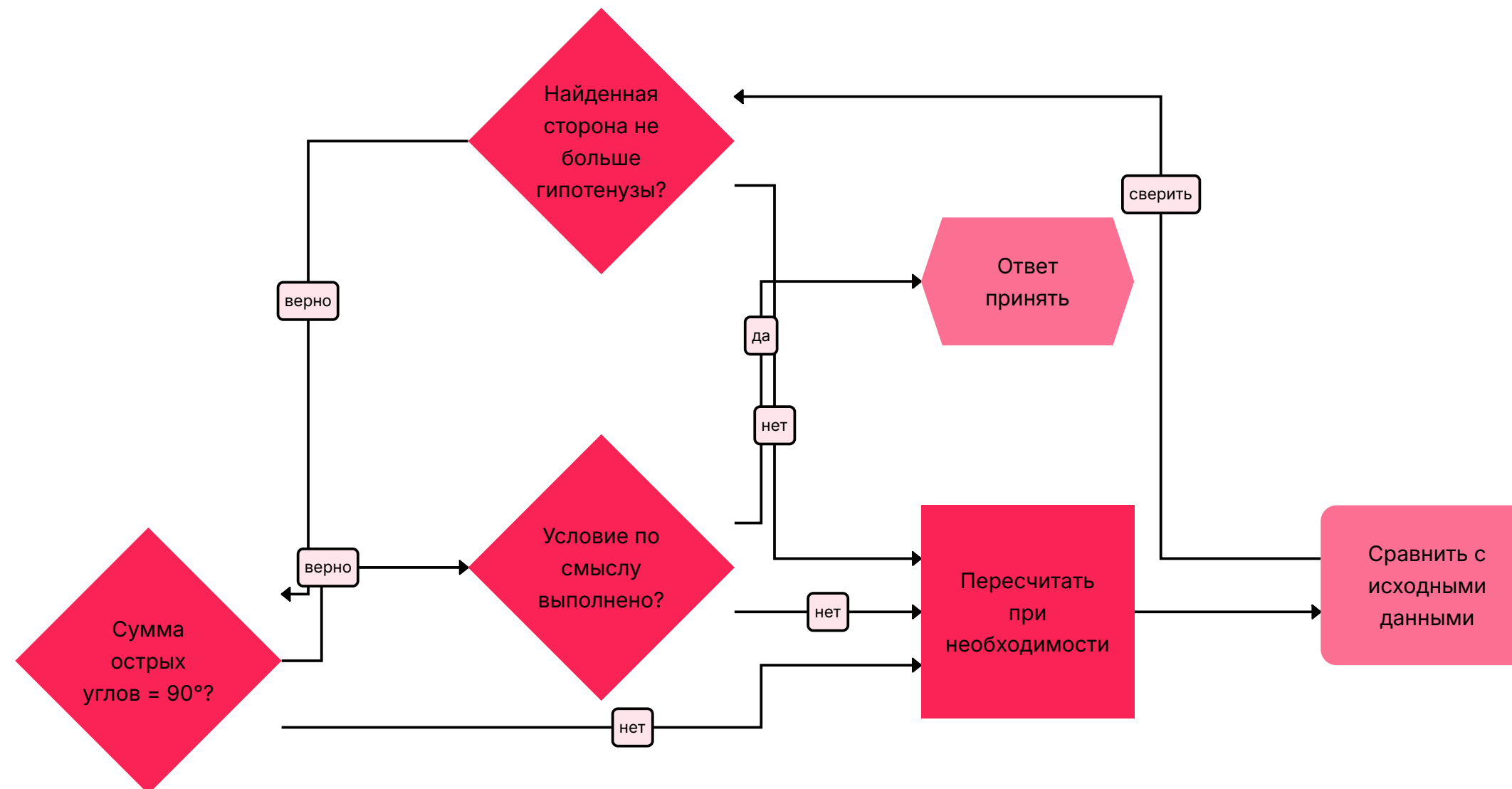


Ещё одна ошибка — неправильно выбирать синус, косинус или тангенс: нужно определить, какие стороны стоят напротив и рядом с данным углом. Также встречается смешение градусов и длин сторон.

Проверка ответа в задаче

18

Пошаговая самопроверка после вычислений в прямоугольном треугольнике.



Как меняются отношения сторон при разных углах

19

При переходе от 30° к 60° отношения между сторонами смещаются: доля «напротив угла» растёт, а доля «прилежащей» уменьшается. При 45° соотношения симметричны.

Диаграмма показывает устойчивые пропорции внутри прямоугольного треугольника и помогает сравнивать разные углы без построения нового рисунка целиком.

Учебные соотношения: $\sin$ и $\cos$ для 30° , 45° , 60° ; отношения выводятся как (противолежащий/гипотенуза), (прилежащий/гипотенуза) и (противолежащий/прилежащий).



Главные выводы по теме

В прямоугольном треугольнике стороны и углы связаны через теорему Пифагора и тригонометрию. Для 7 класса важны гипотенуза, катеты, специальные случаи $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ и $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ и выбор формулы по данным задачи.

