

Степенная функция



Одна формула открывает целую
семью разных графиков.

Степенная функция задаётся формулой $y=x^a$. Её вид, область определения и поведение меняются вместе с показателем a , поэтому важно уметь быстро распознавать свойства по записи и графику.

**Что изучает
степенная функция**



Интуитивный смысл $y=x^a$

- **Единичный показатель**

При $a=1$ получаем линию $y=x$: значение функции совпадает с аргументом. Это самый простой ориентир, от которого удобно сравнивать все остальные степени.

- **Квадрат**

При $a=2$ график принимает знакомую параболическую форму. Значения неотрицательны, а кривая симметрична относительно оси Oy , потому что x и $-x$ дают одинаковый результат.

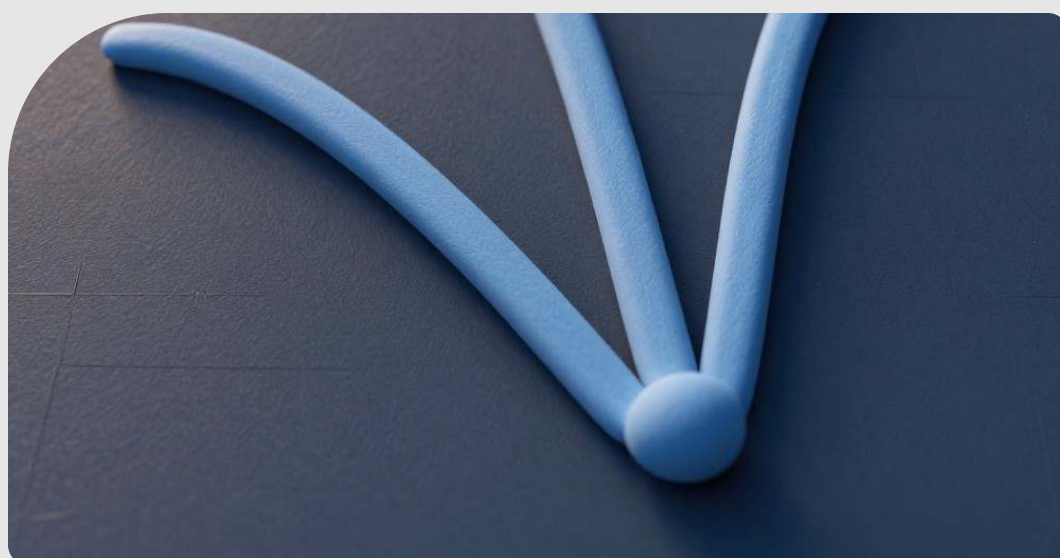
- **Корень**

При $a=1/2$ появляется корневая зависимость. Функция определена только там, где можно извлечь квадратный корень в вещественных числах, то есть при $x \geq 0$.

- **Обратная пропорция**

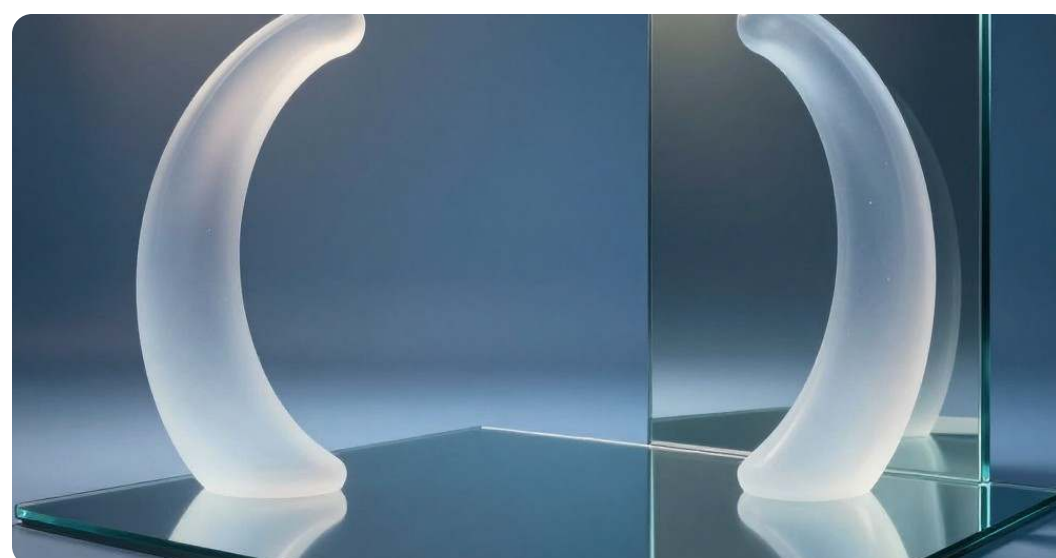
При $a < 0$ возникает обратная зависимость: чем больше модуль x , тем меньше y . Вблизи нуля значения резко возрастают, а сама функция не определена в точке $x=0$.

Несколько графиков одной семьи



Один закон – разные формы

Одна и та же запись $y=x^a$ может вести себя совершенно по-разному. Для $a=3, 2$ и 1 графики остаются в зоне роста, но меняют крутизну, симметрию и характер изгиба. По виду кривой уже можно предположить, каким будет показатель.



Симметрия и знак

Чётная степень создаёт симметрию относительно оси Oy , а нечётная – относительно начала координат. Поэтому рядом удобно сравнивать, как меняются ветви, знаки значений и поведение по обе стороны от нуля.



От корня к гиперболе

Корневая форма при $a=1/2$ выглядит мягче и «пологее» степеней 2 и 3 . А при $a=-1$ график распадается на две ветви с асимптотами, показывая уже не рост, а убывание и разрыв в нуле.

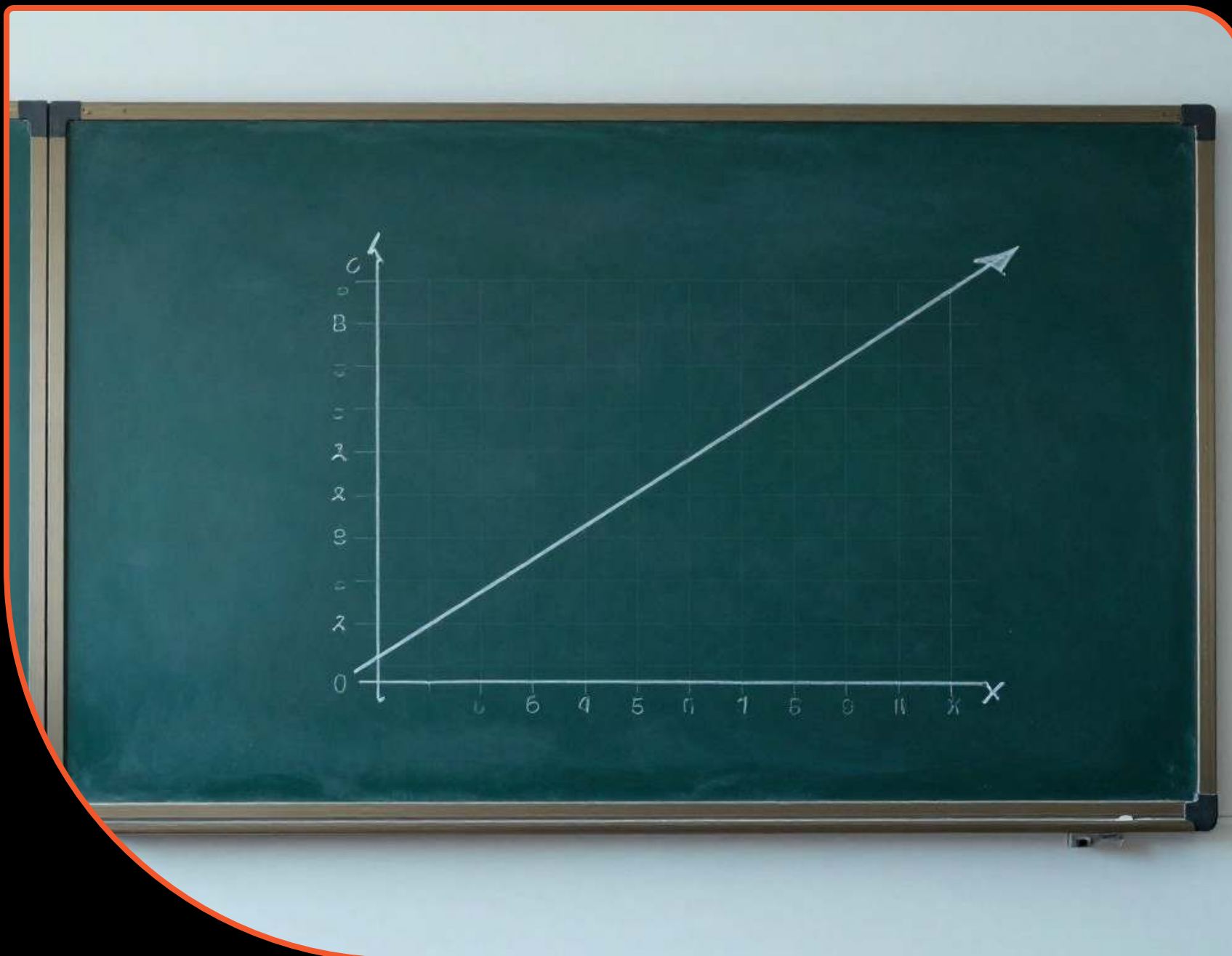
Как меняется функция при изменении a

Сравнение показателей показывает не просто разную крутизну, а переход между принципиально разными типами графиков.

При переходе от положительных показателей к отрицательным меняются область определения, монотонность и наличие асимптоты.

Обобщение свойств степенной функции $y=x^a$ для $a=3, 2, 1, \frac{1}{2}, -1$.

Особый случай: $a=1$

**01**

Базовый случай

При $a=1$ степенная функция совпадает с базовой прямой $y=x$. Это удобная точка отсчёта: график проходит через начало координат и показывает прямую зависимость без искажений.

02

Полная область

Область определения здесь максимальна: допустимы все действительные значения x . Никаких корней, дробных ограничений или запретов на ноль не возникает, поэтому правило особенно прозрачно.

03

Совпадение знаков

График строго возрастает и сохраняет знак аргумента. Если x положительно, то и y положительно; если x отрицательно, то значение функции тоже отрицательно.

04

Эталон сравнения

У этой функции нет асимптот и особых точек. Именно поэтому она служит эталоном для сравнения: все остальные степени отклоняются от неё в сторону ускорения, замедления или разрыва.

Целые показатели больше 1

Для целых показателей больше 1 удобно сравнивать не только значения, но и симметрию относительно координатных осей.

Нечётная степень сохраняет знак x , а чётная делает значения неотрицательными и усиливает симметрию.

Вычисления по формуле $y=x^a$ для $a=3$ и $a=4$.

Таблица свойств степенной функции

Показатель	$D(f)$	Свойство
целый чётный	все x	чётная
целый нечётный	все x	нечётная
$a > 0$	зависит от a	0 входит
$a < 0$	$x \neq 0$	асимптота $y = 0$

Сводная таблица помогает быстро определить ключевые свойства по виду показателя.

Главный вывод: сначала смотрят на тип показателя, затем уточняют область определения и симметрию.

Свойства функции $y = x^a$ в вещественной области.

Случай $0 < a < 1$



Медленный рост

При $0 < a < 1$ функция всё ещё возрастает, но делает это медленнее прямой $y = x$. Поэтому большие значения x дают сравнительно небольшой прирост y , особенно заметный на дальних участках графика.

01

Сплющивание вправо

На малых x кривая поднимается быстрее, чем дальше от нуля. Из-за этого график выглядит вытянутым вверх у начала координат и всё более пологим по мере движения вправо.

02

Зависимость от области

Если показатель дробный с нечётным знаменателем, отрицательные x могут допускаться, но форма графика зависит уже и от чётности числителя. В школьных задачах чаще рассматривают неотрицательную область.

03

Сравнение корневых степеней

Чем меньше показатель, тем сильнее график «расплющивается» вдали от нуля.

При одинаковом x значения растут медленнее с уменьшением показателя; это и есть эффект замедленного роста.

Математический расчёт по формуле $y=x^a$ для $x=8$, $a=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

Чётные и нечётные степени

Показатель	Симметрия	Область
нечётный целый	отн. начала	все x
чётный целый	отн. Oy	все x
дробный	обычно нет	зависит от n

Сравнение целых и дробных показателей показывает, как степень влияет на симметрию, знак значений и область определения.

Чётность показателя сохраняет симметрию, а дробные показатели чаще сужают область определения.

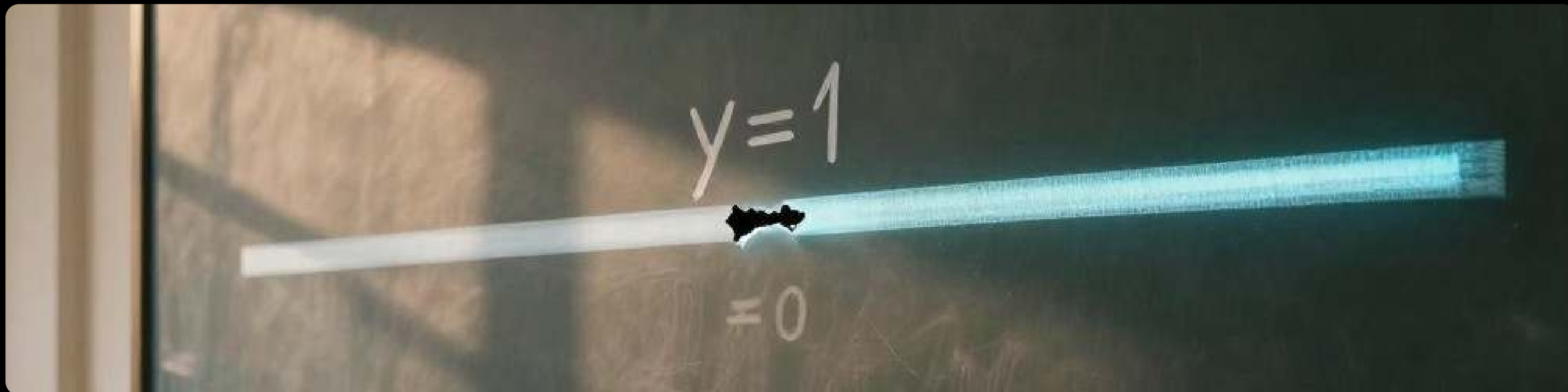
Свойства функции $y=x^a$ из школьного курса алгебры

Негативный показатель переводит степень в обратную зависимость: у функции появляются две ветви и ноль выпадает из области определения.

2

ветви графика возникают в типичном случае при отрицательной степени.

Случай $a=0$



Формальная запись

При $a=0$ запись x^0 формально равна 1 для любого ненулевого x . Поэтому график выглядит как горизонтальная прямая $y=1$, но только там, где выражение определено.

Исключение в нуле

Точка $x=0$ требует отдельного рассмотрения: степень ноль не задаёт здесь обычное значение. Именно поэтому важно отличать алгебраическую формулу от функции как объекта с областью определения.

Проверка на внимательность

Этот случай полезен для проверки аккуратности в решении задач: нельзя автоматически подставлять все x , если сама запись степени ограничивает допустимые значения.

Дробные показатели и корни

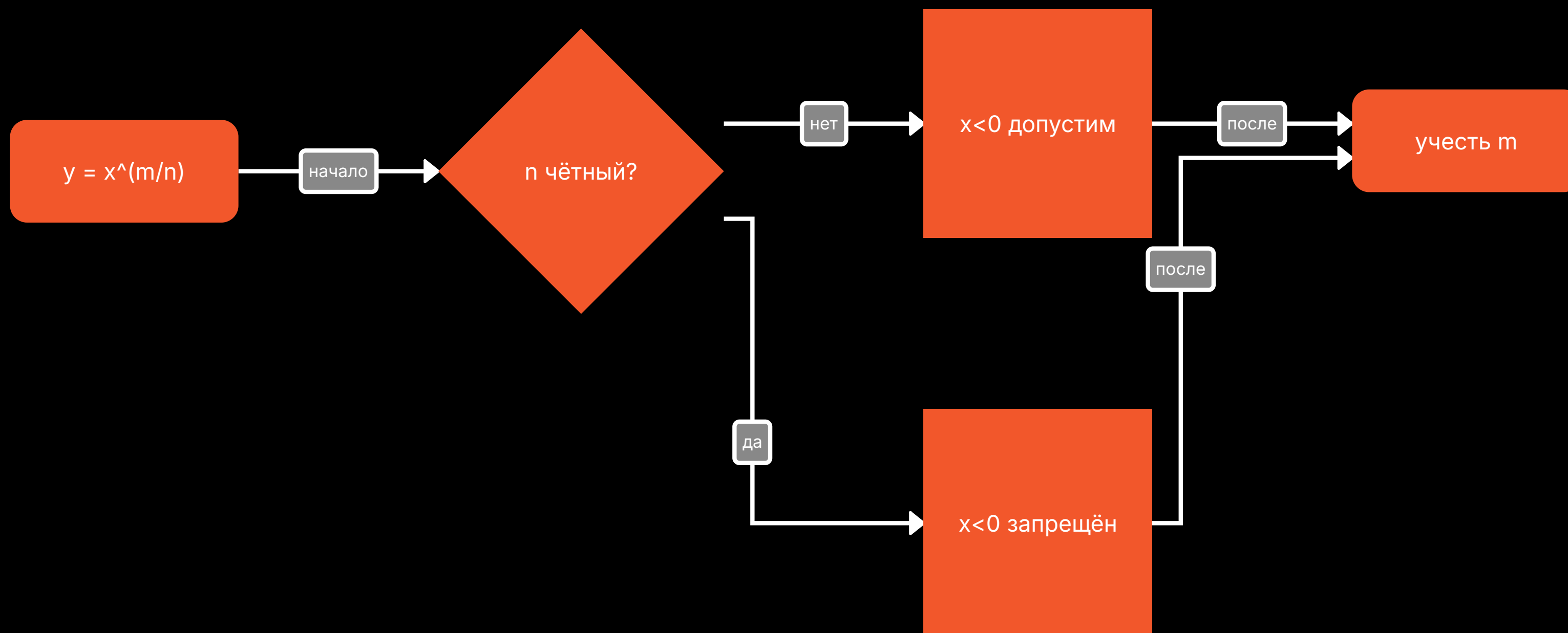
Показатель	Вещественные x
$x^{1/2}$	$x \geq 0$
$x^{1/3}$	все x
$x^{(m/n)}$, n чётн.	$x \geq 0$

Разные дробные показатели дают разную область определения, и ключевую роль играет знаменатель дроби.

Если корень чётной степени, отрицательные значения основания запрещены; при нечётном знаменателе ограничения слабее.

Как читать дробный показатель

Последовательность анализа зависит от знаменателя дроби, а затем — от числителя и знака показателя.





Сдвиги графика степенной функции

- **Горизонтальный сдвиг**

Сдвиг по горизонтали задаёт параметр h : график $y=x^a$ переносится вправо при $h>0$ и влево при $h<0$. При этом меняется точка, относительно которой строится вся кривая.

- **Вертикальный сдвиг**

Параметр k отвечает за вертикальный перенос. Он поднимает или опускает график, но не отменяет исходные ограничения области определения, если они уже были у степени.

- **Что остаётся неизменным**

Для $a<0$ вертикальное смещение не убирает асимптоту $x=h$, а при чётном знаменателе дробной степени сохраняется условие $x-h\geq 0$. Поэтому сдвиг не отменяет базовую структуру функции.

Множитель перед функцией

**01**

Усиление графика

Сначала смотрят на модуль коэффициента. Если $|c| > 1$, все значения по модулю увеличиваются, и график становится визуально круче и уже.

02

Ослабление графика

Если $0 < |c| < 1$, точки приближаются к оси Ox , а кривая выглядит более полой. Форма сохраняется, но масштаб по вертикали уменьшается.

03

Отражение вниз

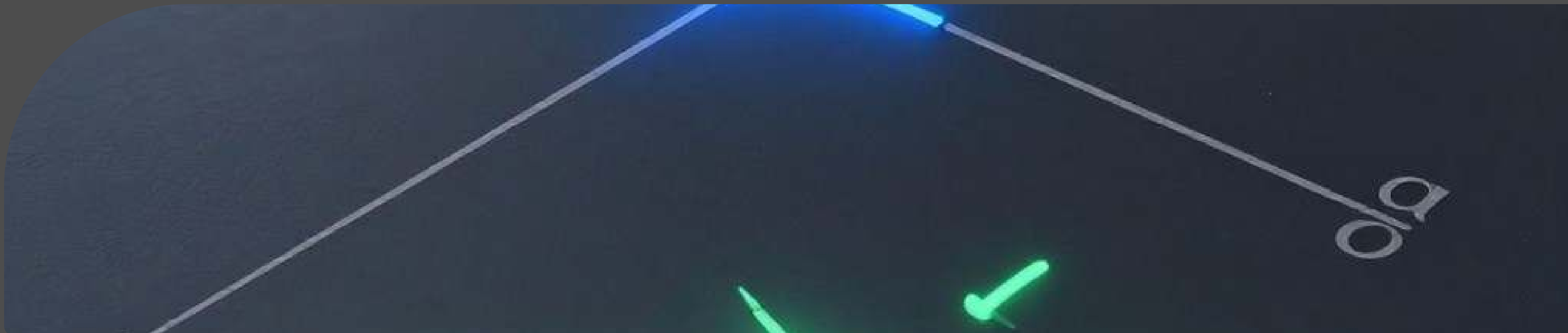
Отрицательный коэффициент меняет знак значений: график отражается относительно оси Ox . Это особенно заметно у функций с чётной или нечётной степенью.

04

Нулевой множитель

При $c=0$ получается $y=0$ на всей области определения. Такая запись удобна как предельный случай, но уже не описывает типичную степенную функцию.

Отражение графика



Общее правило

Знак «минус» перед степенью отражает график относительно оси Ox . Каждая точка $y=x^a$ переходит в точку с противоположным значением ординаты.

01

Чётная степень

Если a чётное, исходный график был симметричен относительно Oy , и после отражения эта симметрия сохраняется, но кривая располагается ниже оси Ox .

02

Нечётная степень

Если a нечётное, меняется знак всех значений, поэтому график проходит через начало координат и сохраняет характер нечётной функции, только в зеркальном виде.

03

Задача на область определения

Функция	Ограничение	D(f)
$(x-2)^{1/2}$	$x-2 \geq 0$	$x \geq 2$
$(x+1)^{-2}$	$x+1 \neq 0$	$x \neq -1$

Сравнение двух функций показывает, как по формуле быстро определить допустимые x и не потерять ограничения, связанные с корнем и отрицательной степенью.

Корень задаёт неравенство, а отрицательная степень исключает ноль в основании.

Анализ области определения по правилам для корней и отрицательных степеней

Степенная функция без лишних тайн

Степенная функция объединяет самые разные графики в единую схему. Если последовательно проверить область определения, тип показателя и симметрию, любую задачу на функции становится легче читать и решать.