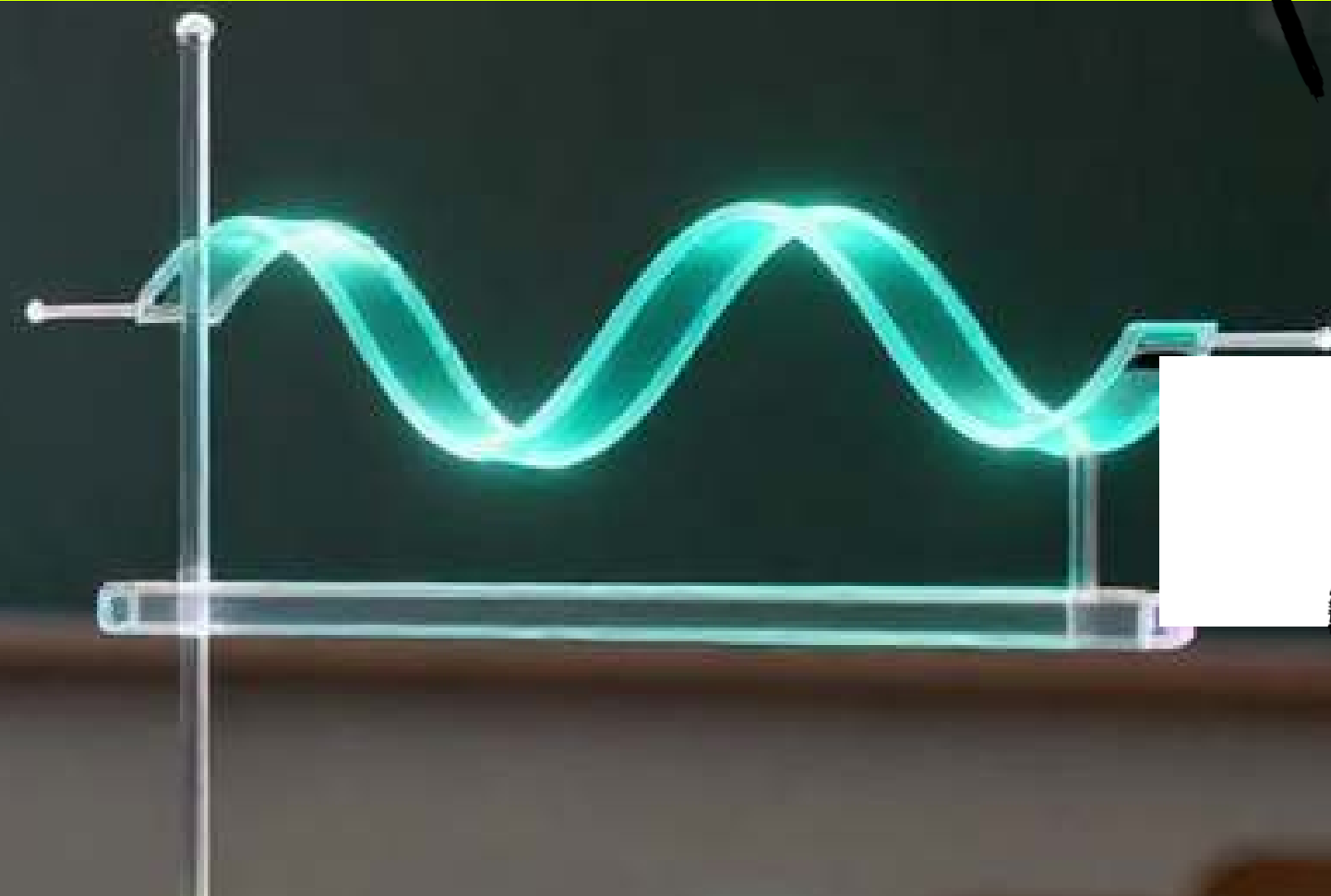
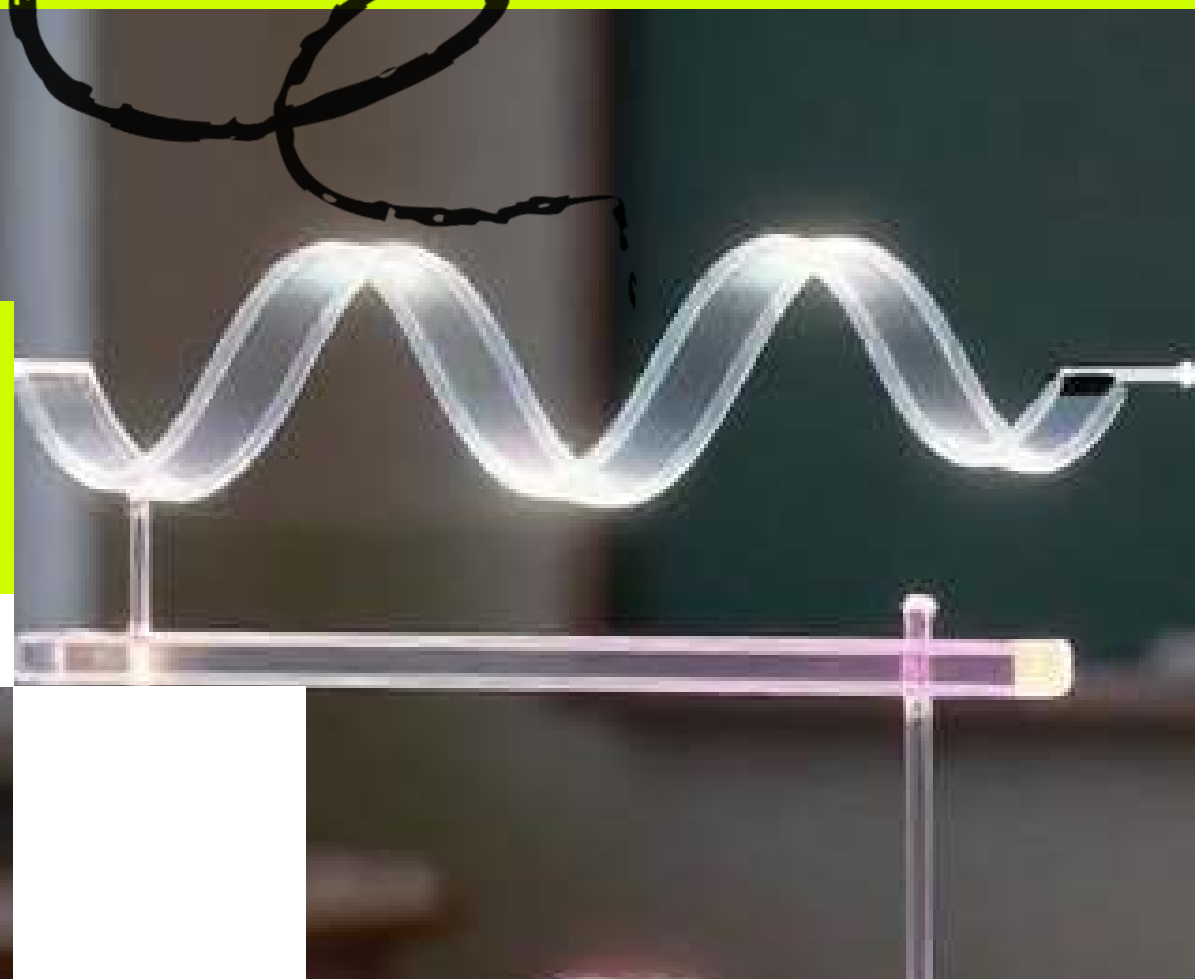


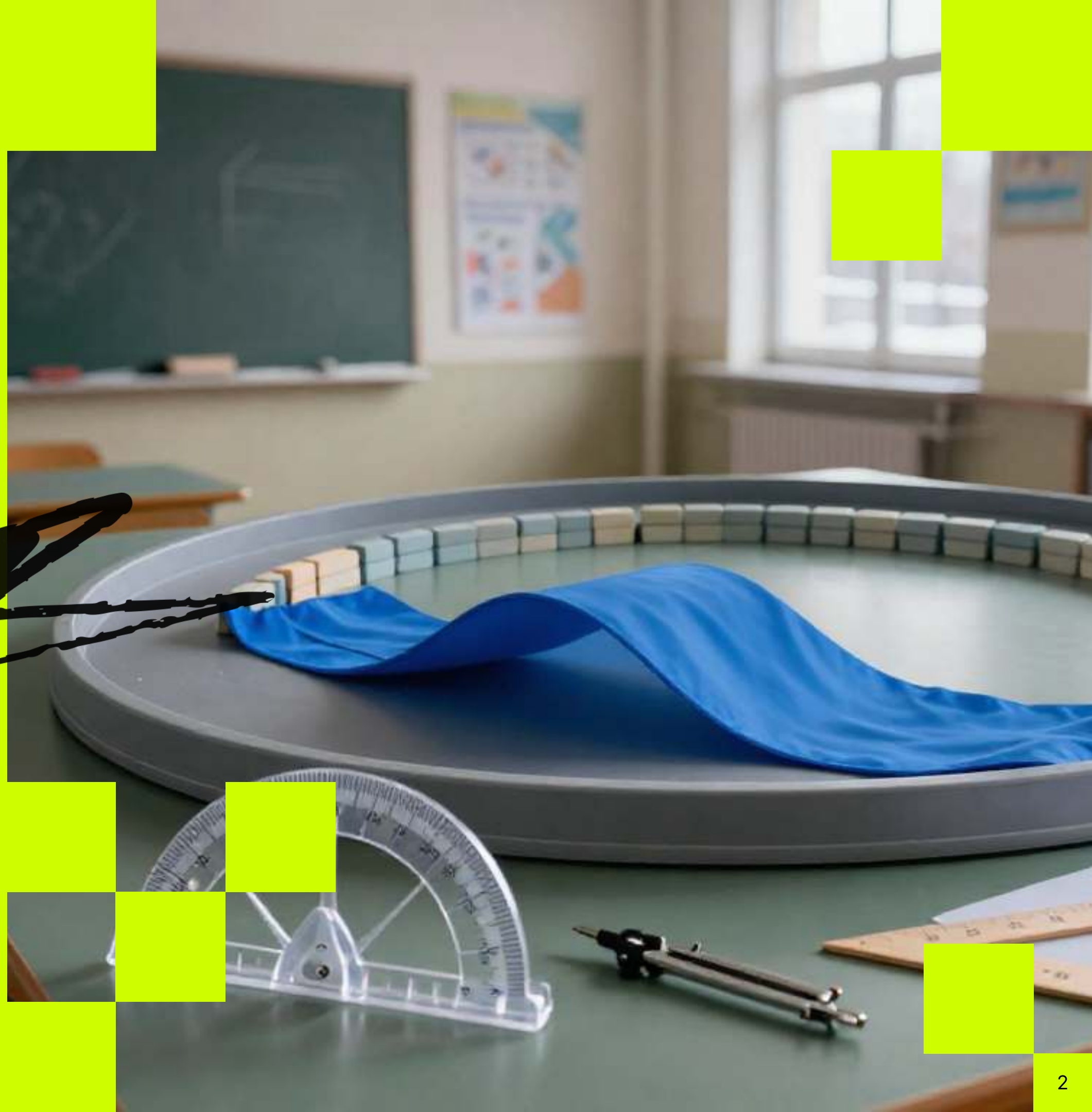
Область определения и множество значений тригонометрических функций

Синус, косинус, тангенс и котангенс: где они определены и какие значения принимают



Зачем разбираться в области определения и значениях

Эти свойства помогают понимать смысл функции, читать графики и избегать ошибок в тригонометрических уравнениях. Особенно важно не перепутать запретные аргументы с допустимыми значениями результата.



Аргумент тригонометрической функции и единицы измерения угла

1. Аргумент функции

Аргументом тригонометрической функции обычно является угол x . Именно его значение подставляют в формулу, поэтому важно заранее понимать, в какой единице задан угол и как его интерпретировать.

2. Градусы и радианы

В школьных задачах угол могут задавать в градусах или радианах, но в алгебре 11 класса чаще используют радианы. Такая запись удобнее для формул и преобразований.

3. Эквивалентные записи

Примеры соответствий помогают быстро переводить запись: $30^\circ = \pi/6$, $45^\circ = \pi/4$, $60^\circ = \pi/3$. Это упрощает работу с тригонометрическими формулами и таблицами значений.

4. Почему радианы удобны

Радиянная мера естественно связана с единичной окружностью и периодичностью функций. Благодаря этому формулы записываются компактно, а значения углов читаются точнее и без лишних преобразований.

Единичная окружность как модель для $\sin x$ и $\cos x$

Координаты точки

Для угла x на единичной окружности соответствующая точка имеет координаты $(\cos x, \sin x)$. Эта модель сразу связывает значения функций с геометрическим образом.

Синус и ордината

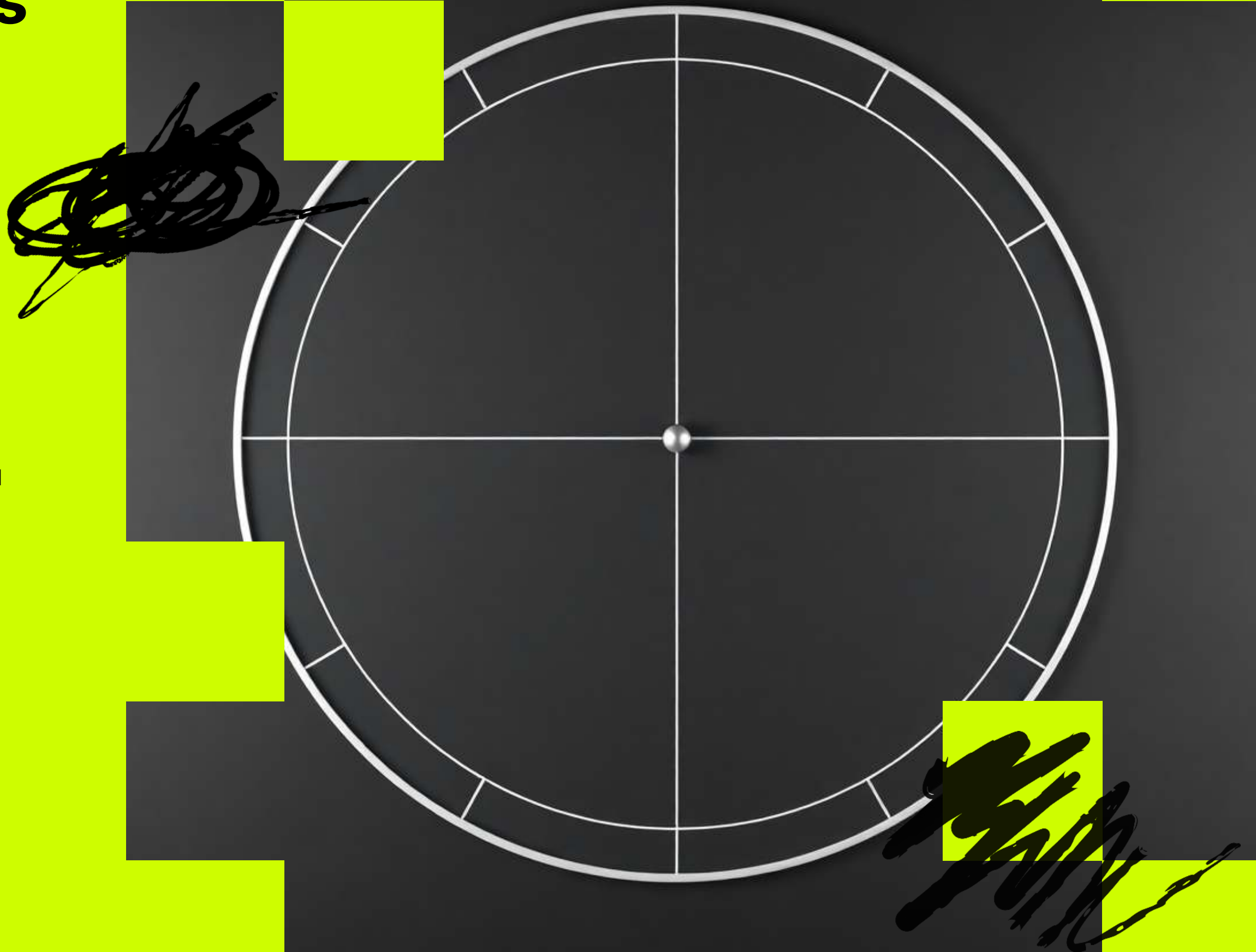
Синус равен ординате точки, то есть её координате по оси OY . Поэтому знак и величина $\sin x$ определяются положением точки относительно горизонтальной оси.

Косинус и абсцисса

Косинус соответствует абсциссе точки, то есть координате по оси OX . Из-за радиуса, равного 1, его значения не могут выходить за пределы отрезка $[-1; 1]$.

Связь с четвертями

Расположение точки в разных четвертях показывает, где функции положительны или отрицательны. На рисунке это удобно видеть сразу, без вычислений, по положению точки на окружности.



Область определения основных тригонометрических функций

Таблица показывает, где каждая функция имеет смысл и какие значения аргумента нужно исключить.

Синус и косинус определены при любых действительных x , а тангенс и котангенс исключают точки, где возникает деление на ноль.

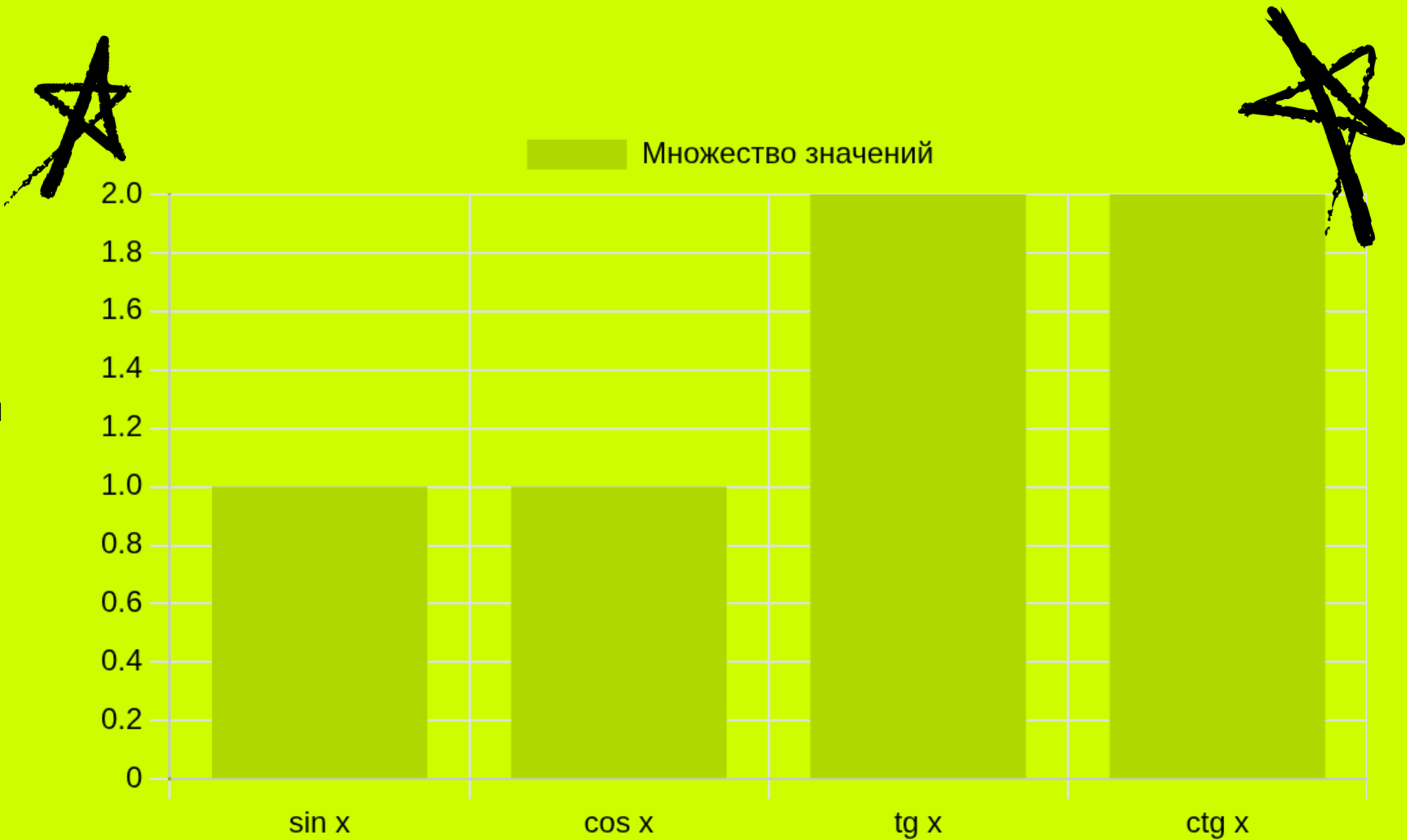
Функция	D
$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi k\}$
$\operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi k\}$

Школьные определения тригонометрических функций через $\sin x$ и $\cos x$

Сравнение множеств значений тригонометрических функций

На диаграмме ограниченные и неограниченные функции выделены разной высотой столбцов, чтобы контраст был виден сразу.

Синус и косинус ограничены, а тангенс и котангенс не имеют верхней и нижней границы, что отражает различие их поведения.



Обобщение свойств тригонометрических функций из школьного курса алгебры

$[-1; 1]$

— это полный диапазон значений функции $y = \sin x$.

Свойства синуса на единичной окружности



Синус не выходит за пределы этого отрезка, потому что он задаётся ординатой точки на единичной окружности.



$[-1; 1]$
— это полный диапазон
значений функции $y = \cos x$.

Свойства косинуса на единичной окружности



Косинус соответствует абсциссе точки на единичной окружности, поэтому его значения также ограничены радиусом окружности, равным 1.



Тангенс: область определения и множество значений

Условие существования

Функция $\operatorname{tg} x$ определена только там, где $\cos x$ не равен нулю. Поэтому точки $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, исключаются из области определения.

Причина запрета

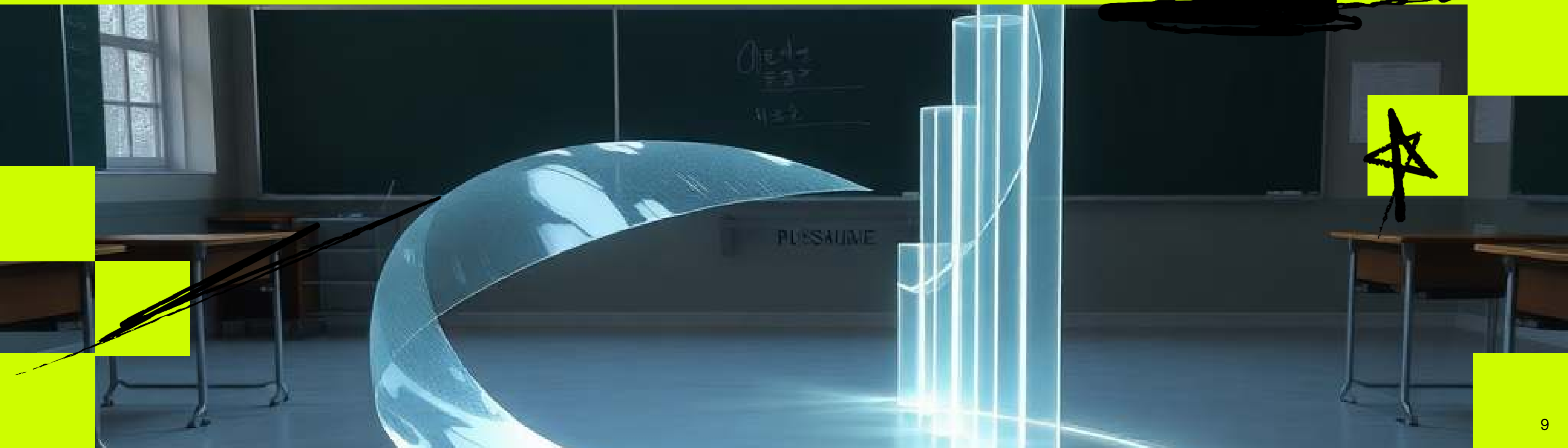
В формульной записи $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ деление на ноль невозможно. Именно поэтому в этих точках тангенс не существует, хотя сама функция остаётся периодической.

Множество значений

Тангенс принимает любые действительные значения. На каждом промежутке между асимптотами его график проходит через все уровни $y = a$, где a — любое число.

Поведение графика

График тангенса имеет вертикальные асимптоты и не ограничен сверху и снизу. Это делает его удобным примером функции с бесконечным множеством значений на всей области определения.



Котангенс: область определения и множество значений

Условие существования

Функция $\operatorname{ctg} x$ определена там, где $\sin x$ не равен нулю. Поэтому значения $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, исключаются из области определения.

Причина запрета

В записи $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$ деление на ноль недопустимо. В точках, где синус обращается в ноль, котангенс не существует.

Множество значений

Котангенс, как и тангенс, принимает любое действительное значение. У него нет верхней или нижней границы, поэтому множество значений совпадает с $\mathbb{R}$.

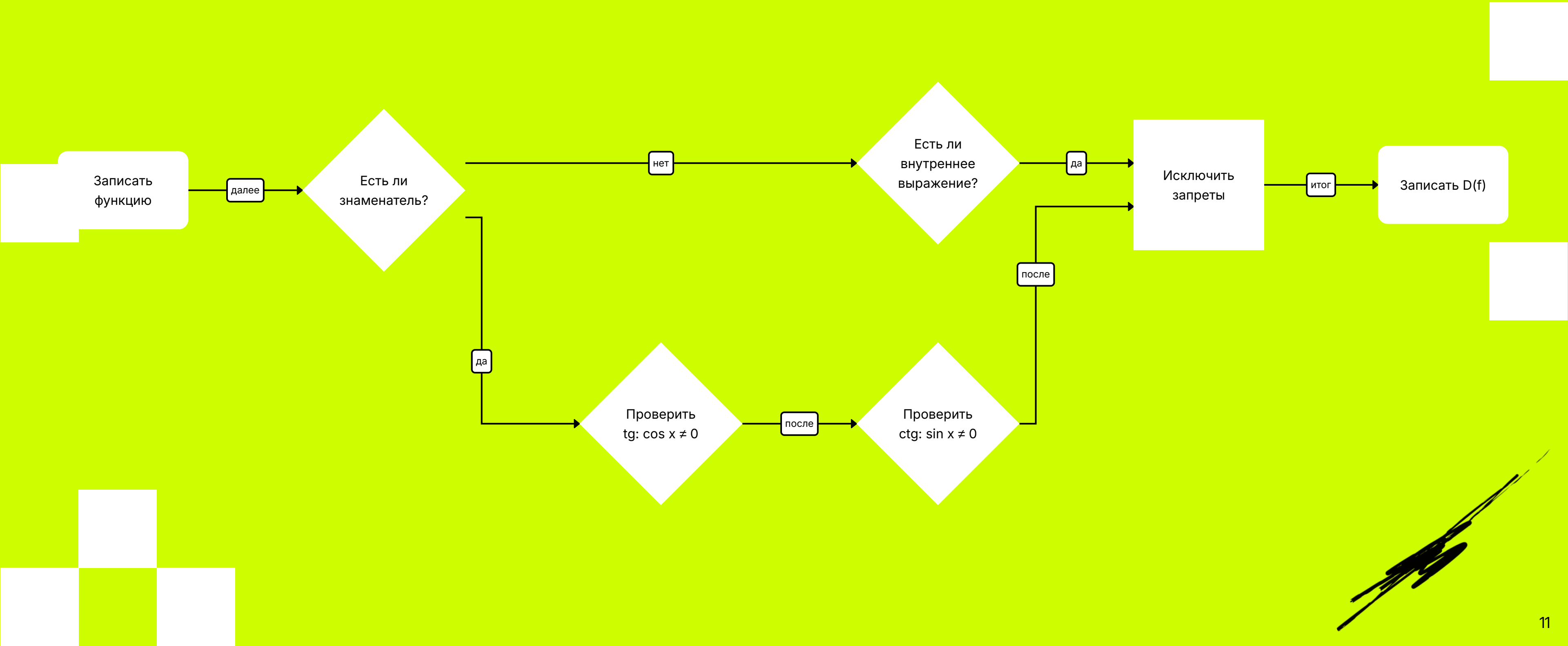
График и период

График котангенса содержит вертикальные асимптоты и повторяется с периодом π . Это удобно видеть при анализе его поведения на соседних промежутках.



Проверка области определения шаг за шагом

Алгоритм применяют к тригонометрическим функциям и их преобразованиям, учитывая запрещённые значения, знаменатели и внутренние выражения аргумента.



Как проявляется периодичность

Период 2π

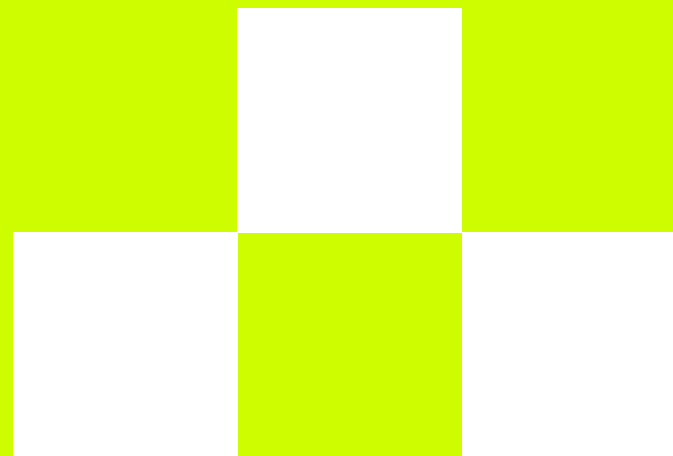
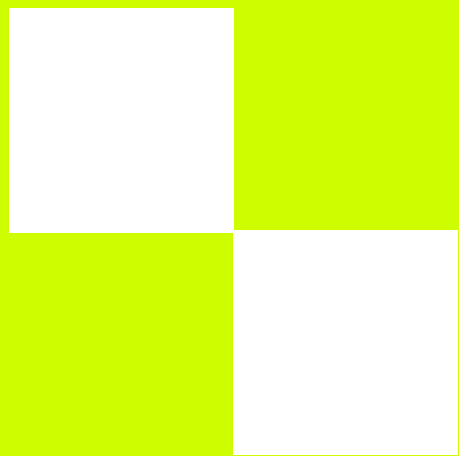
У синуса и косинуса значения повторяются после прибавления 2π к аргументу. Это видно на графиках и помогает быстро находить бесконечное число равных значений.

Общее решение

При решении уравнений периодичность позволяет записывать не один корень, а целое семейство решений. Именно поэтому в ответе появляется параметр $k \in \mathbb{Z}$.

Период π

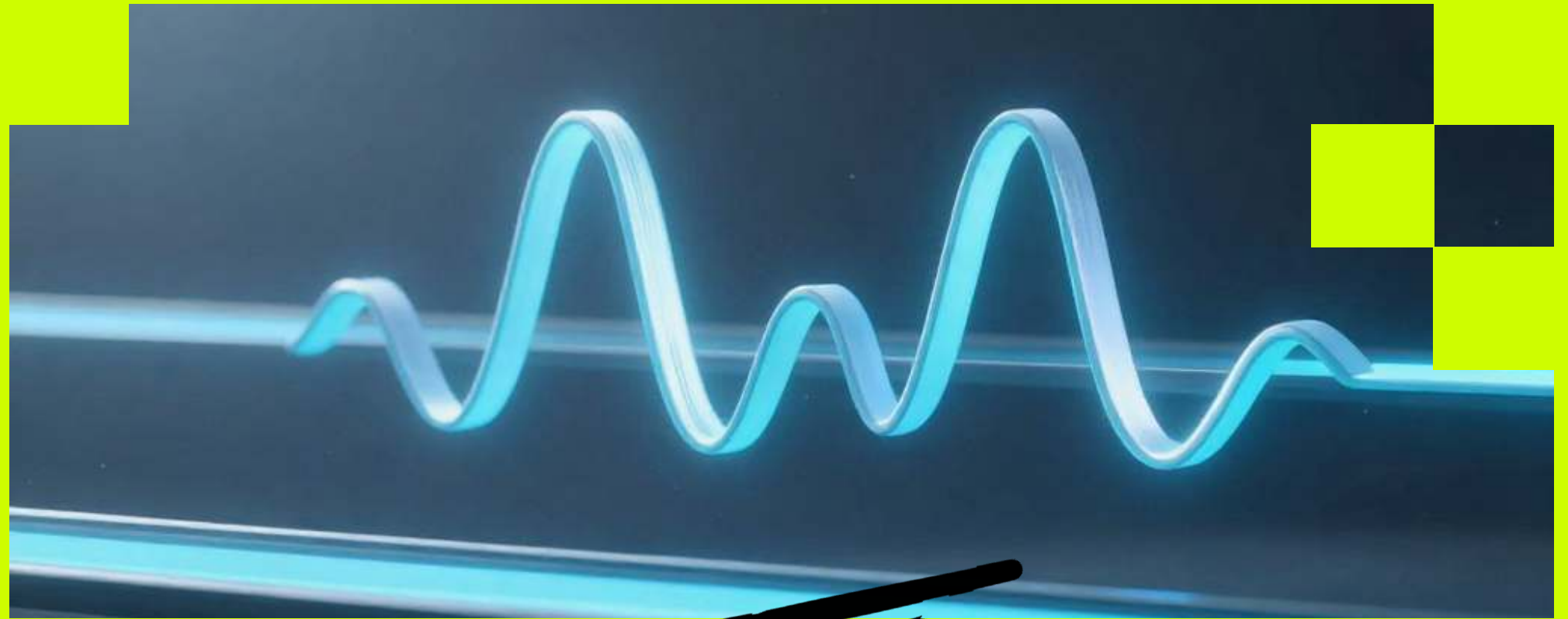
Тангенс и котангенс повторяют свои значения уже через π . Из-за этого их графики состоят из одинаковых ветвей, разделённых вертикальными асимптотами.



Как график показывает границы значений

Синус и косинус в пределах полосы

Графики $y = \sin x$ и $y = \cos x$ остаются между двумя горизонтальными линиями $y = -1$ и $y = 1$. Даже при любом значении аргумента кривая не выходит за эти границы, что сразу подчёркивает ограниченность значений.



Тангенс и котангенс без верхней границы

Графики $y = \tan x$ и $y = \cot x$ не удерживаются внутри конечной полосы: их ветви поднимаются и опускаются сколь угодно высоко и низко. Вертикальные асимптоты разделяют график, но не ограничивают множество значений.



Сводная таблица свойств тригонометрических функций

Функция	D(f)	E(f)	Период
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	2π
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	2π
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi k\}$	$\mathbb{R}$	π
$\operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi k\}$	$\mathbb{R}$	π

Свойства функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ в школьном курсе алгебры

Сравнение помогает быстро увидеть различия между областью определения, множеством значений и периодом основных тригонометрических функций.

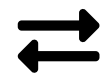
У синуса и косинуса ограничены значения, а у тангенса и котангенса — область определения. Периодичность подтверждает повторяемость поведения функций.

Типичные ошибки при работе с тригонометрическими функциями



Игнорирование запретных точек

Тангенс и котангенс не определены во всех точках. Если забыть исключить значения, где $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$, ответ будет неверным.



Путаница между D и E

Исключённые аргументы не равны множеству значений функции. Область определения отвечает на вопрос, где функция существует, а множество значений — какие числа она может принимать.



Неверные границы синуса и косинуса

Значения $\sin x$ и $\cos x$ не выходят за пределы отрезка $[-1; 1]$. Проверка по единичной окружности сразу показывает, почему большие числа здесь невозможны.



Проверка по графику

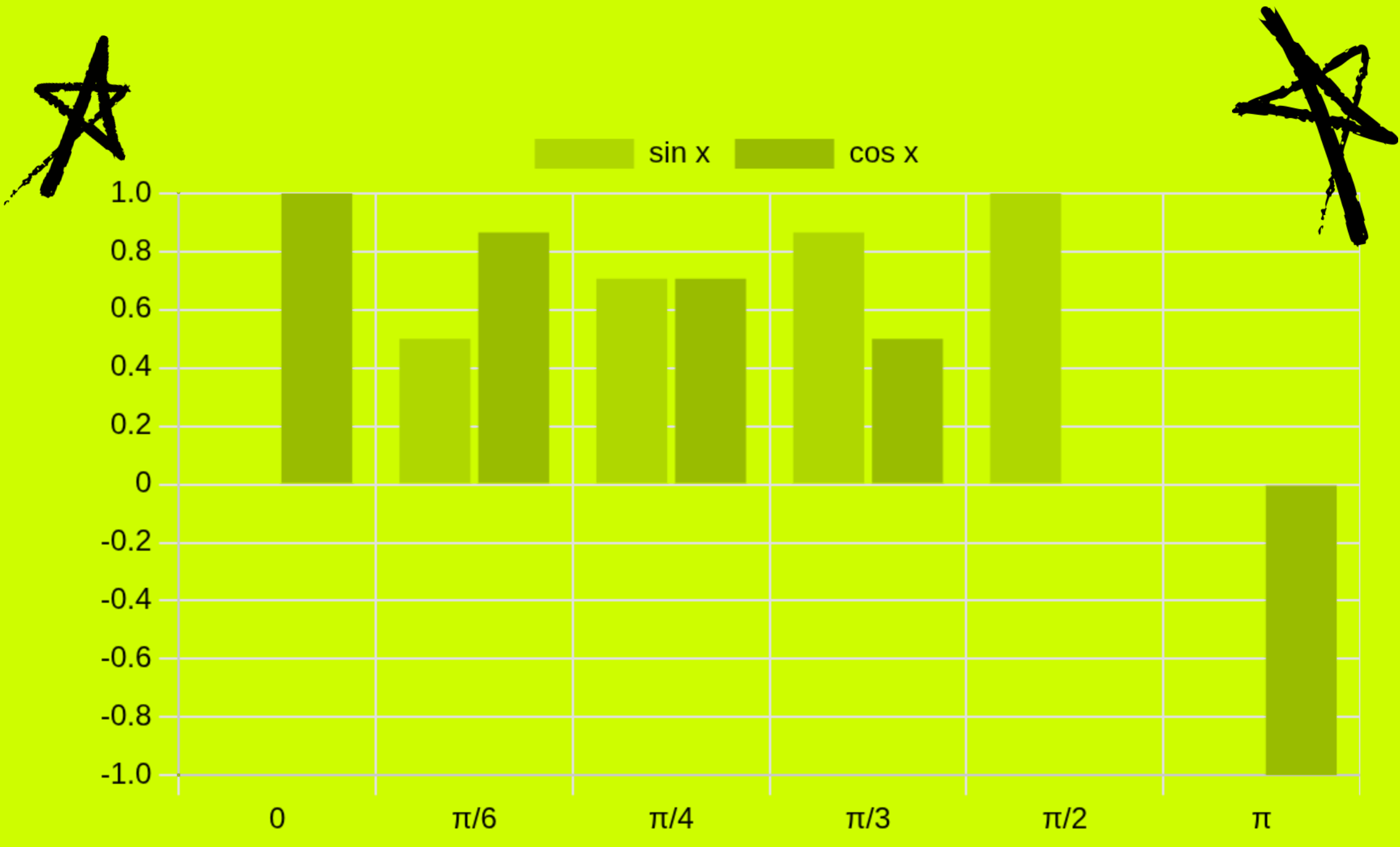
График помогает быстро заметить асимптоты, разрывы и ограниченность. Этот способ особенно полезен, когда нужно не только вычислить, но и понять поведение функции.



Значения функций в ключевых углах

Таблица опирается на стандартные углы единичной окружности; для тангенса и котангенса в точках разрыва значения не указаны.

На ключевых углах синус и косинус принимают табличные значения, а для тангенса и котангенса заметны точки, где функция не существует.



Стандартные значения тригонометрических функций для углов 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, π

Проверка существования решений тригонометрических уравнений

1.

Сначала оценивают число a

Для уравнений $\sin x = a$ и $\cos x = a$ сначала проверяют, лежит ли a в отрезке $[-1; 1]$. Если нет, действительных решений не бывает.

2.

Тангенс и котангенс не ограничивают a

В уравнениях $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ любое действительное число может быть правой частью. Это связано с тем, что их множество значений равно $\mathbb{R}$.

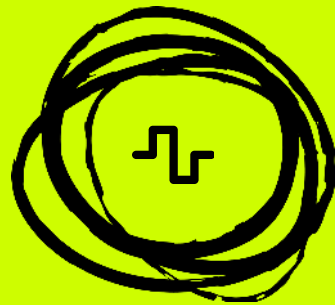
3.

Проверка до вычислений

Такой анализ экономит время и помогает избежать лишних преобразований. Сначала выясняют, возможен ли ответ вообще, а уже потом находят конкретные корни.



Связь с реальными периодическими процессами



Колебания

Синус и косинус описывают колебательные процессы, где величина меняется вокруг положения равновесия. Их ограниченность хорошо отражает конечную амплитуду реальных колебаний.



Сезонные изменения

Годовые колебания температуры и другие сезонные процессы часто изображают синусоидами. Такая модель показывает повторяемость и позволяет сравнивать максимумы и минимумы.



Вращение и поворот

При моделировании вращения угол меняется периодически, а значения функций повторяются через равные интервалы. Поэтому тригонометрия удобна для описания движения по окружности.



Наклон и направление

Тангенс и котангенс полезны там, где важен угол наклона. В таких задачах значения могут быть сколь угодно большими по модулю, поэтому ограничений сверху и снизу нет.

Алгоритм нахождения D(f) и E(f)

Последовательность основана на виде тригонометрической функции, её разрывах, свойствах единичной окружности и линейных преобразованиях графика.





Что важно запомнить

Синус и косинус ограничены отрезком $[-1; 1]$, а тангенс и котангенс имеют разрывы, но принимают любые действительные значения. Эти свойства нужно помнить при решении уравнений и анализе графиков.

