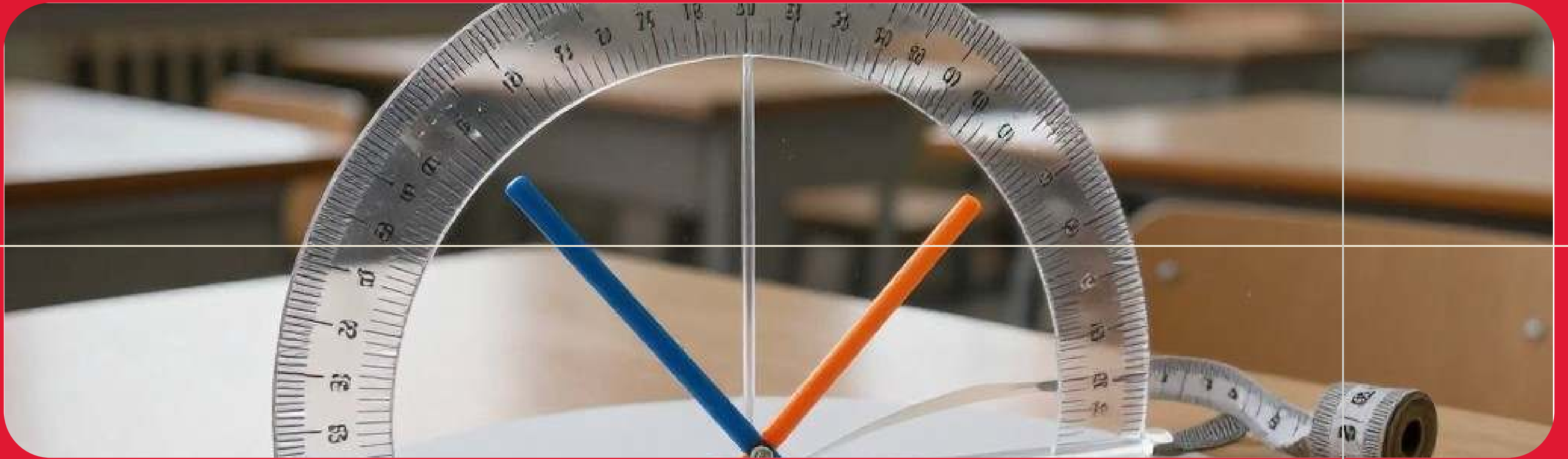




Измерение углов, связанных с окружностью

Разберём, как градусы угла вычисляются по дуге, которую он «видит».



Почему эта тема важна в 7 классе

Окружность и углы — ранний раздел геометрии, где свойства фигур сразу связывают с градусной мерой. Знания о прямом и развернутом угле, дуге и измерении понадобятся в построениях, чертежах и треугольниках.

Основные элементы окружности



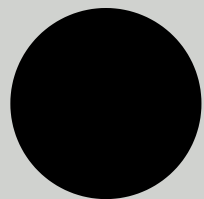
Центр окружности

Центр — точка, равноудалённая от всех точек окружности. Все расстояния от центра до точек, лежащих на окружности, одинаковы и обозначаются как радиусы.



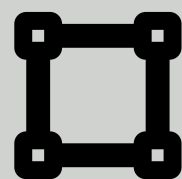
Радиус

Радиус соединяет центр с точкой на окружности. Именно он задаёт размер окружности: чем больше радиус, тем больше расстояние между противоположными точками.



Диаметр

Диаметр проходит через центр и равен двум радиусам. Его удобно использовать в задачах, потому что он превращает часть окружности в полуокружность и помогает находить углы.



Хорда и дуга

Хорда соединяет две точки окружности. Дуга — часть окружности между этими точками; именно дуга «опирает» многие углы и определяет их величину.



Касательная

Касательная касается окружности в одной точке и не пересекает её в окрестности этой точки. В задачах касательная образует углы, связанные с дугами.

Виды углов, связанных с окружностью

Каждый вид угла получает градусную меру через дуги, на которые он опирается.

Во всех случаях срабатывает единый принцип: величина угла выражается через дуги, поэтому правильный выбор дуг решает задачу.

Учебный материал по теме углов в окружности (без привязки к конкретному изданию)

Вид угла	Где вершина	Как найти	Главное свойство
Центральный	в центре	угол = дуга	опирается на дугу напрямую
Вписанный	на окружности	угол = 1/2 дуги	величина вдвое меньше дуги
между хордой и касательной	в точке касания	угол = 1/2 дуги	берётся дуга внутри угла
внутри окружности	внутри	угол = 1/2 (сумма дуг)	учитываются две дуги
вне окружности	снаружи	угол = 1/2 (разность дуг)	вычитается меньшая дуга

Центральный угол и дуга окружности

01

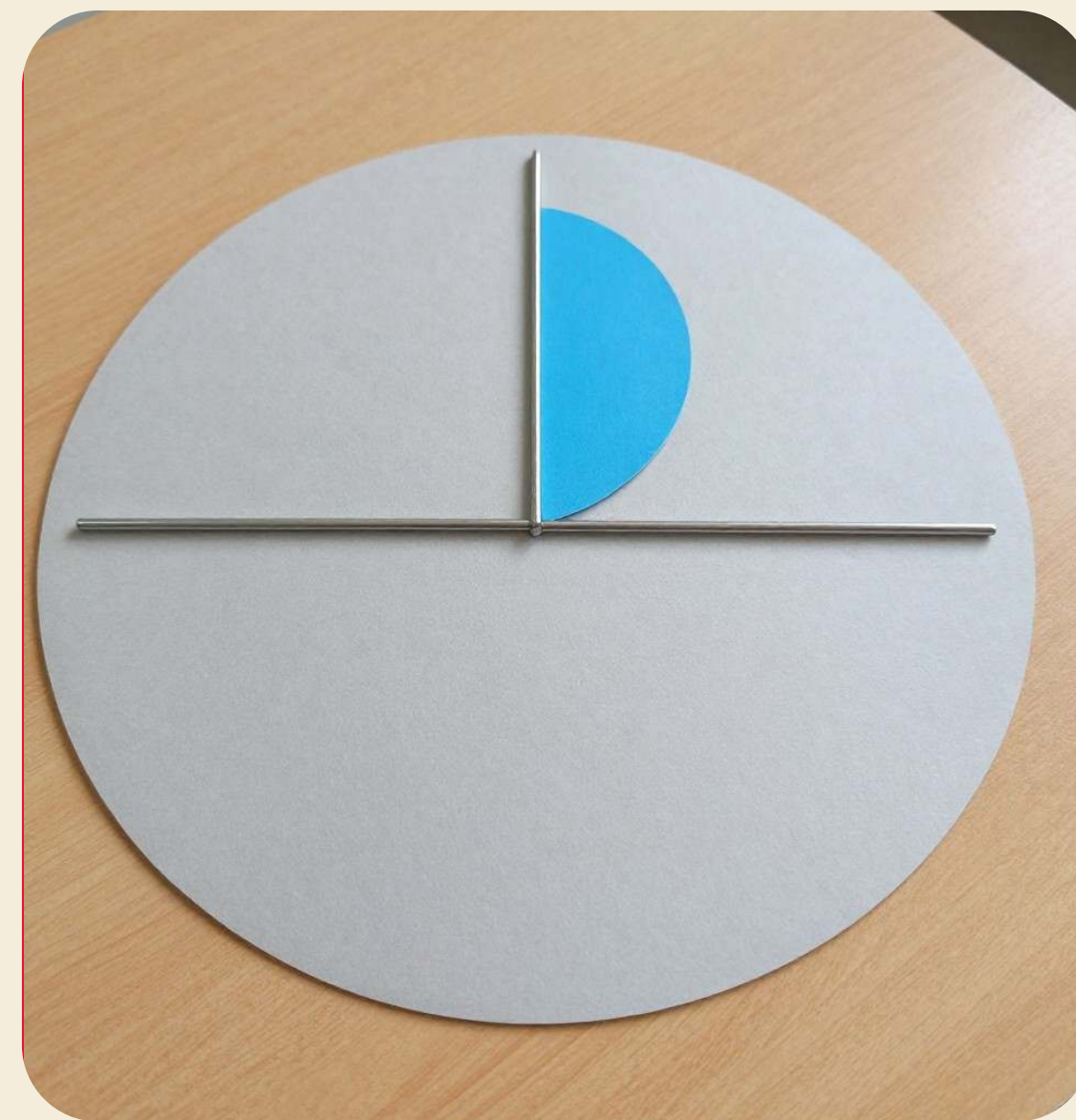
Центральный угол

Центральный угол имеет вершину в центре окружности, а его стороны — это радиусы. Он измеряется градусной мерой дуги, на которую опирается: какая дуга, такой и угол.

02

Почему удобно сравнивать с кругом

Полная окружность равна 360° , значит центральный угол удобно выражать как долю круга. Например, при дуге 80° центральный угол тоже равен 80° .



Части круга и их градусная мера

Если часть окружности в два раза меньше, её дуга тоже уменьшается вдвое. Это помогает быстро оценивать ответы в задачах.

По графику видно прямую зависимость: размер дуги пропорционален доле круга. Значит, вычисления с дробями делаются быстрее.

Сводное соотношение мер окружности: 360° для полного круга (школьная программа)



120°

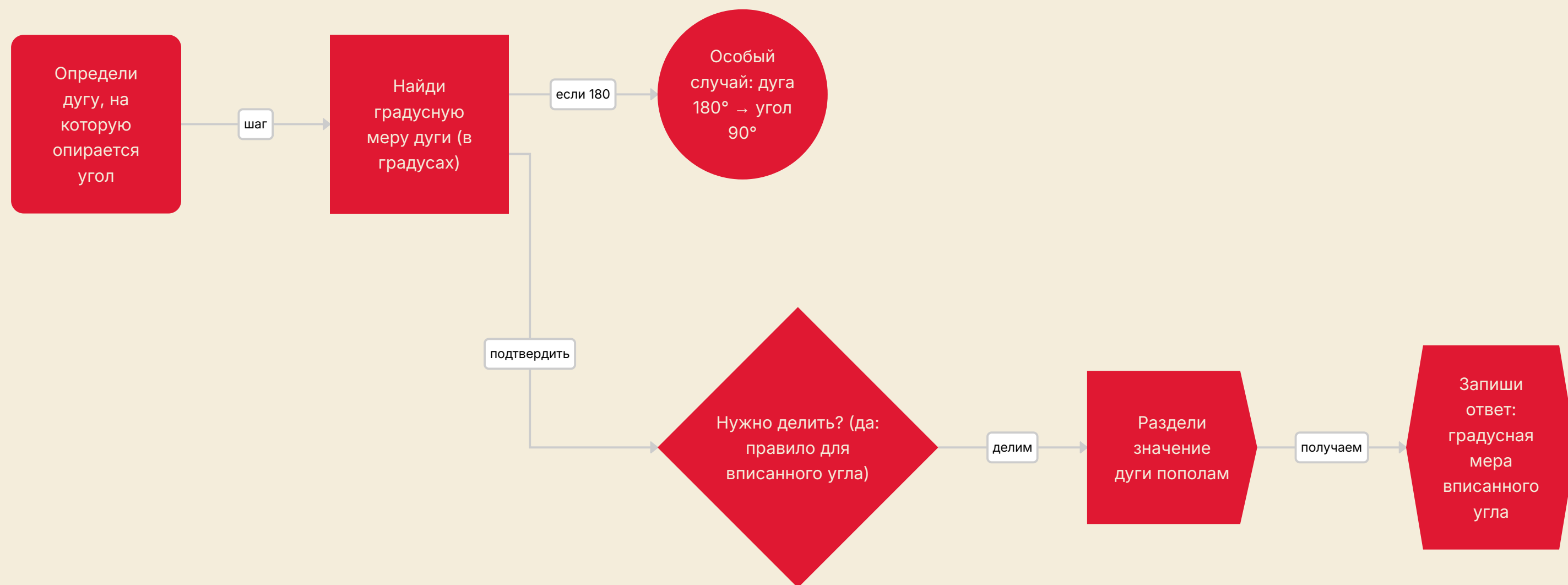
Тогда вписанный угол получается ровно в два раза меньше соответствующей дуги.

Вписанный угол имеет вершину на окружности, а его стороны пересекают окружность в двух точках. Его величина равна половине дуги, на которую он опирается.

Общеизвестное свойство вписанного угла в школьной геометрии

Как найти вписанный угол по дуге

Алгоритм опирается на формулу: градусная мера вписанного угла равна половине дуги.



Углы, опирающиеся на одну и ту же дугу

01

Все вписанные углы, которые опираются на одну и ту же дугу, равны между собой. Это позволяет находить угол по одному отмеченному значению дуги.

02

Если на окружности задано несколько углов и у них совпадает опирающаяся дуга, их градусные меры совпадут. Тогда расчёт сводится к одному вычислению.

03

Свойство особенно полезно, когда на чертеже много точек: без дополнительных построений можно приравнять углы и быстро получить неизвестную величину.

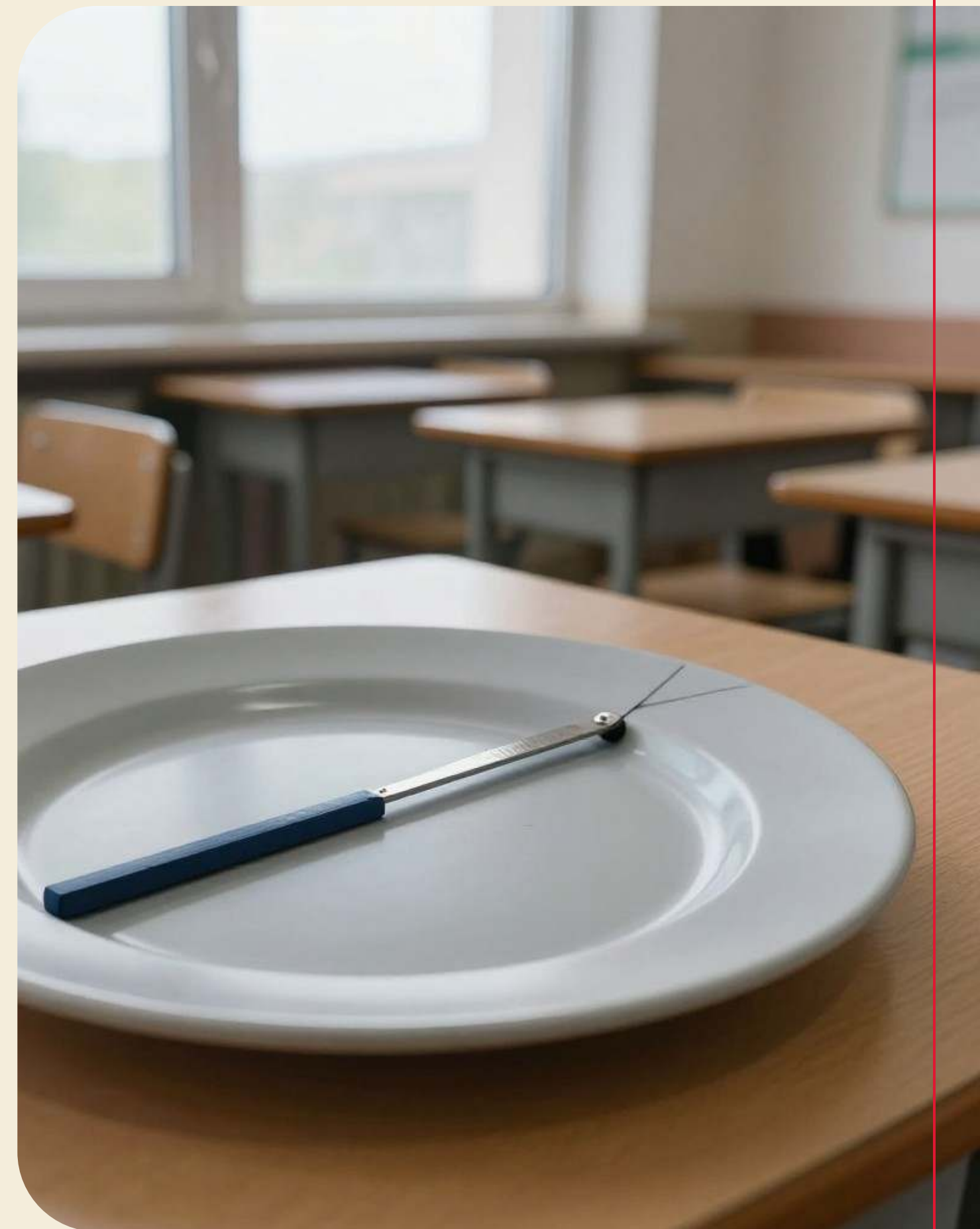
Угол между хордой и касательной

• —————

Угол между касательной и хордой равен половине дуги, которая заключена внутри этого угла. Касательная касается окружности в одной точке, а хорда проходит через две точки окружности.

• —————

В точке касания радиус перпендикулярен касательной, поэтому такие углы нередко приводят к значениям, кратным 90° . Например, при дуге 140° угол будет 70° .



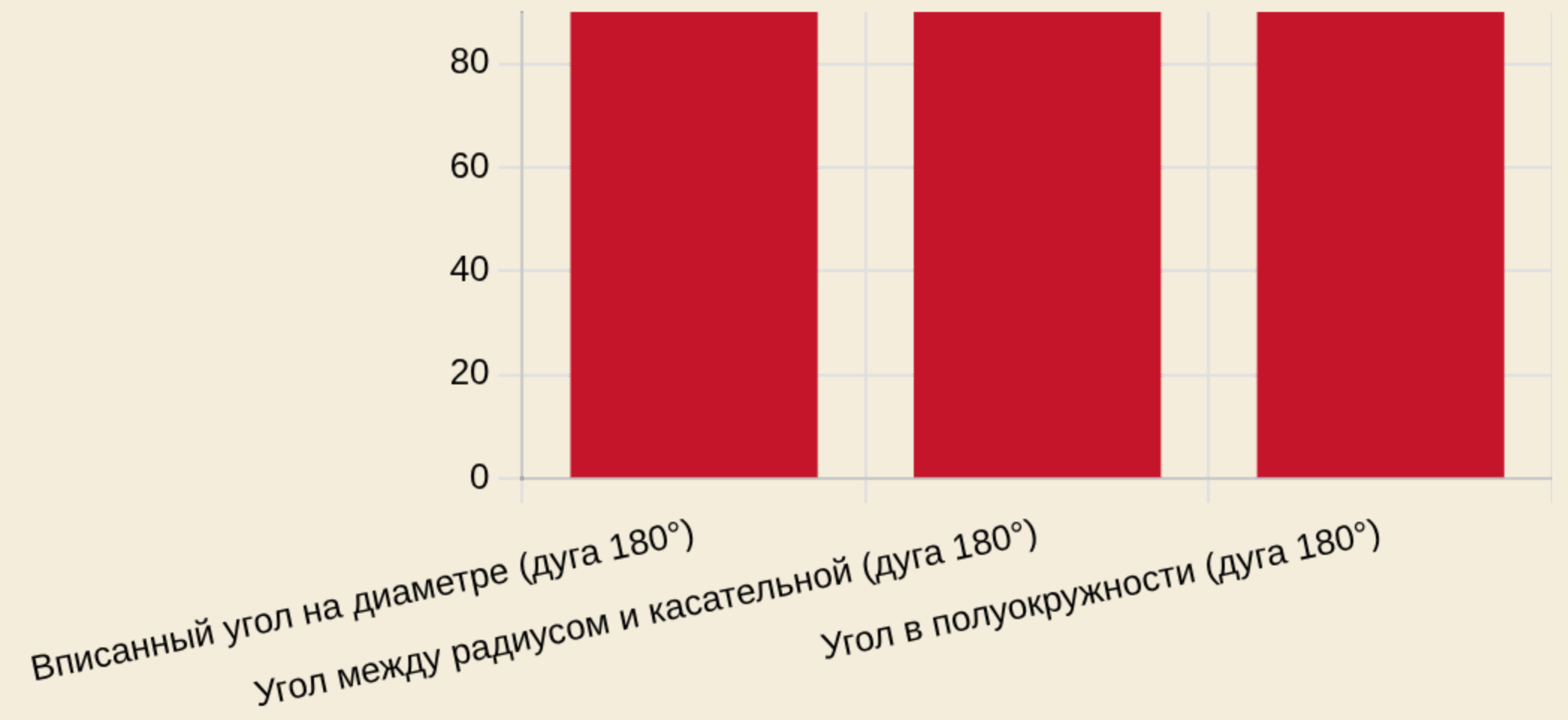
Случаи, когда угол равен 90°

В каждом из трёх случаев угол связан с полуокружностью: дуга равна 180° , а нужный угол получается по правилам, где в формуле всегда присутствует деление пополам.

Диаграмма показывает общий механизм: при дуге 180° половина даёт 90° . Поэтому признак 180° (диаметр или полуокружность) почти всегда приводит к прямому углу.

Учебный материал: свойства углов, опирающихся на дуги (без внешних данных).

Когда угол равен 90° : примеры через дуги



Угол внутри окружности

01

Если две хорды пересекаются внутри окружности, получается угол внутри окружности. Он опирается на две дуги: ту, что «лежит» по одну сторону от угла, и вертикальную к ней дугу.

02

Градусная мера угла внутри окружности равна половине суммы этих двух дуг. Поэтому в решении сначала находят обе дуги, а затем складывают их и делят пополам.

03

Удобно отмечать дуги прямо на чертеже, потому что вертикальный угол всегда участвует в той же паре дуг. Тогда не нужно пересчитывать всё заново для соседних углов.

04

Например, если дуги равны 50° и 110° , их сумма 160° , а половина — 80° . Значит, искомый угол внутри окружности равен 80° .

Угол вне окружности

Алгоритм для угла с продолжением хорд и секущих: сначала дуги, затем разность и деление пополам.



Главные формулы темы

Используйте формулы, выражающие углы через дуги окружности. Для решений достаточно правильно определить вид угла и соответствующую дугу (или две дуги).

Во всех формулах основа — дуга. Разница появляется только в том, какие дуги берутся: одна (для центрального/вписанного/касательной) или две (для внутри/вне окружности).

Сводная таблица по правилам углов, связанных с окружностью (материал урока).

Случай	Формула	Пример
Центральный угол	$\alpha = \text{дуга}$	дуга $60^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ$
Вписанный угол	$\alpha = \frac{1}{2} \text{ дуги}$	дуга $120^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ$
Угол между хордой и касательной	$\alpha = \frac{1}{2} \text{ дуги}$	дуга $140^\circ \rightarrow \alpha = 70^\circ$
Угол внутри окружности	$\alpha = \frac{1}{2}(\text{дуга}_1 + \text{дуга}_2)$	50° и $110^\circ \rightarrow 80^\circ$
Угол вне окружности	$\alpha = \frac{1}{2}(\text{Дуга}_1 - \text{дуга}_2)$	разность дуг $\rightarrow$ половина

Алгоритм решения задач по окружности

Определите вид угла

Смотрите на вершину и стороны угла: в центре, на окружности, внутри или вне окружности. От этого зависит, какая именно формула с дугами понадобится.

Найдите дуги и примените правило

Обозначьте дуги на чертеже, посчитайте или определите их градусную меру и подставьте в формулу (одна дуга или две).

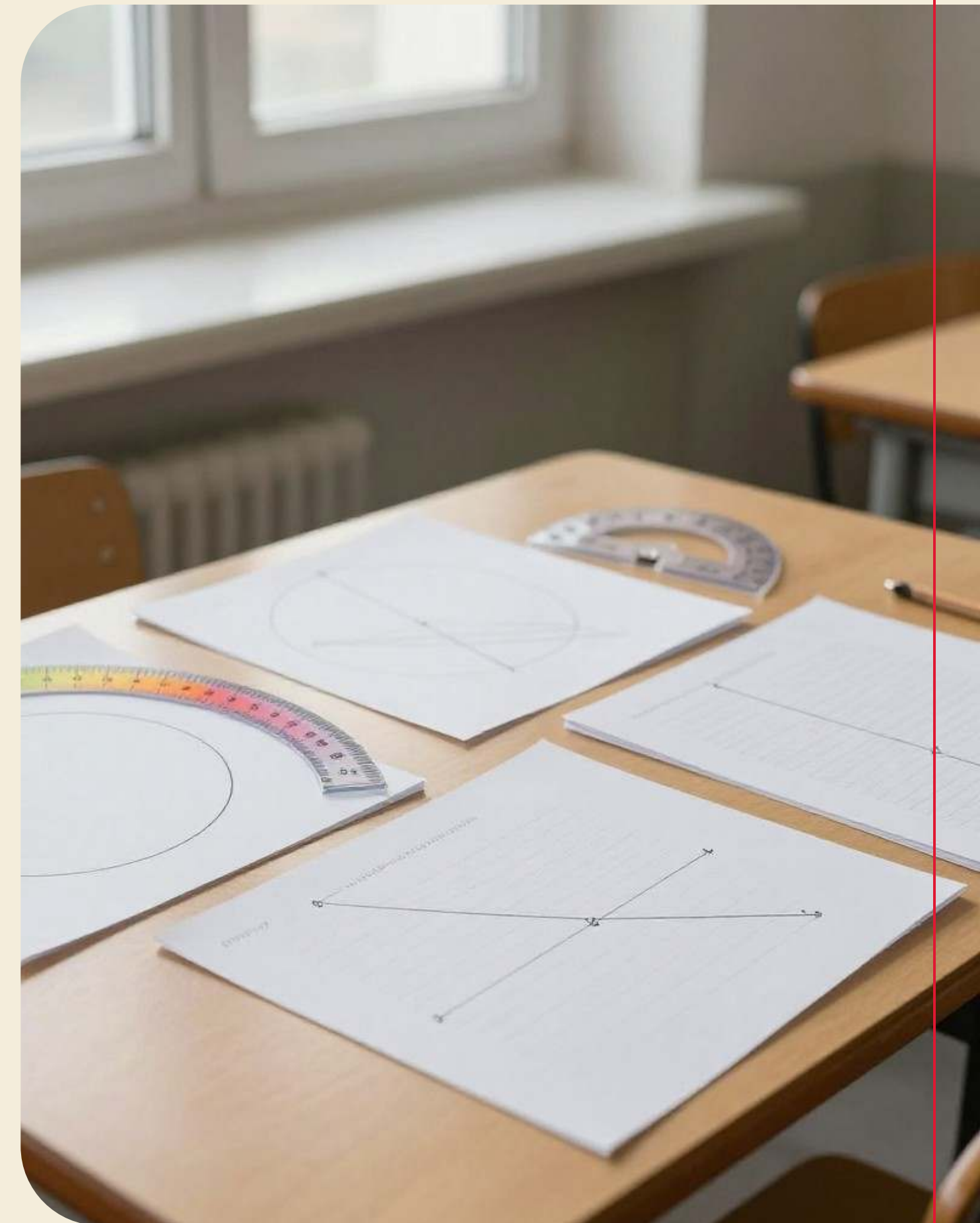
Проверьте результат по чертежу

Сравните ответ с рисунком и здравым смыслом: вписанный угол не больше половины своей дуги, а центральный не превышает 360° . При необходимости пересчитайте дуги.

Типичные ошибки в задачах

Частая ошибка — путаница между дугой и углом: иногда берут градусную меру угла вместо дуги, а затем получают неверное значение. Всегда отдельно выписывайте, что именно измеряется в условии: дуга или угол.

Ещё одна проблема — забыть разделить на 2 для вписанного угла и угла между хордой и касательной. Для внешнего угла важно верно выбрать большую и меньшую дуги. На чертеже отмечайте все точки и дуги.

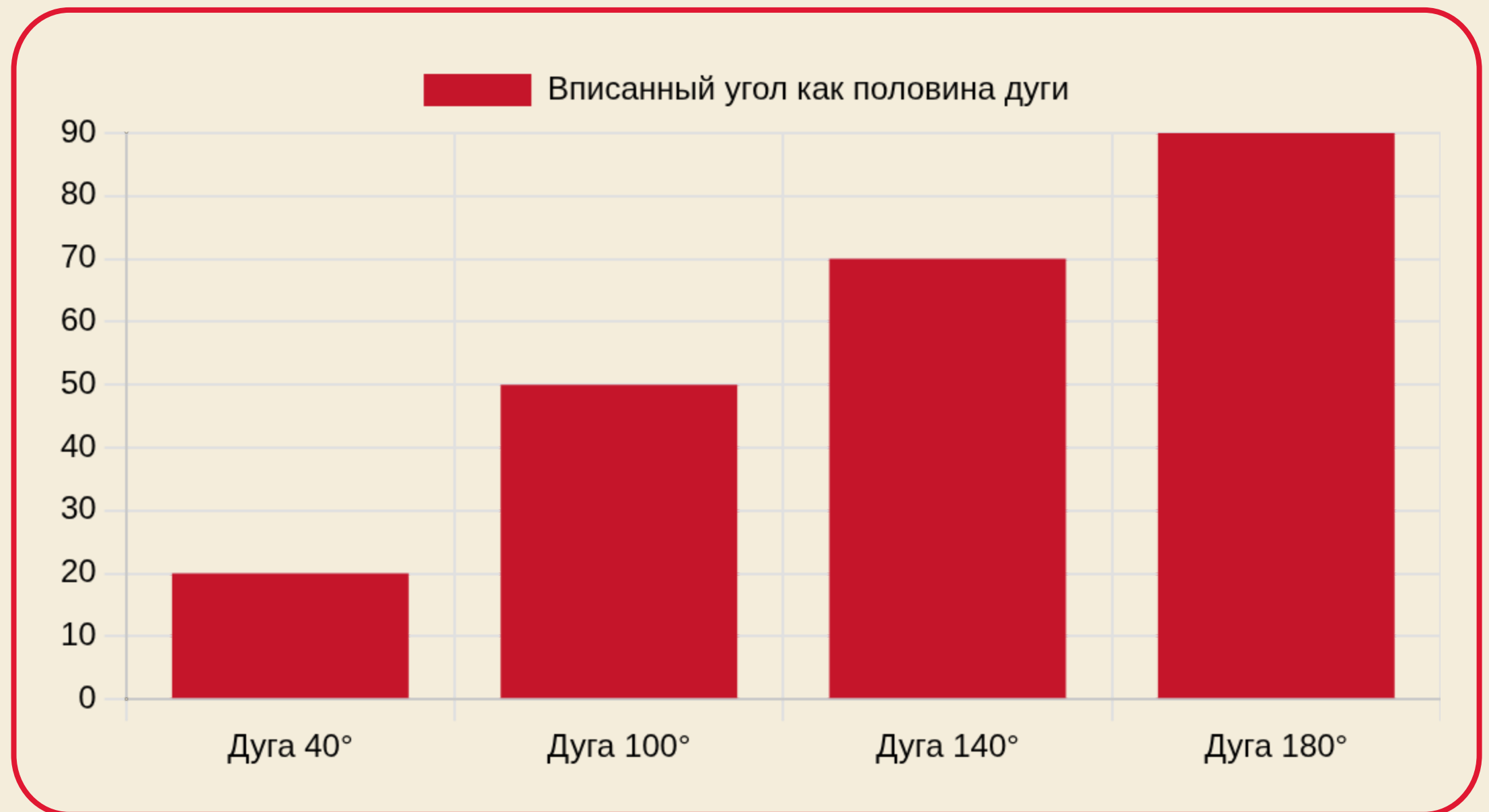


Примеры вычислений по дуге

Во всех примерах вписанный угол получается делением дуги на 2. Поэтому правило «половина дуги» позволяет быстро находить значения без сложных построений.

График подтверждает постоянство связи: при увеличении дуги вписанный угол растёт в два раза медленнее. Для проверки достаточно умножить найденный угол на 2 и сверить с дугой.

Примеры для повторения формулы (без внешних источников); вычисления выполнены по правилу вписанного угла.



Связь с другими темами геометрии



Треугольники в окружности

В задачах про окружность часто появляются треугольники, где вписанные углы помогают находить углы треугольника. Правила связи угла и дуги дают удобный путь к вычислениям.



Равные углы и параллельные прямые

Иногда на чертеже есть параллельные прямые, и тогда равенство углов становится ключом. Это помогает связать углы треугольника или фигуры с дугами окружности.



Задачи на построение

При построении используют свойства углов, опирающихся на дуги. Найдя нужную величину угла, можно определить положение точек на окружности и завершить построение.



Многоугольники, вписанные в окружность

Если вершины многоугольника лежат на окружности, каждый его угол связан с определённой дугой. Поэтому вычислять или сравнивать углы проще через дуги.

Где встречаются углы в окружности

01

Углы, связанные с окружностью, видны в часах: стрелки задают направления, а между ними получается центральный угол. Точно зная дугу, легко вычислять угол между минутной и часовой стрелками.

02

Похожие идеи есть в велосипедных и автомобильных колёсах, где спицы и отметки делят круг на части. Градусные меры помогают соотносить размеры деталей и соответствующие доли окружности.

03

В спортивных разметках, архитектурных арках и компасе круговые элементы задают нужные направления. Геометрические правила по дугам позволяют корректно сравнивать участки круга и находить параметры конструкций.

04

Круговые диаграммы тоже связаны с «углами по дуге»: каждая часть диаграммы соответствует доле круга. Поэтому знание связи «доля круга — это угол» упрощает чтение и вычисления.

Главный вывод урока

Все основные правила темы связаны с дугой окружности. Центральный угол равен дуге, вписанный — половине дуги, а угол между хордой и касательной — тоже половине дуги. Для внутри — половина суммы дуг, для вне — половина разности дуг.