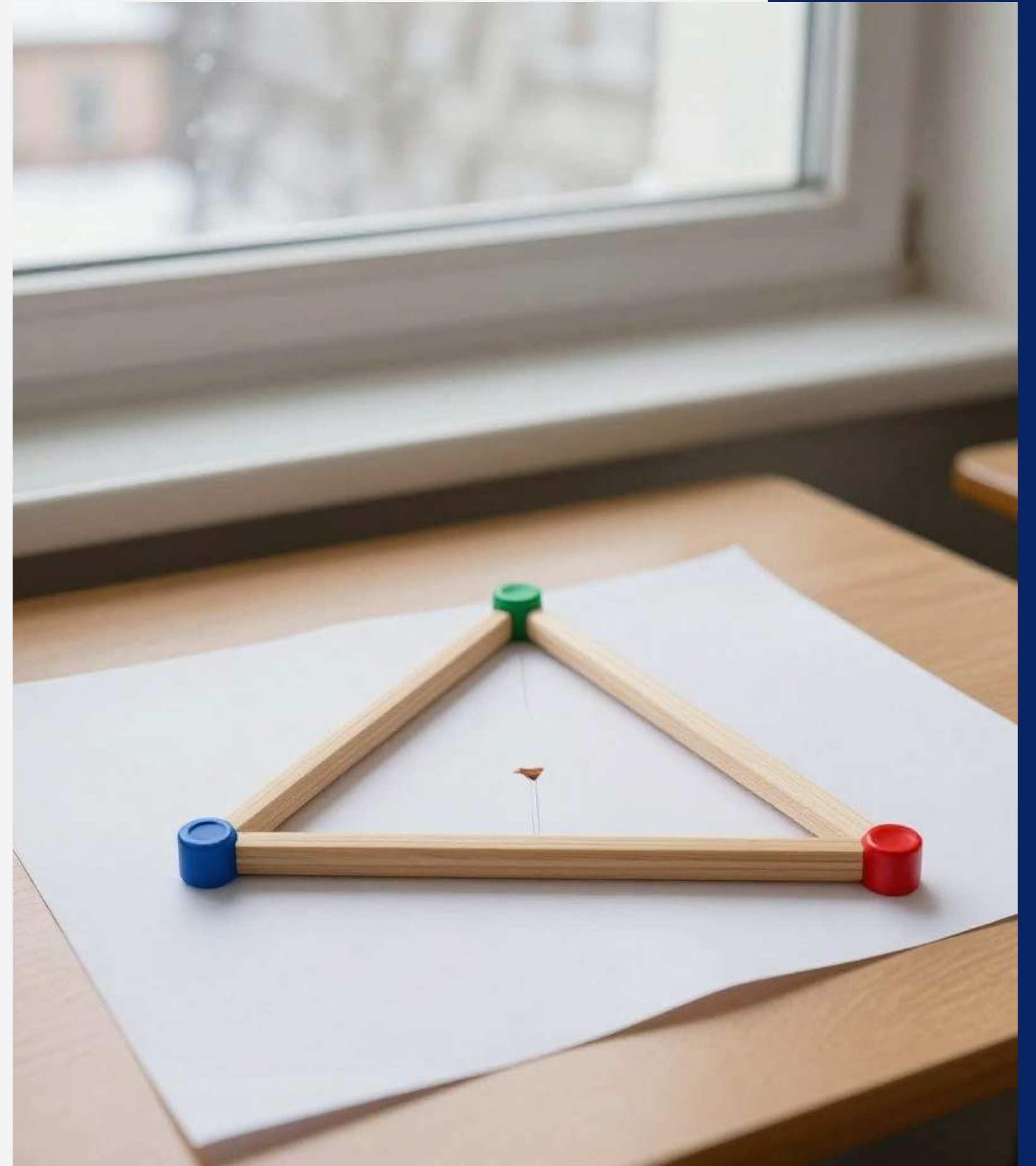


Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов

Связь сторон, углов и векторов в одной теме.

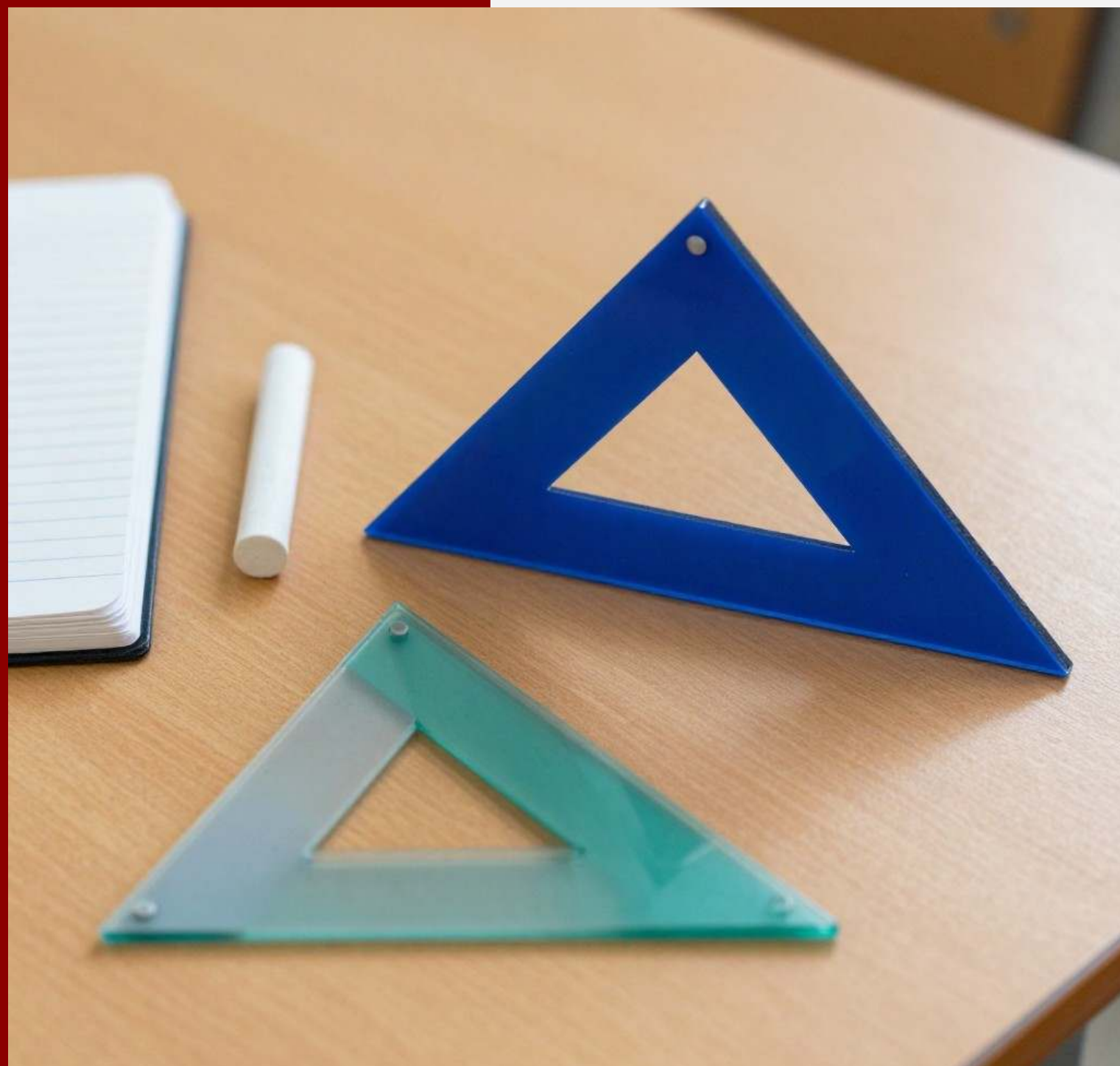


Почему треугольники и векторы изучают вместе



Треугольники учат сравнивать стороны и углы, а векторы добавляют удобный язык координат. Вместе эти темы помогают находить неизвестные элементы фигур, доказывать свойства и уверенно решать задачи на плоскости.

Основное свойство треугольника: сторона и противолежащий угол



01. Больше сторона — больше угол

В любом треугольнике самой длинной стороне соответствует самый большой противолежащий угол. Это правило позволяет сравнивать элементы фигуры без измерений, если известны только длины сторон или часть углов.

02. Меньше сторона — меньше угол

Если сторона короче другой, то и угол напротив неё меньше. Такое соответствие особенно удобно в задачах, где нужно сделать вывод о треугольнике по одному-двум данным, не выполняя полный расчёт.

03. Равные стороны и углы

Когда две стороны равны, равны и углы, лежащие напротив них. Это свойство помогает распознавать равнобедренный треугольник и быстро находить неизвестные углы по уже известным значениям.

Как связаны длины сторон и величины углов

Пример показывает одно и то же упорядочение для сторон и углов: чем больше сторона, тем больше противолежащий угол.

Из данных видно, что порядок сторон $4 < 6 < 8$ совпадает с порядком углов $A < B < C$.



Учебный пример по теме урока, составлен по условию слайда.

Равенство сторон и равенство углов



Равнобедренный треугольник

Если две стороны треугольника равны, он называется равнобедренным. Углы при основании такого треугольника тоже равны, поэтому по одной стороне и одному углу можно найти второй.

Равносторонний треугольник

Если все три стороны равны, треугольник равносторонний. Тогда все его углы равны 60° , и эта особенность позволяет быстро проверять вид фигуры и находить неизвестные значения.

Практическая польза

Сравнивая стороны и углы, можно определить тип треугольника без дополнительных построений. Это экономит время при решении задач и помогает сразу замечать ошибки в чертеже или вычислениях.

Виды треугольников и их признаки

Вид	Признак	Пример
Равнобедренный	2 стороны равны	5, 5, 8
Равносторонний	Все углы 60°	6, 6, 6
Разносторонний	Все стороны разные	4, 5, 7

Школьные определения и примеры по теме урока.

Сравнение основных видов треугольников по сторонам, углам и простому примеру.

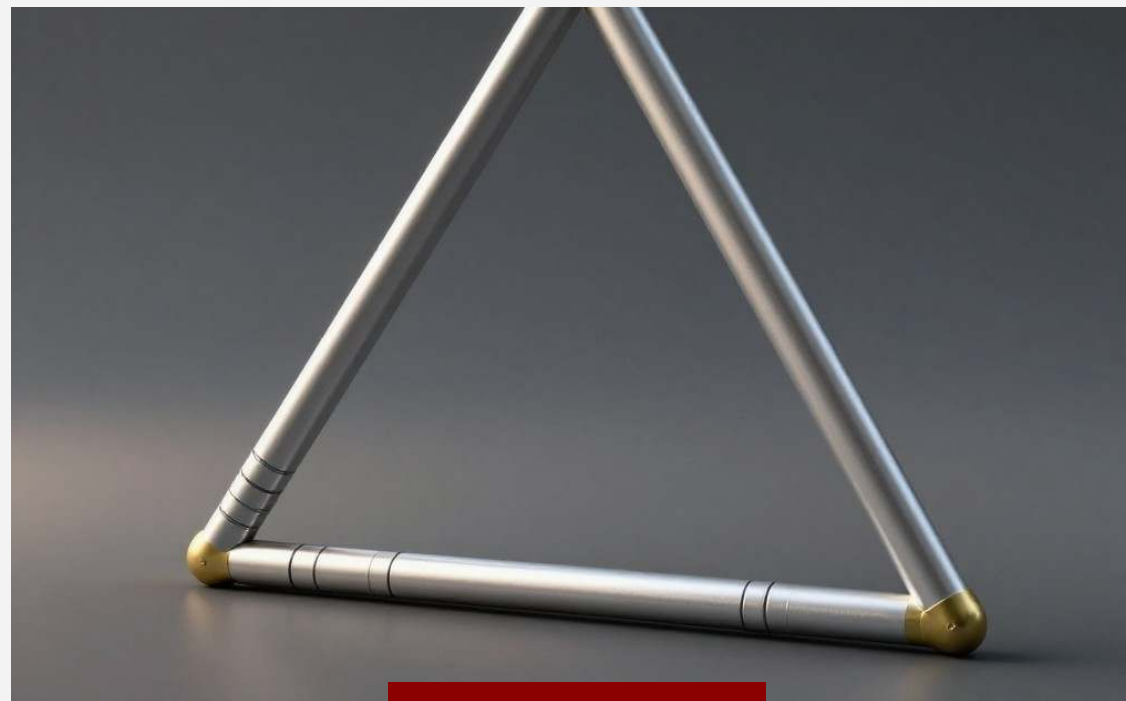
По равенству сторон можно сделать вывод о равенстве углов, а по равенству углов — о равенстве соответствующих сторон.

Больший угол — большая противоположная сторона



Угол 80° задаёт самое длинное ребро

В треугольнике с углами 40° , 60° и 80° легко заметить порядок сторон без измерений. Напротив угла 80° лежит самая длинная сторона, потому что именно ей соответствует наибольший угол. Это правило часто используют при сравнении двух треугольников.



Угол 40° указывает на самую короткую сторону

Меньшему углу соответствует меньшая противолежащая сторона. Если угол равен 40° , то сторона напротив него короче остальных. Такой вывод помогает быстро проверять решение, когда чертёж уже есть, а точные длины ещё не найдены.

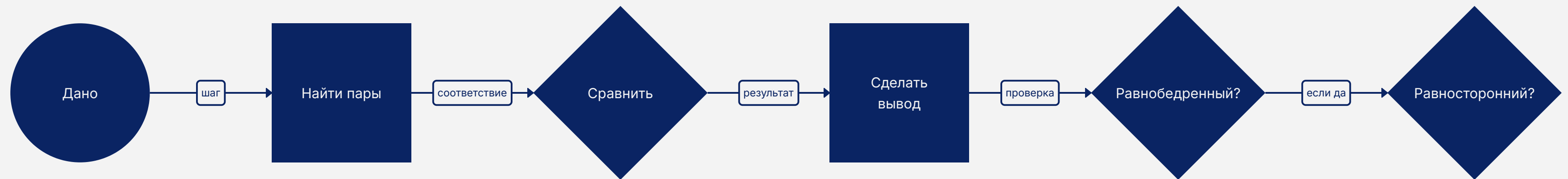


Промежуточный угол даёт среднюю сторону

Угол 60° находится между 40° и 80° , поэтому и соответствующая ему сторона занимает среднее положение по длине. Эта связь делает сравнение на чертеже наглядным и помогает не перепутать стороны при записи ответа.

Алгоритм сравнения сторон и углов треугольника

Последовательность действий для задач на соответствие сторон и противолежащих углов



Неравенство треугольника

■ Главное правило

Сумма длин любых двух сторон треугольника должна быть больше длины третьей стороны. Это обязательное условие существования треугольника и основа для проверки возможных наборов длин.

■ Что это означает

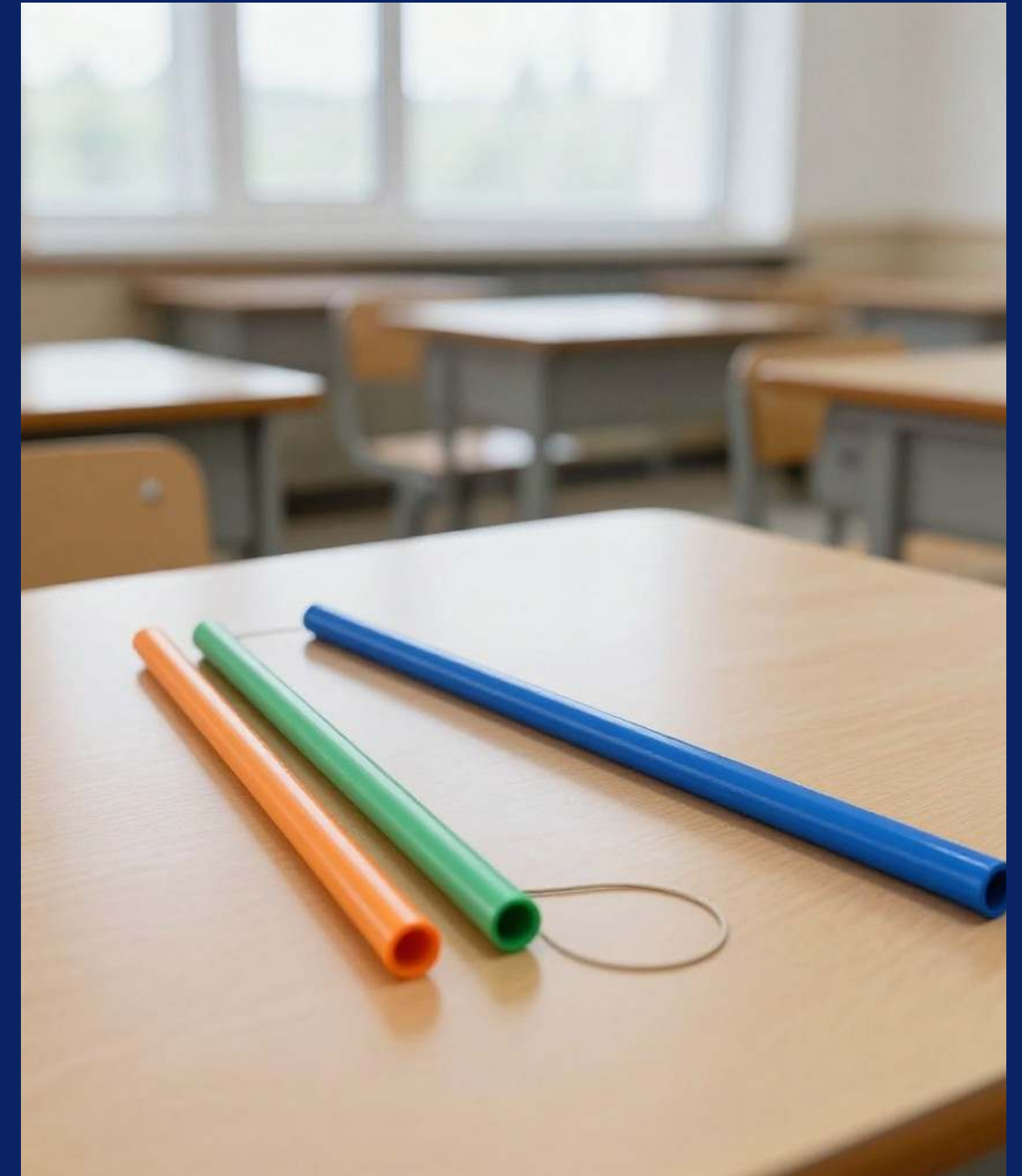
Неравенство треугольника помогает сразу отличить возможные длины от невозможных. В задачах на построение оно показывает, существует ли фигура, прежде чем выполнять чертёж.

■ Проверка на примере

Если взять стороны 2 см, 3 см и 6 см, треугольник построить нельзя. Действительно, $2 + 3 = 5$, а 5 меньше 6, значит условие неравенства нарушено.

■ Где применяется

Это свойство используют при решении задач на построение, проверку данных и поиск недостающей стороны. Оно позволяет быстро контролировать правильность ответа без сложных вычислений.



Векторы как способ описывать направление и длину

Что задаёт вектор

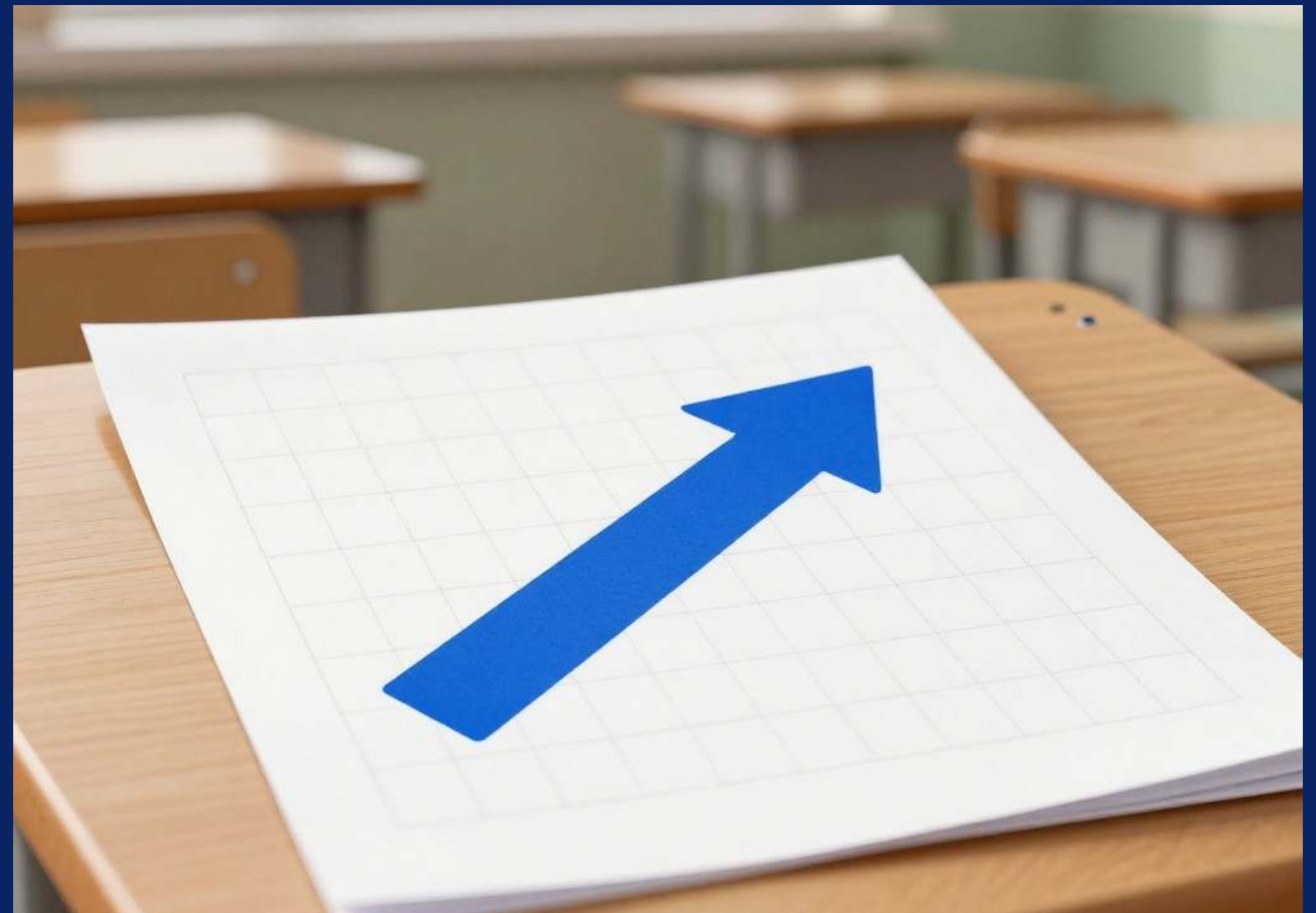
Вектор — это направленный отрезок, у которого есть начало, конец, длина и направление. Он помогает описывать перемещение, положение точек и взаимное расположение фигур на плоскости.

Модуль вектора

Длина вектора называется модулем. В координатной записи можно сразу вычислять модуль по числам, а значит, сравнивать векторы и использовать их в геометрических задачах.

Запись в координатах

Вектор удобно задавать парой чисел, например $(3; 4)$ или $(5; 12)$. Такая запись особенно полезна в прямоугольной системе координат, потому что позволяет применять формулы для длин и углов.



Модуль вектора по координатам

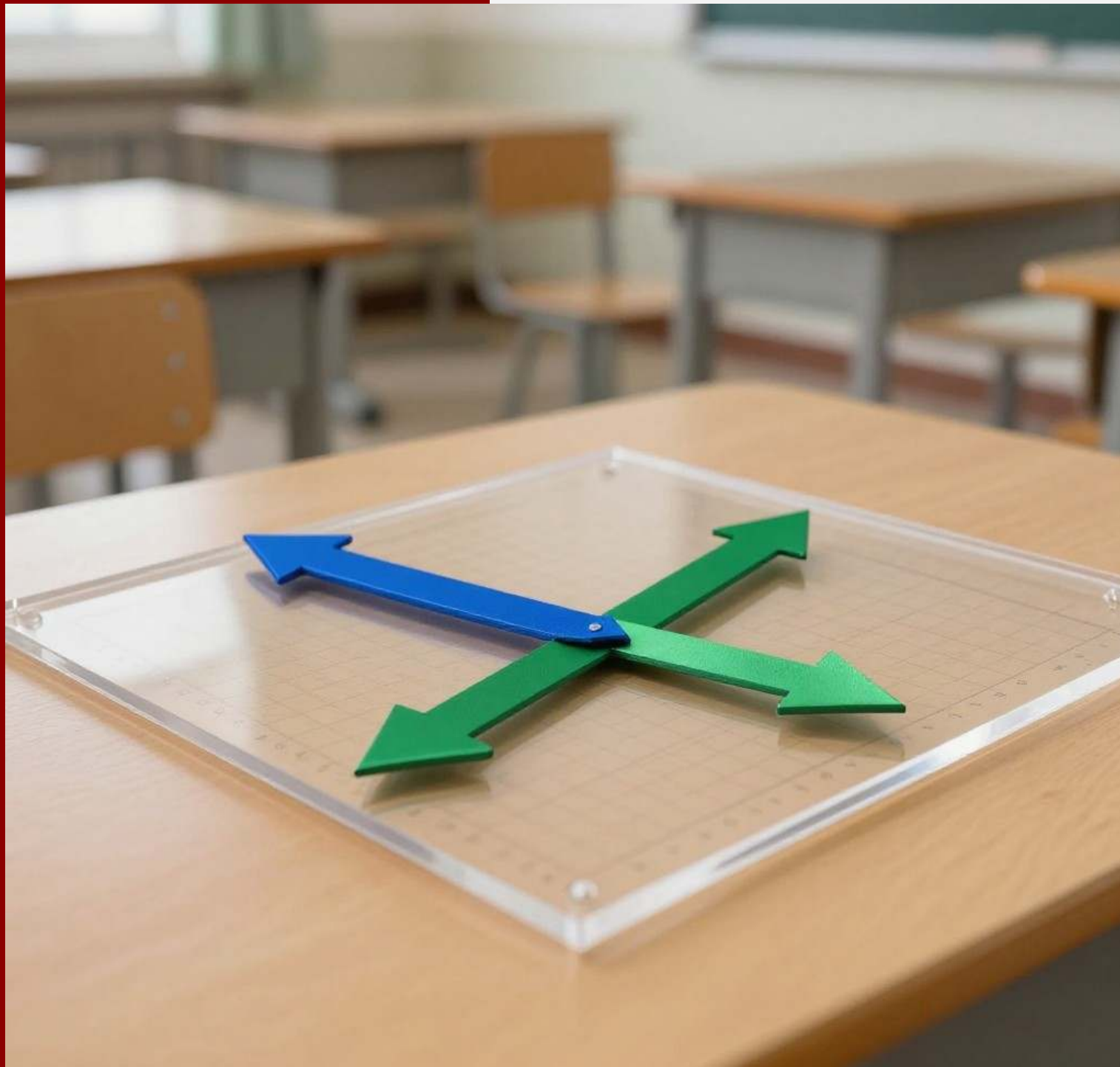
Модуль находят по обеим координатам одновременно: именно их сочетание определяет длину вектора на плоскости.

Чем больше обе координаты, тем больше модуль; известные тройки помогают быстро узнавать прямоугольные треугольники.



Учебные примеры по теме «Векторы в прямоугольной системе координат».

Скалярное произведение векторов



01. Геометрический смысл

Скалярное произведение связывает длины векторов и угол между ними. Оно помогает понять, насколько направления совпадают, расходятся или образуют прямой угол, без дополнительных построений.

02. Формула по координатам

Если известны координаты векторов, удобно считать по формуле $x_1x_2 + y_1y_2$. Такой способ превращает геометрическую задачу в обычное вычисление с числами.

03. Как читать результат

Положительное значение означает острый угол, ноль — перпендикулярность, отрицательное — тупой угол. По знаку сразу видно взаимное расположение векторов на координатной плоскости.

Что показывает знак скалярного произведения

Знак произведения сразу подсказывает, как расположены векторы друг относительно друга.

По знаку можно быстро определить тип угла, а пример с векторами $(2; 3)$ и $(3; -2)$ показывает случай перпендикулярности.

Случай	Знак	Вывод
Острый угол	> 0	Сходные направления
Прямой угол	$= 0$	Перпендикулярны
Тупой угол	< 0	Направления расходятся

Формула скалярного произведения и её геометрический
смысл.

Скалярное произведение в координатах



Два вектора — одно число

На координатной сетке каждый вектор виден как стрелка с точными координатами конца. Перемножая соответствующие координаты и складывая результаты, можно сразу получить число, которое описывает их взаимное положение. Так, для векторов $(2; 3)$ и $(4; 1)$ получается 11.

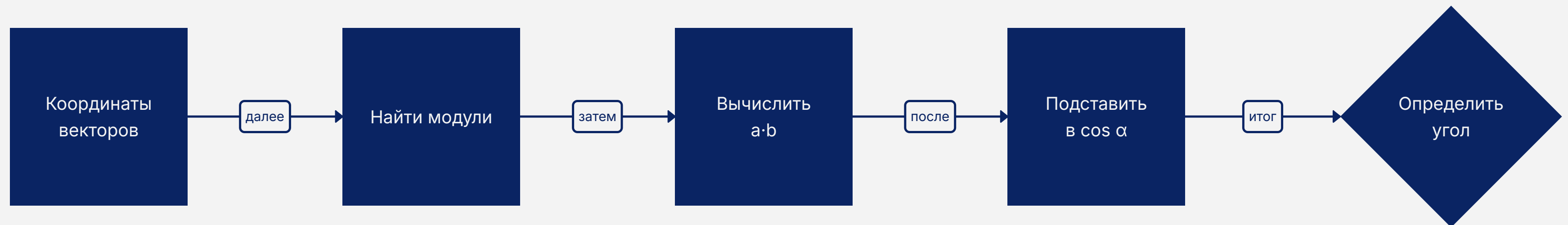


Когда ответ равен нулю

Иногда вычисление даёт ноль, и это особенно важный случай. Для векторов $(1; 2)$ и $(2; -1)$ произведение равно 0, значит, они перпендикулярны. На рисунке такие векторы удобно узнавать по прямому углу между направлениями.

Как найти угол между векторами

Последовательность основана на координатах векторов и формуле через косинус.



0

скалярного произведения означает,
что векторы перпендикулярны.

Свойство скалярного произведения векторов:
 $a \cdot b = 0$ при перпендикулярности.

**Это быстрое правило помогает
находить прямой угол
в координатных задачах
без построений и измерений.**

Типовые задачи по теме и используемые факты

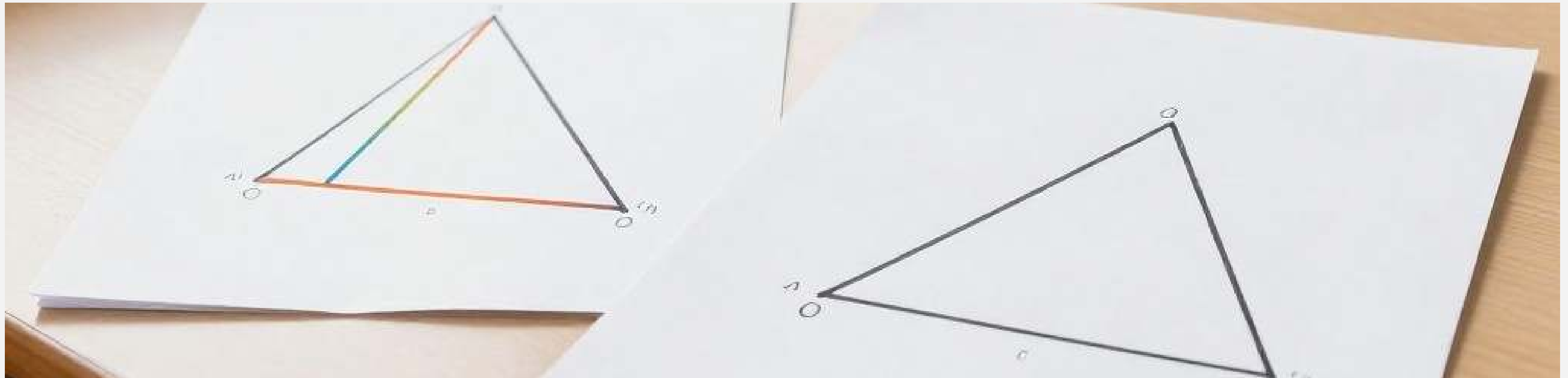
Задача	Факт	Вывод
Сравнить стороны	Больший угол	Большая сторона
Проверить вид	Равенство сторон	Тип треугольника
Найти прямой угол	$a \cdot b = 0$	Перпендикулярность
Найти угол	Формула $\cos \alpha$	Значение угла

В задачах по теме важны одни и те же опорные факты: сравнение сторон, признаки треугольников и свойства скалярного произведения.

Каждая задача решается через короткую цепочку фактов: от данных к признаку, от признака — к выводу.

Школьные правила темы «Треугольники и векторы».

Типичные ошибки при решении задач



Путают сторону и угол

Иногда сравнивают не те элементы: берут сторону, хотя нужно смотреть на противолежащий угол. Из-за этого верный ответ теряется уже на первом шаге решения.

Ошибаются в знаках

При вычислении скалярного произведения легко забыть про отрицательную координату. Такая ошибка меняет результат, а вместе с ним — и вывод о расположении векторов.

Неверно читают косинус

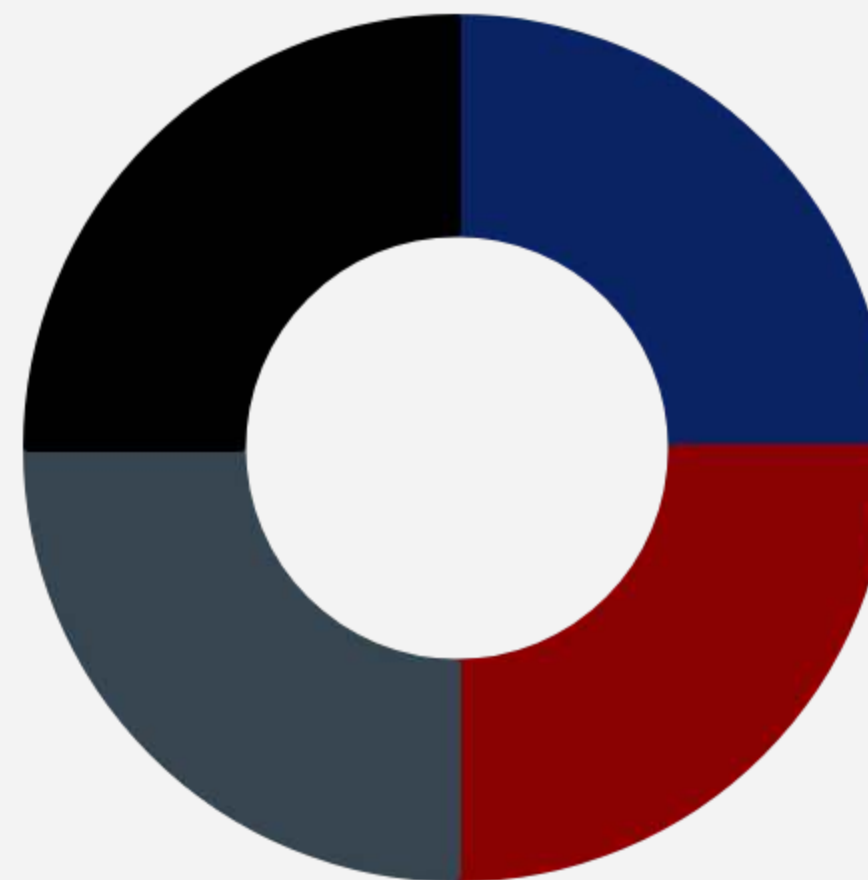
Если угол прямой, косинус должен быть равен нулю. Положительное число здесь означает уже другой тип угла, поэтому ответ нужно обязательно проверять по смыслу.

Связи между основными понятиями темы

Один и тот же чертёж можно читать по-разному: через стороны и углы треугольника или через координаты и векторы.

Все связи ведут к одному выводу: геометрия и векторы взаимно дополняют друг друга в решении задач.

■ Большая сторона — больший угол ■ Равные стороны — равные углы
■ $a \cdot b = 0$ — перпендикулярность ■ Угол по косинусу



Обобщение правил темы «Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов».

Геометрия треугольников и язык векторов: главное

Сегодня мы увидели, что стороны и углы треугольника связаны строгими правилами, а векторы позволяют описывать длину, направление и угол с помощью формул. Эти идеи помогают решать задачи быстро и точно.