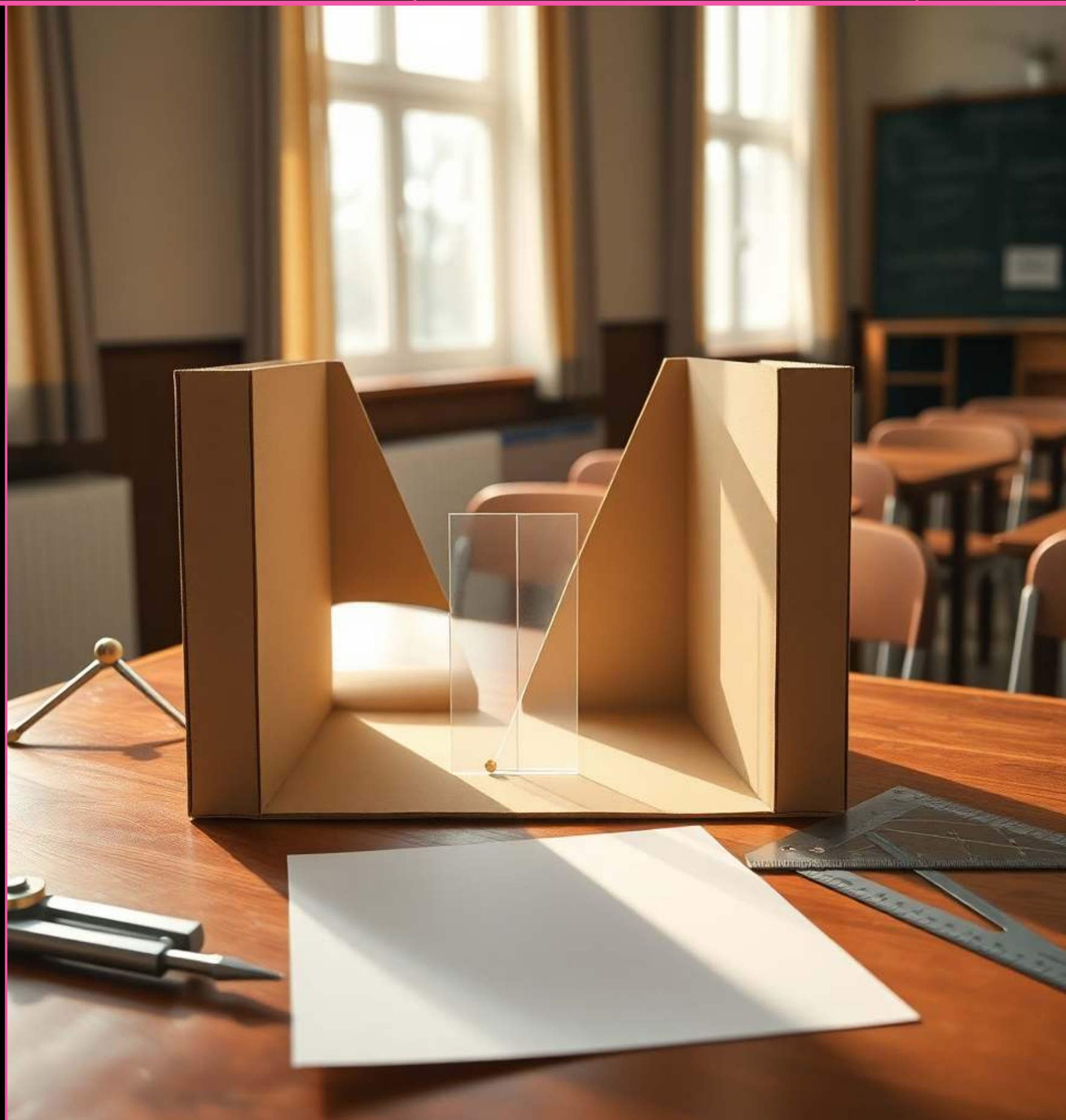


СИНУС, КОСИНУС И ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО УГЛА



Точные значения через половину угла
без лишних вычислений.



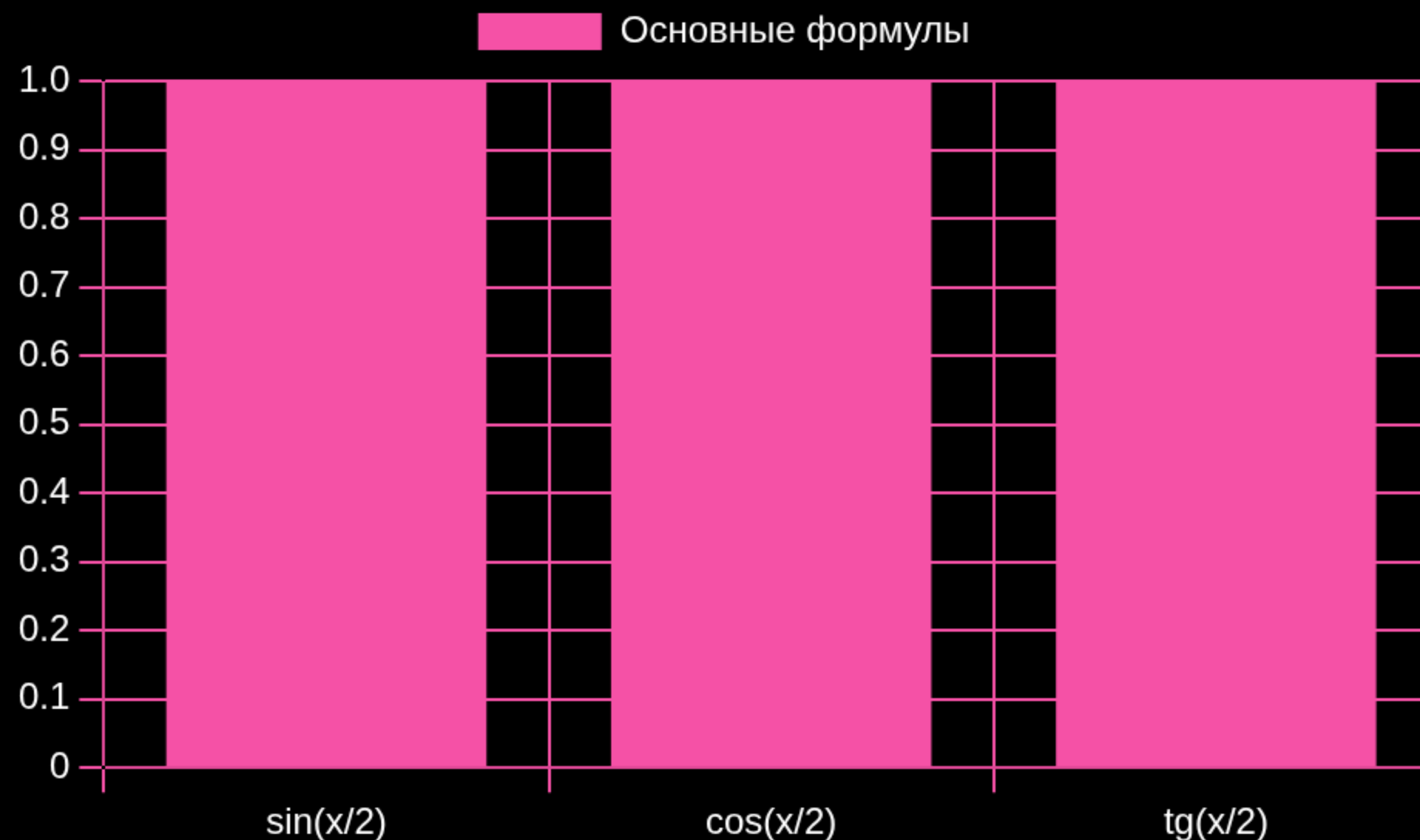
ЗАЧЕМ НУЖНЫ ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО УГЛА

Эти формулы продолжают тему тригонометрических преобразований и помогают переходить от известного полного угла к его половине. Они особенно полезны там, где требуется точный ответ, а не приближение.

Три основные формулы половинного угла

Для синуса и косинуса появляется корень, а для тангенса удобнее рациональная дробь.

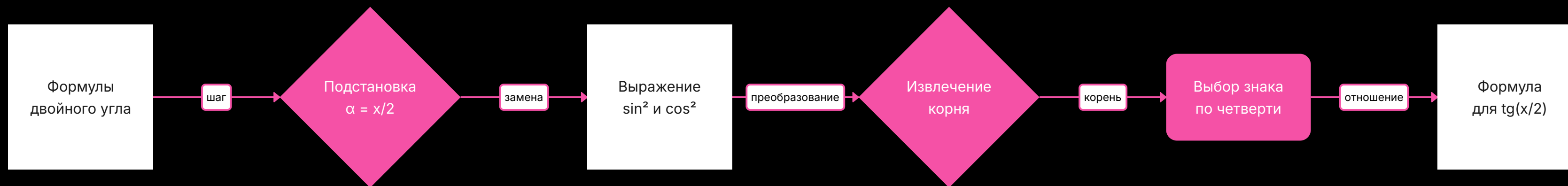
Все три формулы выражают половину угла через полный угол, но применяются по-разному в зависимости от задачи.



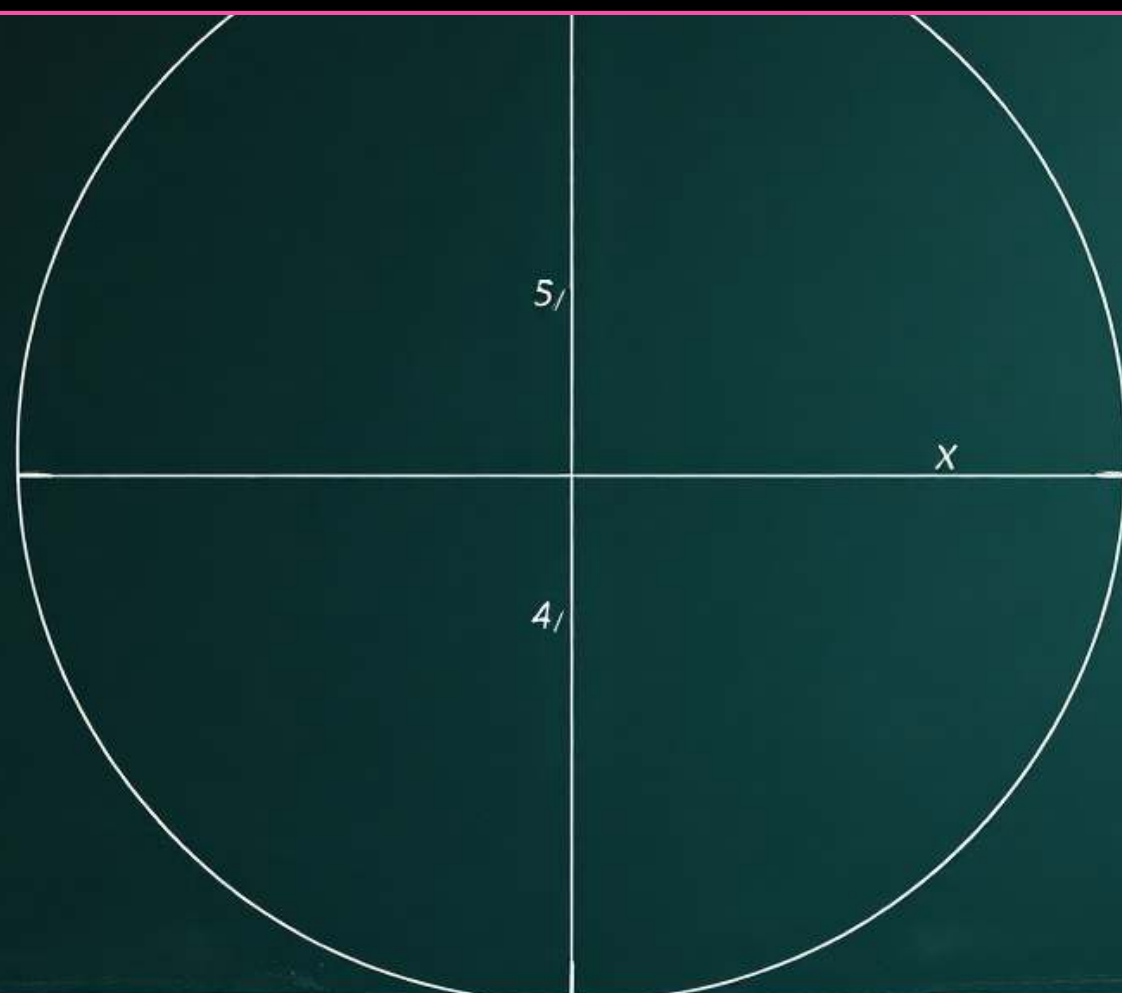


ВЫВОД ФОРМУЛ ПОЛОВИННОГО УГЛА

Построение через формулы двойного угла и выбор знака



ЕДИНИЧНАЯ ОКРУЖНОСТЬ И ЗНАКИ ФУНКЦИЙ



Синус и ордината

Знак $\sin(x/2)$ определяется положением точки на единичной окружности: выше оси Ox – положительный, ниже – отрицательный. Поэтому сначала находят четверть именно для угла $x/2$, а не для всего x .

Косинус и абсцисса

Знак $\cos(x/2)$ связан с абсциссой точки. Справа от оси Oy он положителен, слева – отрицателен. Это помогает быстро определить нужный знак без запоминания лишних правил.

Четверть угла

Во II и III четвертях знаки функций различаются, поэтому нельзя выбирать корень автоматически. Проверка четверти делает ответ точным и защищает от типичной ошибки в вычислениях.

Угол важнее записи

Решающим является положение именно половины угла. Один и тот же вид формулы может дать разные знаки в зависимости от того, где расположен угол $x/2$ на окружности.

ФОРМУЛА ДАЁТ ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ $\sin(x/2)$ ЧЕРЕЗ $\cos x$ И ОСОБЕННО УДОБНА В ЗАДАЧАХ С РАДИКАЛАМИ.

1

подкоренное выражение всегда неотрицательно, поэтому остаётся выбрать только правильный знак.

Тригонометрические формулы
половинного угла

ФОРМУЛА ДЛЯ КОСИНУСА ПОЛОВИННОГО УГЛА



ИСХОДНОЕ РАВЕНСТВО

Формула $\cos(x/2) = \pm \sqrt{(1 + \cos x)/2}$ получается из тождества $\cos x = 2\cos^2(x/2) - 1$. Она сразу связывает полный угол с его половиной и позволяет находить точное значение без дополнительных таблиц.

01

ВЫБОР ЗНАКА

Знак определяется четвертью угла $x/2$. В I и IV четвертях $\cos(x/2)$ положителен, а во II и III четвертях отрицателен, поэтому перед вычислением нужно проверить положение угла на окружности.

02

ПРАКТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Эта формула особенно полезна, когда известен $\cos x$ и нужно вычислить $\cos(x/2)$ в точном виде. Она часто встречается в заданиях на преобразование выражений и сокращение корней.

03



ФОРМУЛА ДЛЯ ТАНГЕНСА ПОЛОВИННОГО УГЛА

ДВЕ РАВНЫЕ ЗАПИСИ

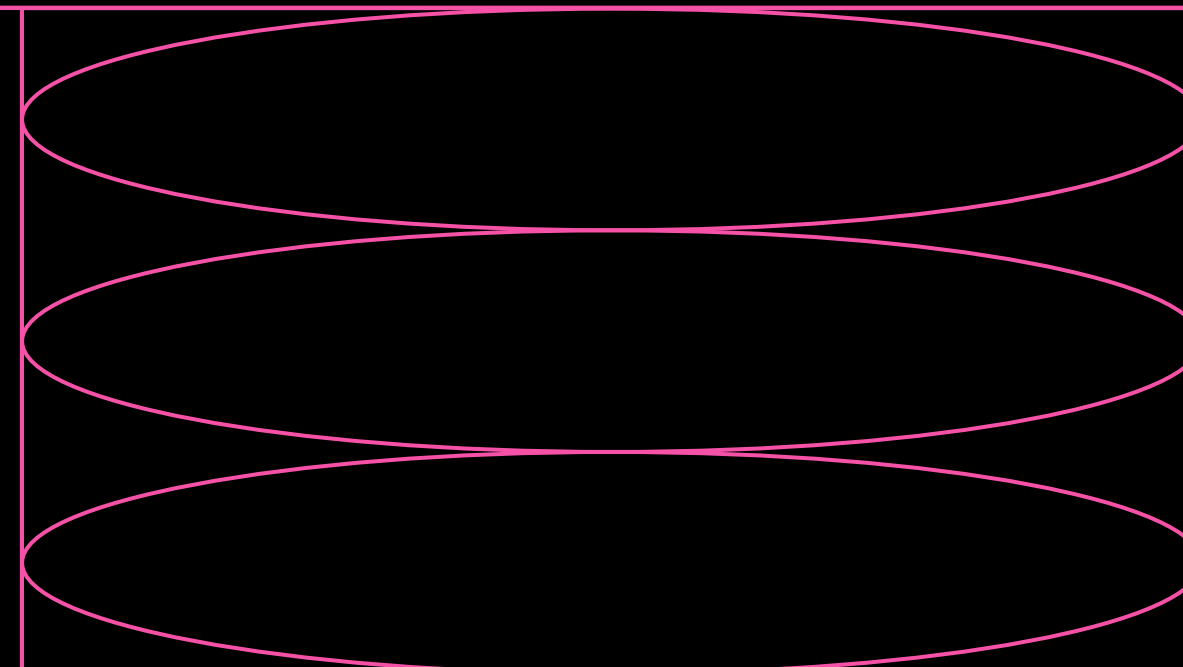
Формула $\operatorname{tg}(x/2) = \sin x / (1 + \cos x) = (1 - \cos x) / \sin x$ имеет две эквивалентные формы. Выбор зависит от того, какие значения известны и какой знаменатель удобнее использовать.

01

ПРЕИМУЩЕСТВО ДРОБИ

В отличие от формул для $\sin(x/2)$ и $\cos(x/2)$, здесь нет корня. Поэтому выражение часто упрощает алгебраические преобразования, особенно если нужно избавиться от радикалов в уравнении.

02



ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Первую запись нельзя использовать при $\cos x = -1$, а вторую – при $\sin x = 0$. Проверка знаменателя обязательна, иначе можно получить неверное или несуществующее значение.

03



СВОДКА ФОРМУЛ ПОЛОВИННОГО УГЛА

Функция	Формула	Источник
$\sin(x/2)$	$\pm\sqrt{(1-\cos x)/2}$	$\cos x=1-2\sin^2$
$\cos(x/2)$	$\pm\sqrt{(1+\cos x)/2}$	$\cos x=2\cos^2-1$
$\operatorname{tg}(x/2)$	$\sin x/(1+\cos x)$	деление функций

Три формулы удобно сравнить по виду, источнику и правилу выбора знака.

Для синуса и косинуса нужен корень и знак по четверти, а для тангенса – контроль знаменателя.

КАК ВЫБИРАТЬ ЗНАК В КОРНЕ



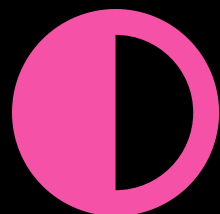
I ЧЕТВЕРТЬ

Если угол $x/2$ расположен в I четверти, то и $\sin(x/2)$, и $\cos(x/2)$ положительны. Это самый простой случай, но его всё равно нужно осознанно проверять по окружности.



II ЧЕТВЕРТЬ

Во II четверти $\sin(x/2)$ остаётся положительным, а $\cos(x/2)$ становится отрицательным. Поэтому для корня важно смотреть не на формулу, а на координаты точки на единичной окружности.



III ЧЕТВЕРТЬ

В III четверти обе функции отрицательны. Если не учесть это, легко потерять правильный знак и получить неверный ответ даже при верно выполненных вычислениях под корнем.



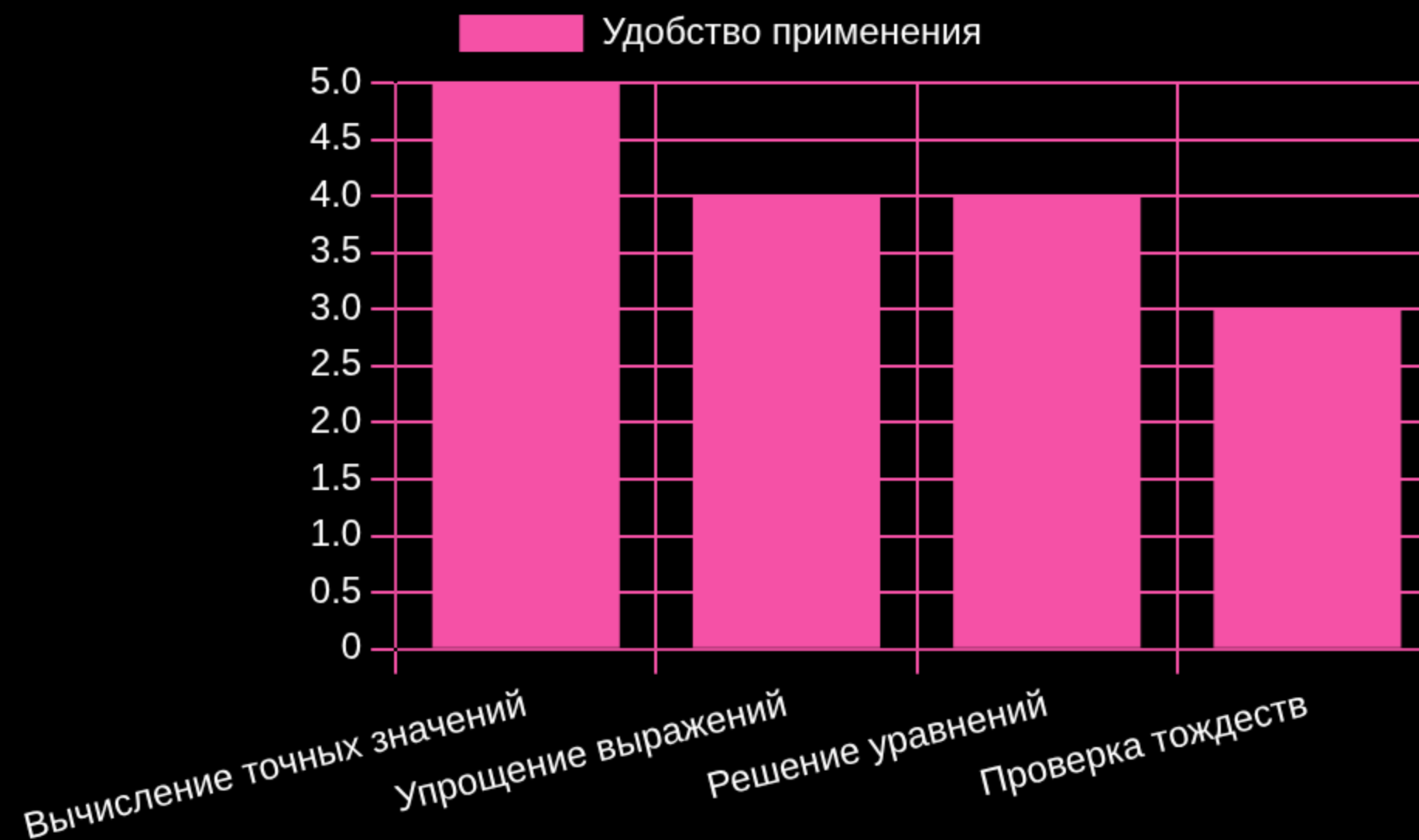
IV ЧЕТВЕРТЬ

В IV четверти $\sin(x/2) < 0$, а $\cos(x/2) > 0$. Такой случай часто проверяет внимательность: формула остаётся той же, но знак меняется только из-за положения угла.

КОГДА КАКАЯ ФОРМУЛА УДОБНЕЕ

Выбор формулы зависит от того, что известно в условии и какой вид ответа требуется получить. Особенно часто решающим становится наличие $\cos x$.

Самыми универсальными оказываются формулы для синуса половины угла и тангенса; косинус особенно удобен при точных значениях с учетом четверти.



КАК ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО УГЛА ВЫРАСТАЮТ ИЗ ФОРМУЛ ДВОЙНОГО УГЛА



От удвоения к делению пополам

Формулы половинного угла не возникают отдельно: они вытекают из уже известных равенств для двойного угла. Если рассмотреть $\cos 2\alpha$ и затем заменить α на $x/2$, становится видно, как из одного тождества естественно получается другое. Связь работает в обе стороны и помогает видеть структуру темы.



Симметрия алгебраических преобразований

В формулах двойного угла угол увеличивается, а в формулах половинного угла – уменьшается, но логика остается одинаковой. Сначала выражают квадрат синуса или косинуса, затем извлекают корень и уточняют знак. На схеме это выглядит как зеркальное отражение двух операций над одним и тем же углом.



Почему это важно для понимания

Такая связь показывает, что тригонометрия строится не на наборе разрозненных правил, а на системе взаимосвязанных тождеств. Ученик, который видит переход от 2α к $\alpha/2$, лучше понимает происхождение формул и увереннее применяет их в вычислениях, упрощениях и доказательствах.



ТИПОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ШКОЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

ПЕРЕХОД К КОРНЯМ

Выражения вида $1 - \cos x$ и $1 + \cos x$ удобно переписывать через синус или косинус половины угла. Это позволяет заменить тригонометрическую запись на точный корень и сделать выражение короче.

01

РАЦИОНАЛИЗАЦИЯ ДРОБЕЙ

Формула для $\operatorname{tg}(x/2)$ особенно полезна, когда нужно убрать сложный знаменатель или перейти к рациональной дроби. В результате уравнение становится проще для дальнейших алгебраических преобразований.

02

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ УГЛОВ

Для стандартных углов, например $\pi/3$, $\pi/2$ и $2\pi/3$, половинный угол дает точные значения без приближений. Это особенно важно в задачах, где требуется аккуратный ответ в радикалах.

03

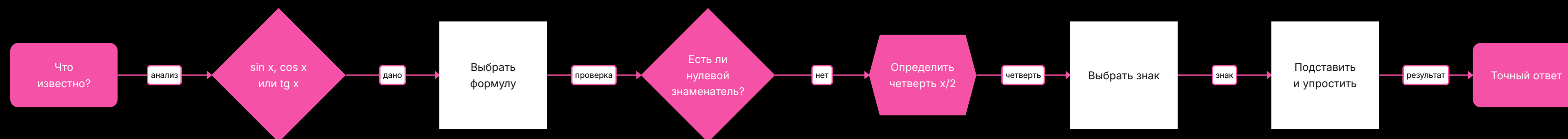
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВ

При доказательстве тождеств формулы половинного угла помогают свести несколько тригонометрических выражений к одной форме. После этого равенство проверяется значительно легче и короче.

04

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОЛОВИННЫЙ УГОЛ

Последовательность действий при вычислении, преобразовании выражений и решении уравнений



ЧАСТЫЕ ОШИБКИ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ ФОРМУЛ

ЗНАК БЕЗ ПРОВЕРКИ

Нельзя автоматически ставить знак «плюс» в корне. Для $\sin(x/2)$ и $\cos(x/2)$ знак выбирают только после определения четверти, в которой находится именно половина угла.

ПУТАЮТ x И $x/2$

Иногда знак определяют по самому углу x , хотя он может лежать в другой четверти. Важно анализировать не исходный угол, а положение угла $x/2$ на координатной плоскости.

ИГНОРИРУЮТ НУЛЕВОЙ ЗНАМЕНАТЕЛЬ

Формулу $\operatorname{tg}(x/2)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ нельзя применять при $\cos x=-1$. В этом случае знаменатель обращается в ноль, и запись теряет смысл.

НЕ ПРОВЕРЯЮТ ЧЕТВЕРТЬ

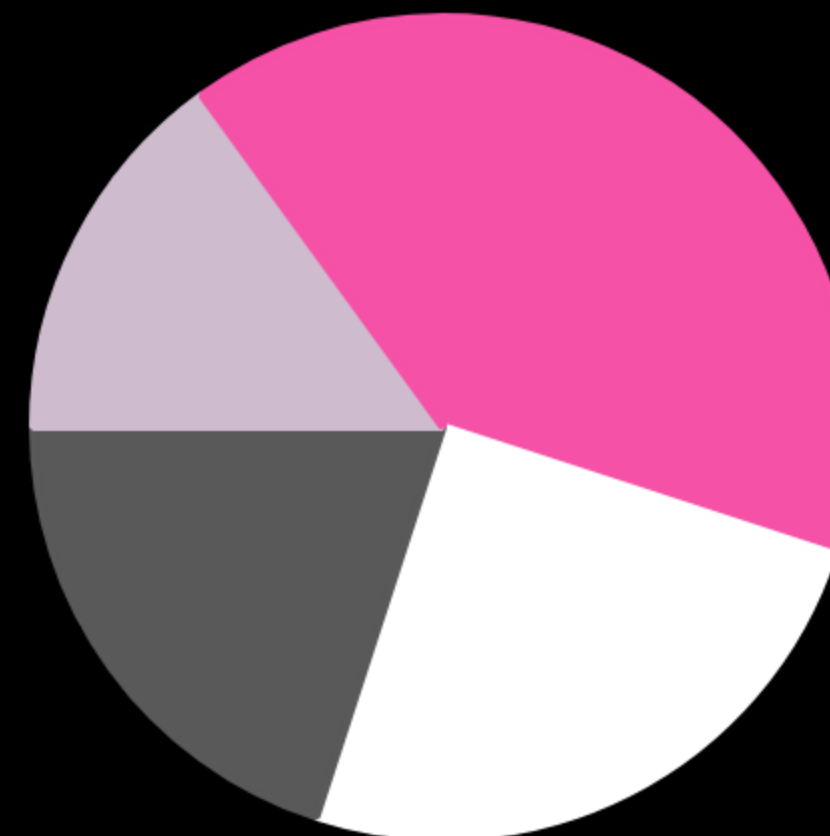
Даже при известном точном корне нужно убедиться, что он согласуется с положением угла. Без этой проверки легко получить формально верный, но неверный по знаку ответ.

ГДЕ ИСПОЛЬЗУЮТСЯ ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО УГЛА

Круговая диаграмма отражает типичные учебные ситуации, в которых приходится переходить от полного угла к половине угла и обратно.

Наибольшая нагрузка приходится на упрощение выражений и уравнения: именно там формулы половинного угла дают самый заметный выигрыш в компактности записи.

■ Упрощение выражений
 ■ Решение уравнений
 ■ Вычисление точных значений
 ■ Доказательство тождеств
 ■ Преобразование дробей



Обобщение типовых заданий школьного курса алгебры и начал анализа, 11 класс



МИНИ-ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Примеры показывают, как формулы половинного угла дают точные значения без приближений.

Во всех примерах ответ выражается в радикалах или рациональных дробях, что подтверждает удобство формул для точных вычислений.

x	$\cos x$	$\sin(x/2)$	$\cos(x/2)$
$\pi/3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\pi/2$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$2\pi/3$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

ПРИМЕНЕНИЕ В АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ



АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Формулы половинного угла помогают заменять тригонометрические выражения корнями и дробями. Это особенно полезно, когда требуется упростить длинную запись без потери точности.



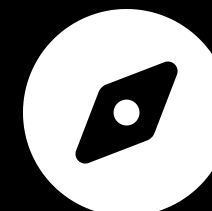
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В уравнениях формулы половинного угла переводят задачу в более удобную алгебраическую запись. Так легче выделить общие множители и найти точные решения.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВ

При проверке тождеств половинный угол часто позволяет свести обе части к одной и той же форме. После этого равенство становится прозрачным и легко проверяется.



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

В задачах на треугольники, окружность и многоугольники эти формулы связывают углы с точными значениями функций. Это делает вычисления аккуратными и избавляет от приближений.

КАК БЫСТРО ЗАПОМНИТЬ ТРИ ФОРМУЛЫ



СНАЧАЛА СМОТРИ НА $\cos x$

Если в задаче уже известен косинус полного угла, это самый надежный ориентир. Из него легко понять, какую формулу использовать дальше: для синуса половины угла появляется выражение $1 - \cos x$, а для косинуса — $1 + \cos x$. Такой подход помогает не путаться в записи.



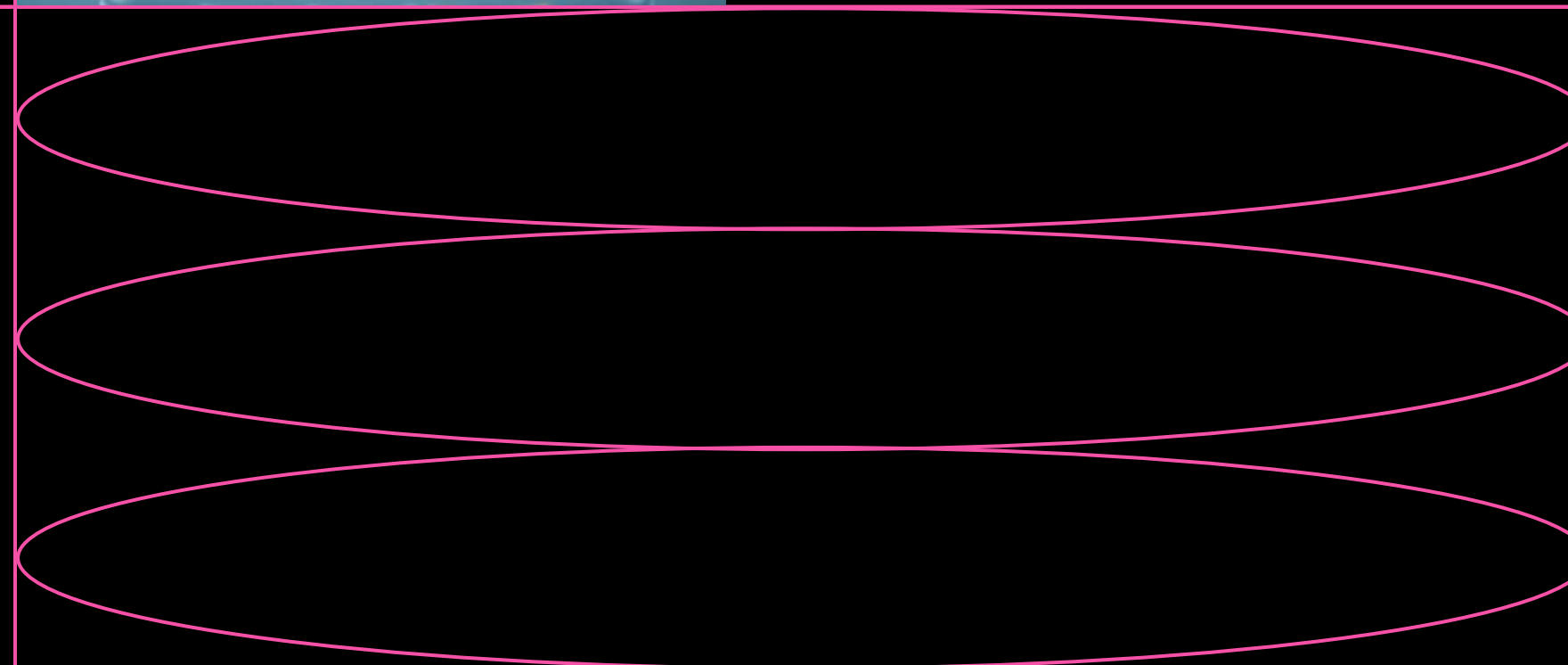
ТАНГЕНС КАК ДРОБНАЯ РАЗВЯЗКА

Когда требуется $\operatorname{tg}(x/2)$, удобно мысленно перейти к дроби через $\sin x$ и $\cos x$. В одной записи остаются только известные функции полного угла, поэтому формула хорошо работает в преобразованиях и сокращает путь к ответу. Ее особенно полезно помнить как рациональную форму.

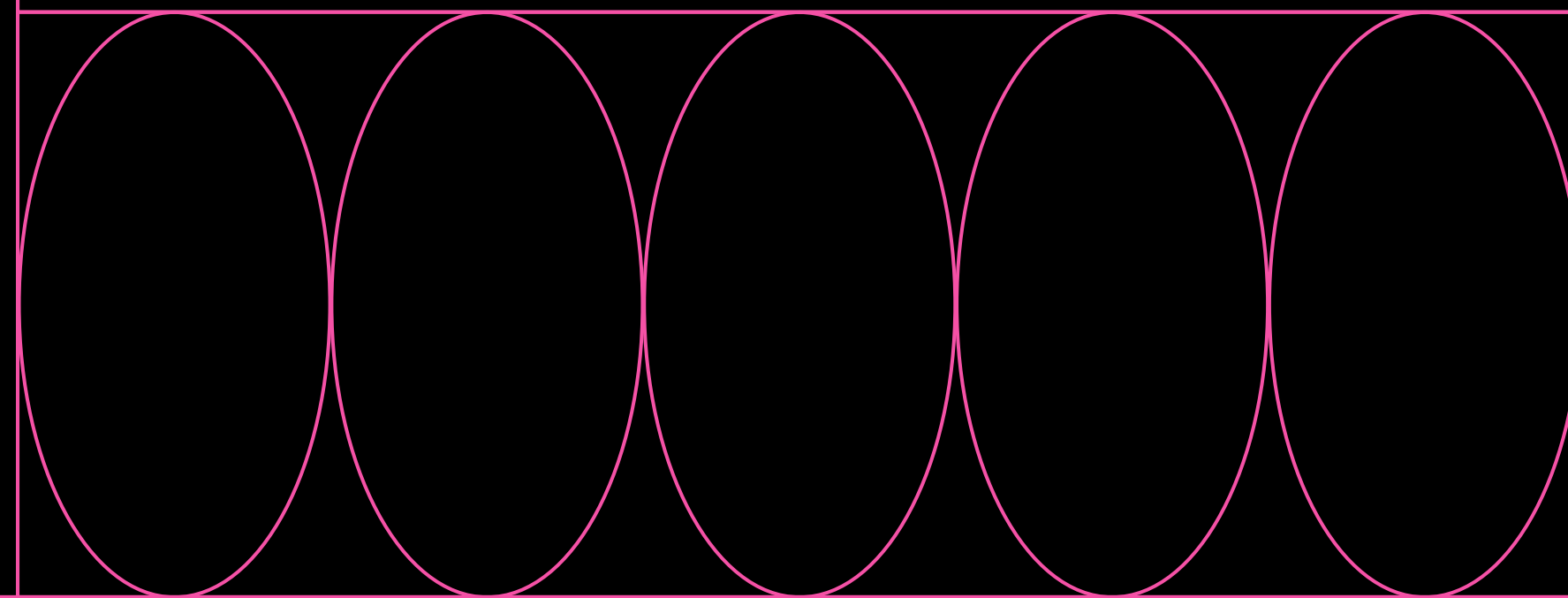


ОДНА СИСТЕМА, А НЕ ТРИ ПРАВИЛА

Все формулы половинного угла связаны одной идеей: исходной точкой служит полный угол x . Если удерживать эту связь в памяти, легче восстановить любую формулу даже без механического заучивания. Тогда тригонометрия воспринимается как единая логичная система, а не набор отдельных исключений.



ФОРМУЛЫ, КОТОРЫЕ СВЯЗЫВАЮТ УГОЛ И ЕГО ПОЛОВИНУ



Формулы $\sin(x/2)$, $\cos(x/2)$ и $\operatorname{tg}(x/2)$ делают тригонометрию 11 класса точной и удобной: они выводятся из известных тождеств, дают аккуратные ответы и требуют внимательного выбора знака и области допустимых значений.