

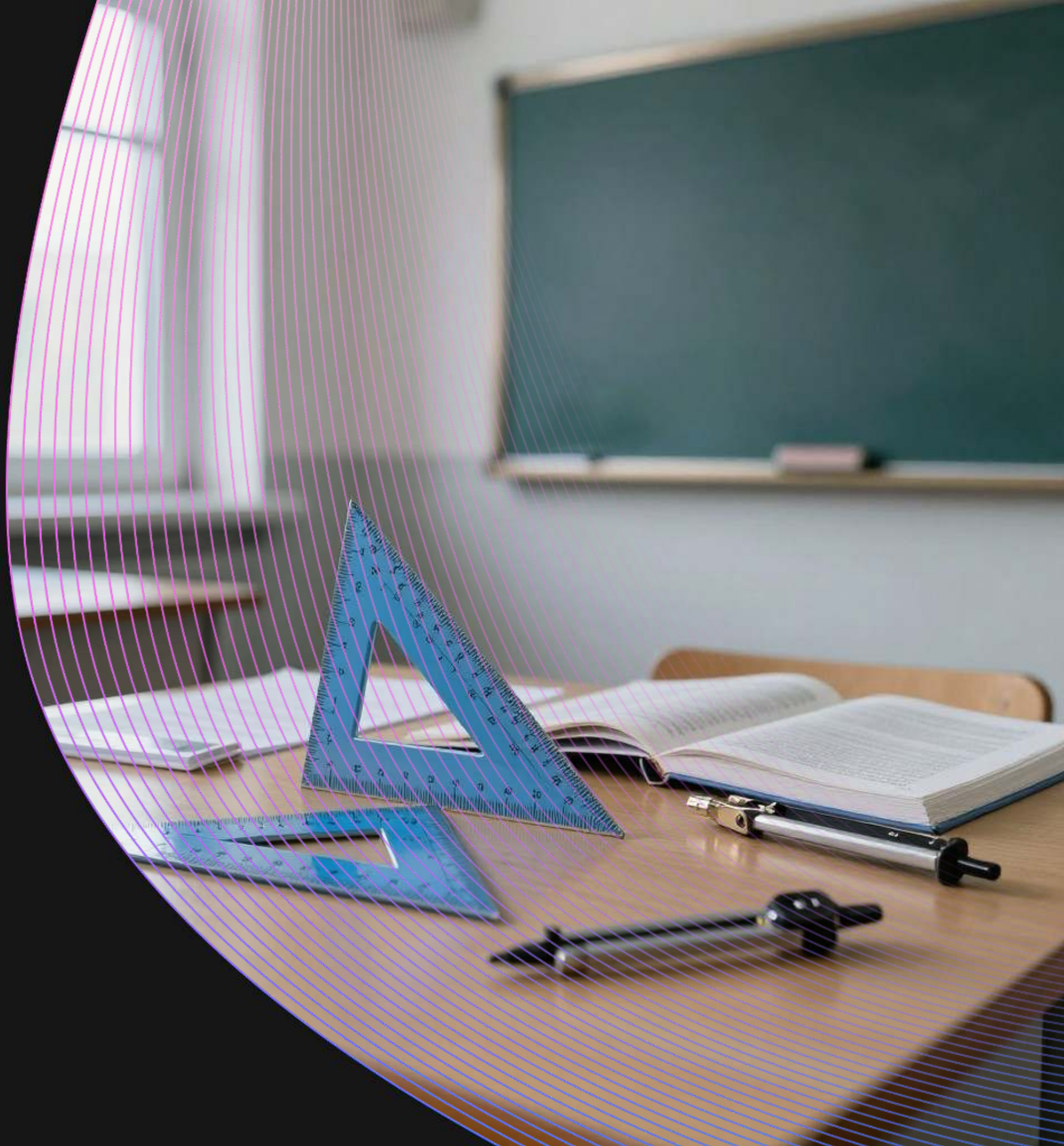
Треугольники: стороны, углы и формулы

Стороны, углы и формулы, которые
связывают их в одном треугольнике.



Зачем нужны эти формулы

Если известны хотя бы несколько элементов треугольника, можно вычислить остальные без перебора. Для этого используют тригонометрию, теорему синусов, теорему косинусов и формулу площади.





3

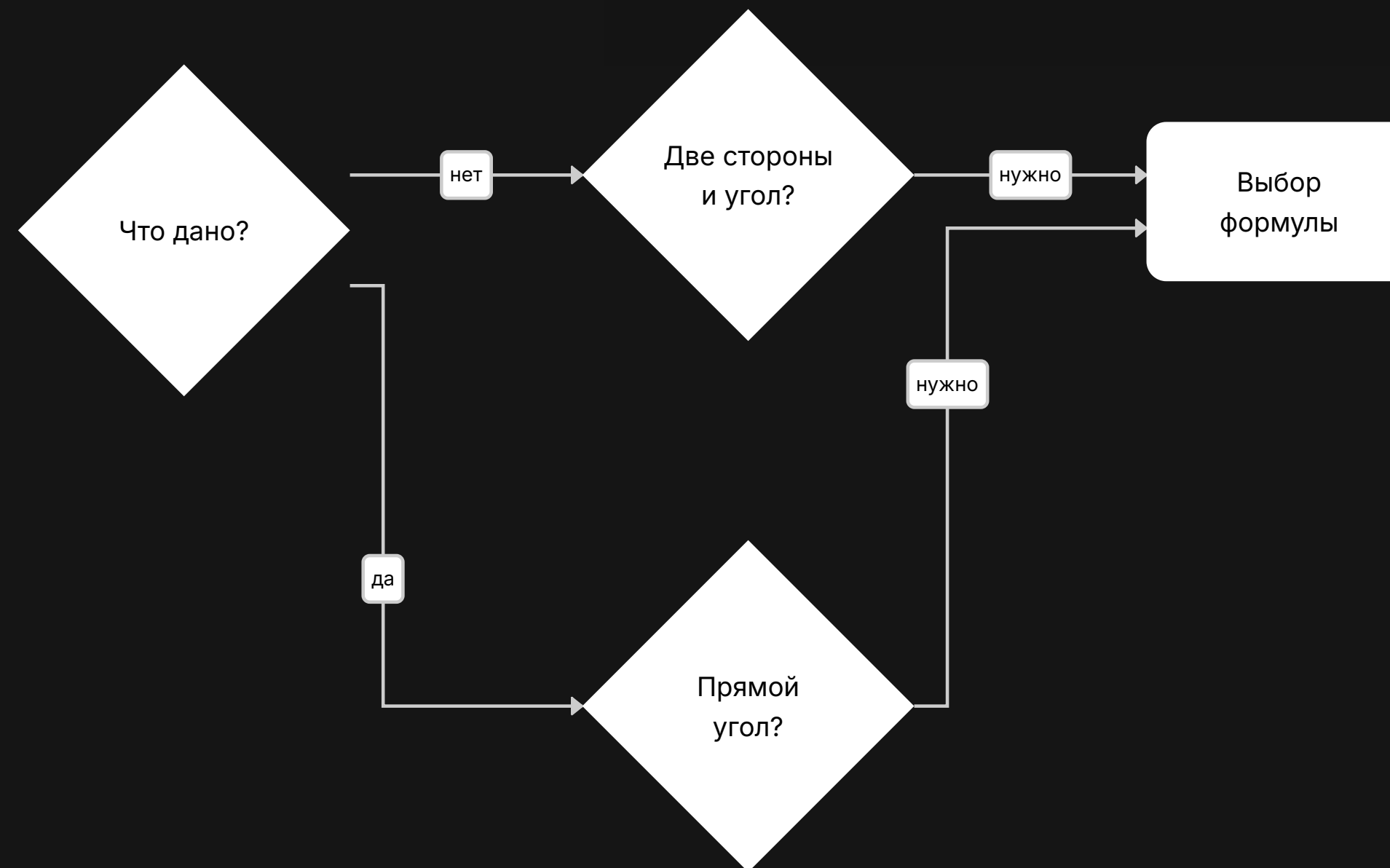
это число соответствует
сторонам и углам
треугольника, которые
обозначают одинаковыми
буквами.

3 пары обозначений
помогают не путаться:
сторона и противолежащий
ей угол всегда связаны.

Правило обозначений в геометрии

Какая формула нужна в задаче

Выбор зависит от известных элементов треугольника и типа задачи.



$\sin$, $\cos$ и $\tg$ в прямоугольном треугольнике

Синус

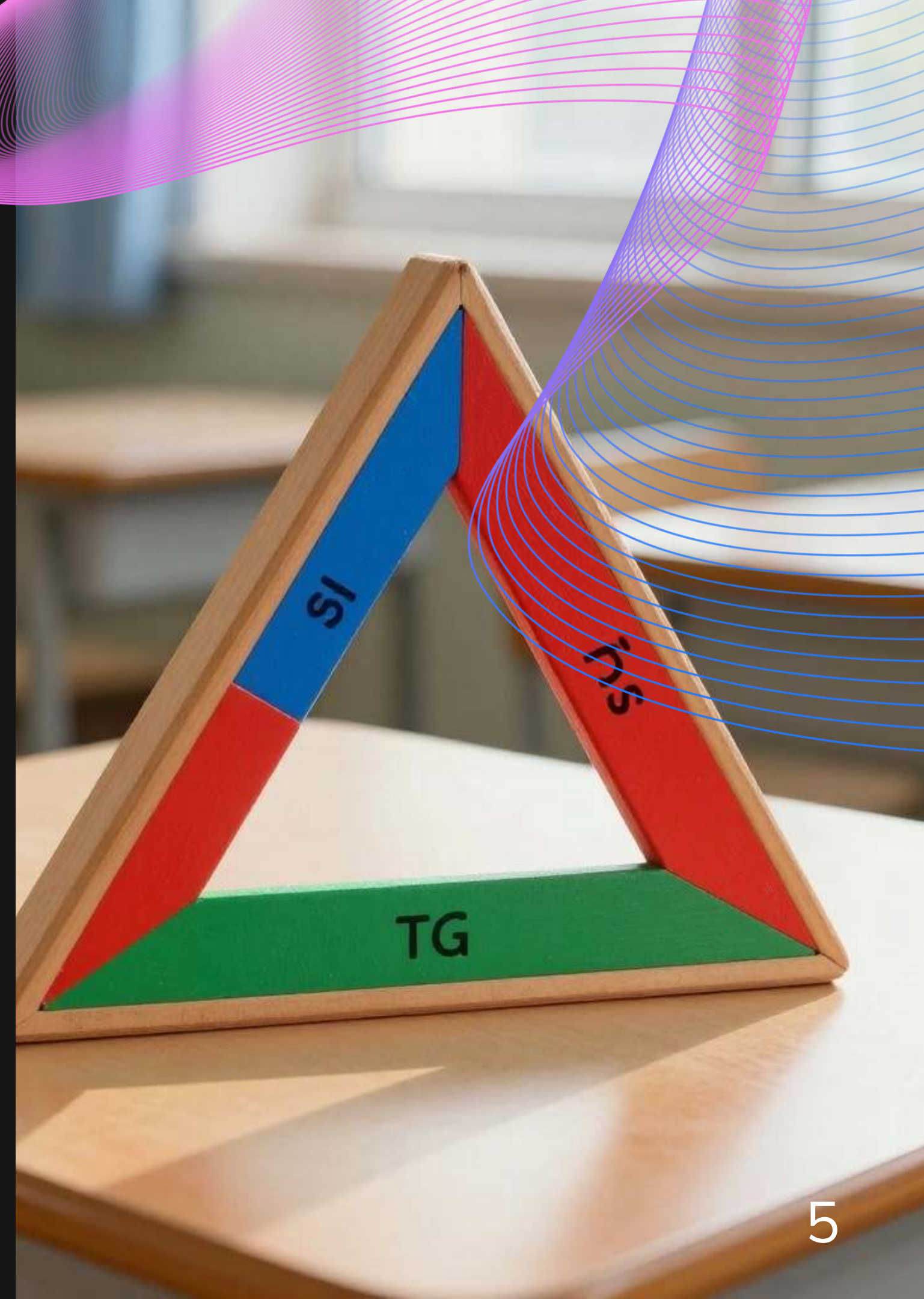
В прямоугольном треугольнике синус показывает, насколько велик противолежащий катет по сравнению с гипотенузой. Это удобно, когда известны угол и гипотенуза, а нужно найти сторону.

Косинус

Косинус связывает угол с прилежащим катетом и гипотенузой. Он помогает быстро вычислять длину стороны, которая лежит рядом с данным углом.

Тангенс

Тангенс сравнивает противолежащий и прилежащий катеты. Его используют, когда в задаче не дана гипотенуза, но известен один острый угол.





10 CM

это длина гипотенузы,
от которой сразу
можно найти оба
катета.

При гипотенузе 10 см и угле
 30° катеты находятся за одну
подстановку в формулы
синуса и косинуса.

Условие примера

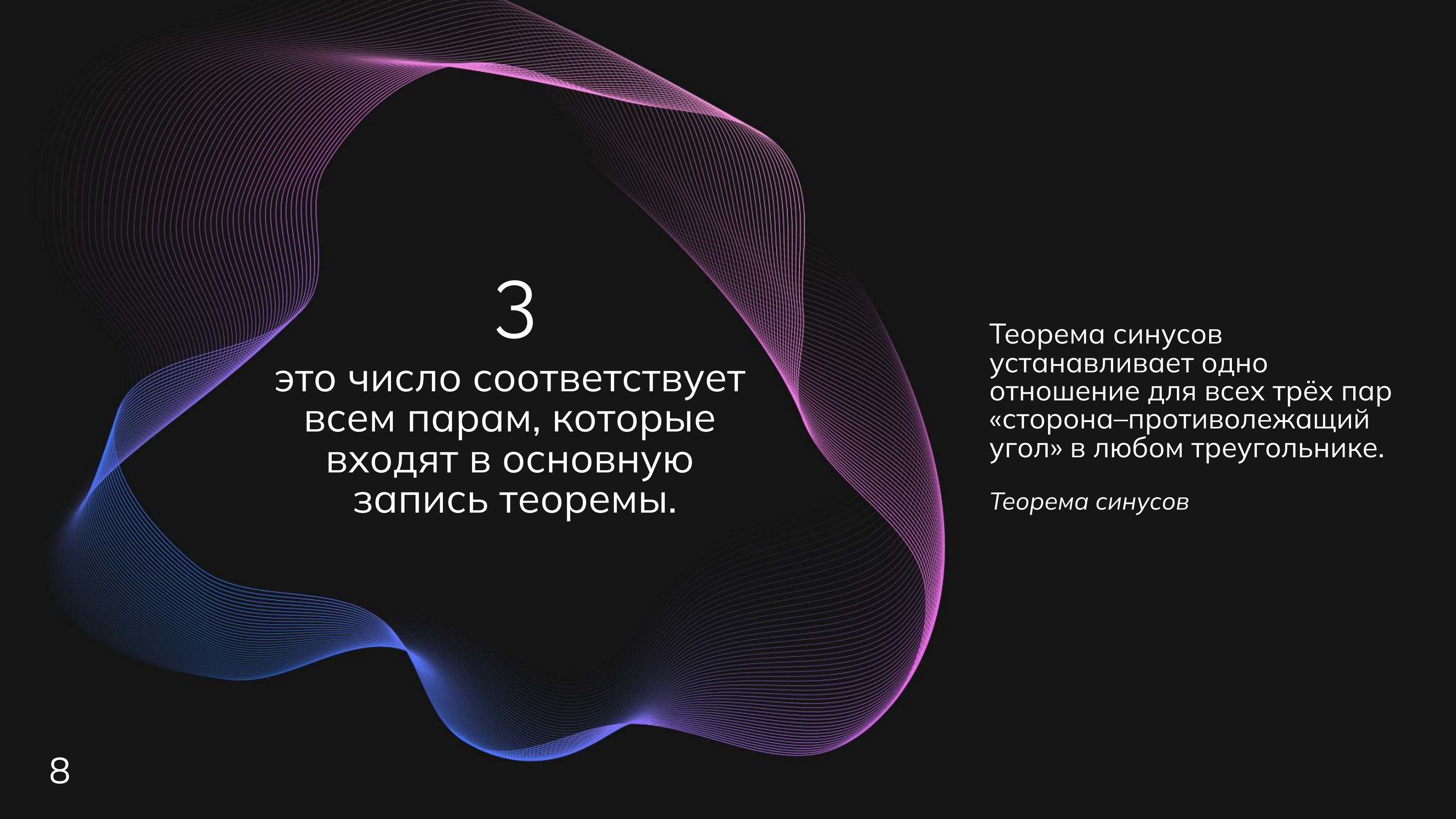


2

стороны достаточно,
чтобы восстановить
острый угол
в прямоугольном
треугольнике.

Если известны две стороны,
угол находят через обратные
тригонометрические
функции и затем проверяют
по калькулятору или таблице
значений.

*Свойства прямоугольного
треугольника*



3

ЭТО ЧИСЛО СООТВЕТСТВУЕТ
ВСЕМ ПАРАМ, КОТОРЫЕ
ВХОДЯТ В ОСНОВНУЮ
ЗАПИСЬ ТЕОРЕМЫ.

Теорема синусов
устанавливает одно
отношение для всех трёх пар
«сторона–противолежащий
угол» в любом треугольнике.

Теорема синусов

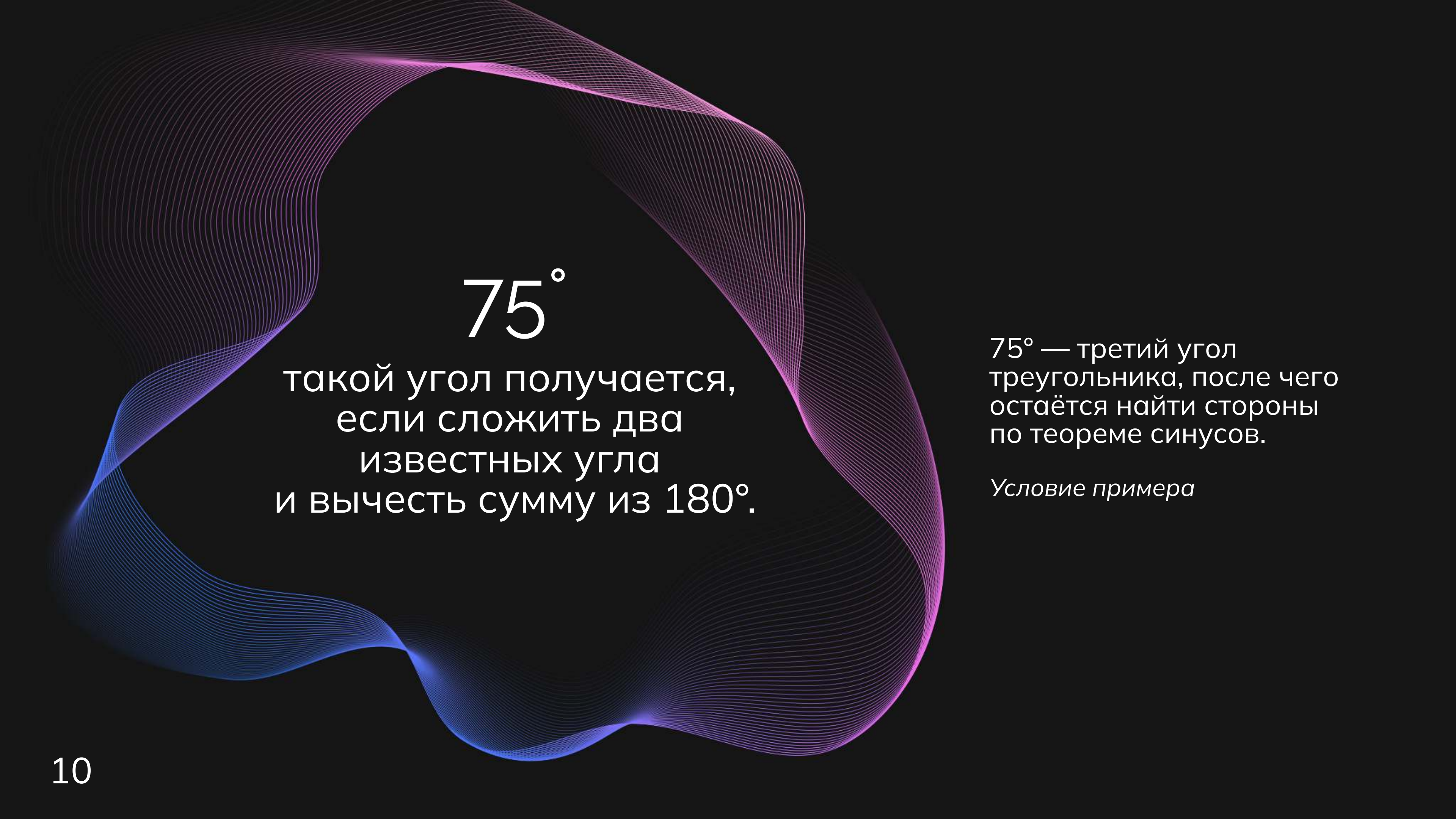
Когда применять теорему синусов

- Таблица показывает, в каких случаях теорема синусов помогает быстрее всего.

Главный ориентир — найти противоположные пары и проверить, хватает ли данных для пропорции.

Теорема синусов

Дано	Находим
2 угла + 1 сторона	остальные стороны
2 стороны + 1 угол	угол

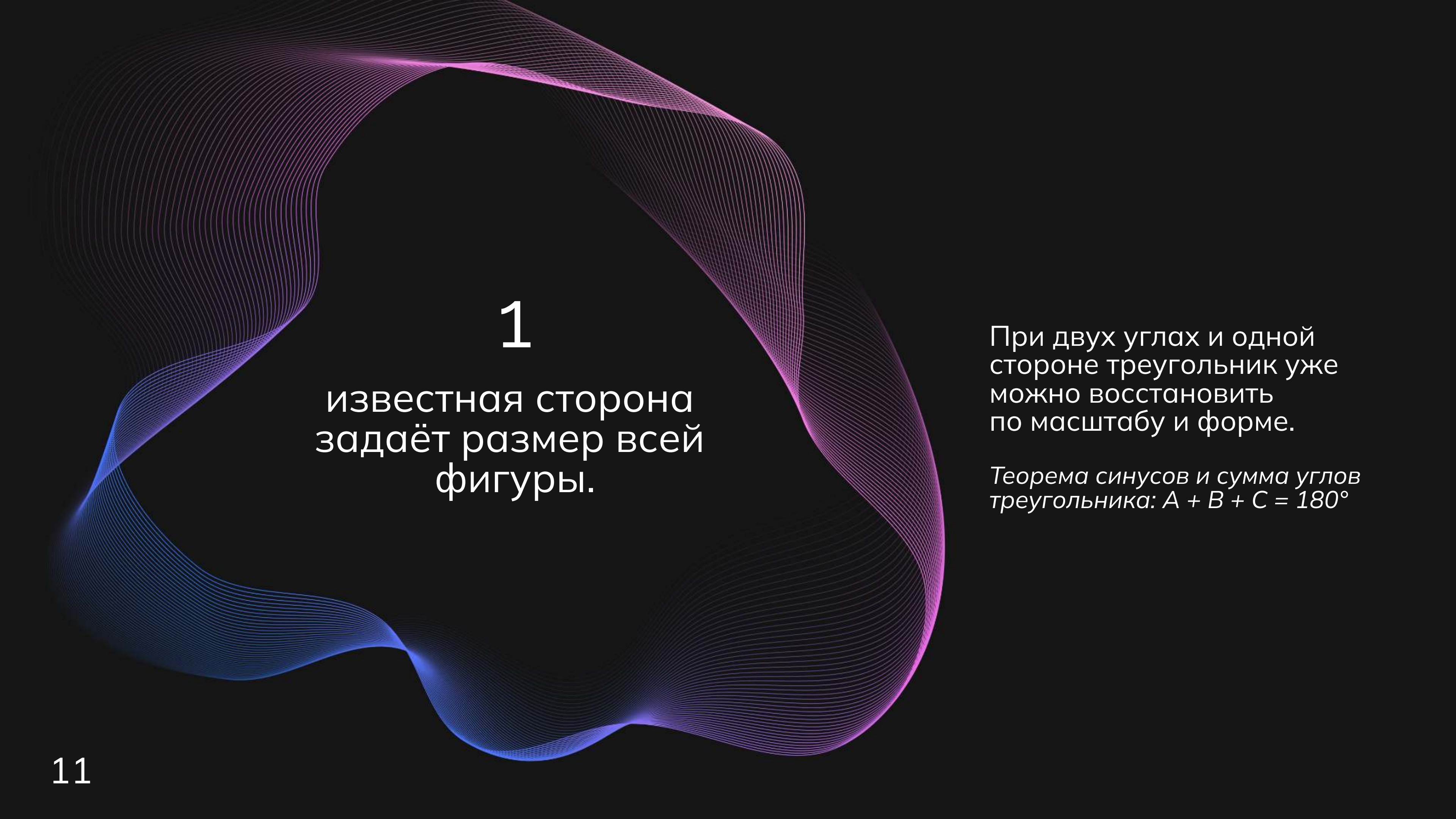


75°

такой угол получается,
если сложить два
известных угла
и вычесть сумму из 180° .

75° — третий угол
треугольника, после чего
остаётся найти стороны
по теореме синусов.

Условие примера

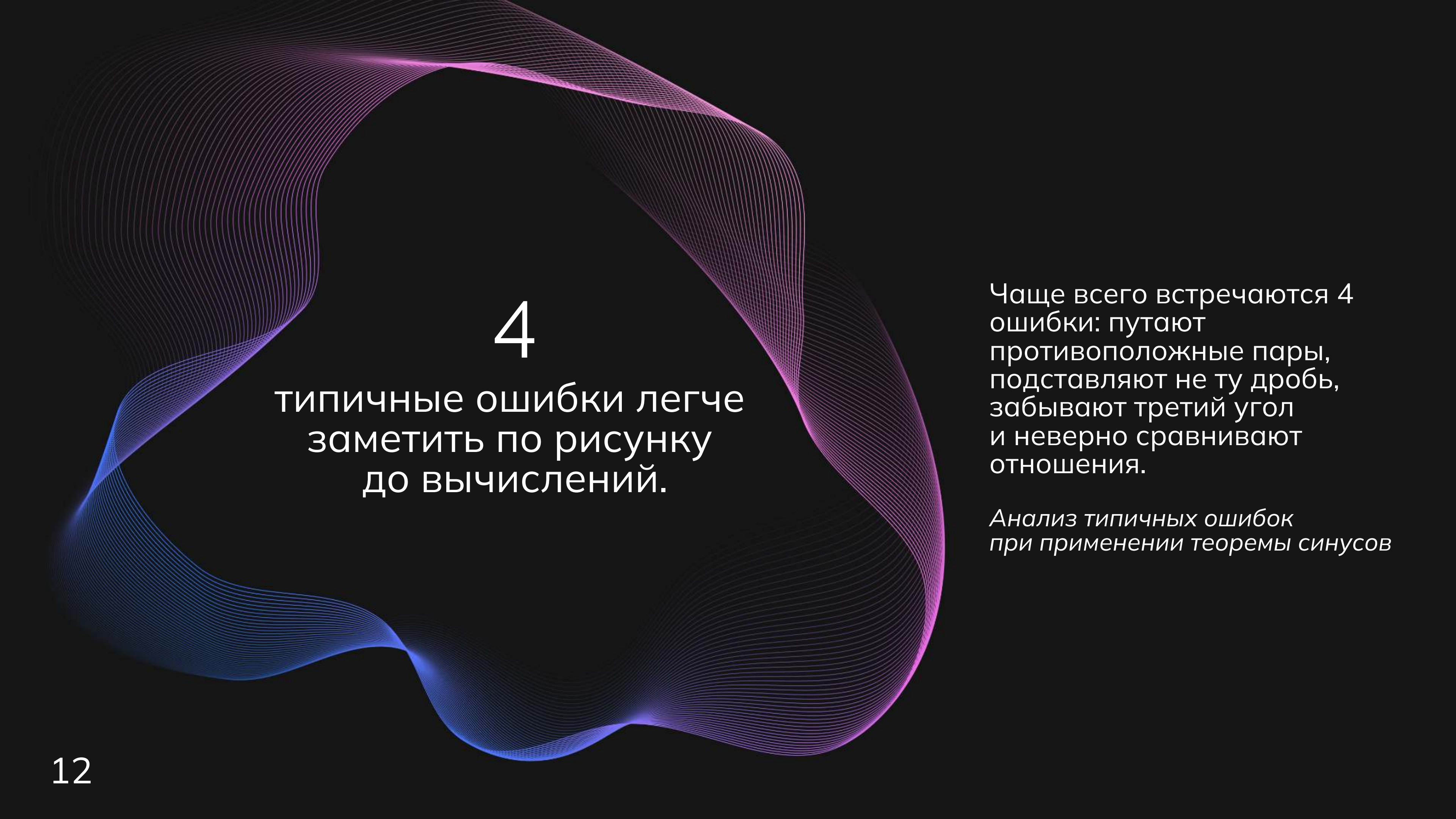


1

известная сторона
задаёт размер всей
фигуры.

При двух углах и одной
стороне треугольник уже
можно восстановить
по масштабу и форме.

*Теорема синусов и сумма углов
треугольника: $A + B + C = 180^\circ$*



4

типичные ошибки легче
заметить по рисунку
до вычислений.

Чаще всего встречаются 4
ошибки: путают
противоположные пары,
подставляют не ту дробь,
забывают третий угол
и неверно сравнивают
отношения.

*Анализ типичных ошибок
при применении теоремы синусов*



1

универсальная запись
теоремы косинусов
помогает находить
сторону в любом
треугольнике.

Одна формула связывает все
три стороны с углом между
ними и работает даже
без прямого угла.

Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

Когда применять теорему косинусов

Дано	Использовать
2 стороны + угол	косинусы
сторона + противолежащий угол	синусы
нужна площадь	$\sin$

Сравните, какие данные известны: две стороны и угол между ними дают один путь, а сторона с противолежащим углом — другой.

Теорему косинусов выбирают, когда известны две стороны и угол между ними; она также помогает дальше перейти к другим формулам.

Правила применения теоремы косинусов и формулы площади



3

стороны достаточно,
чтобы восстановить
угол треугольника.

Если известны три стороны,
угол можно найти через
косинус, а затем вычислить
его величину с помощью
арккосинуса.

Формула $\cos C = (a^2 + b^2 - c^2) / (2ab)$

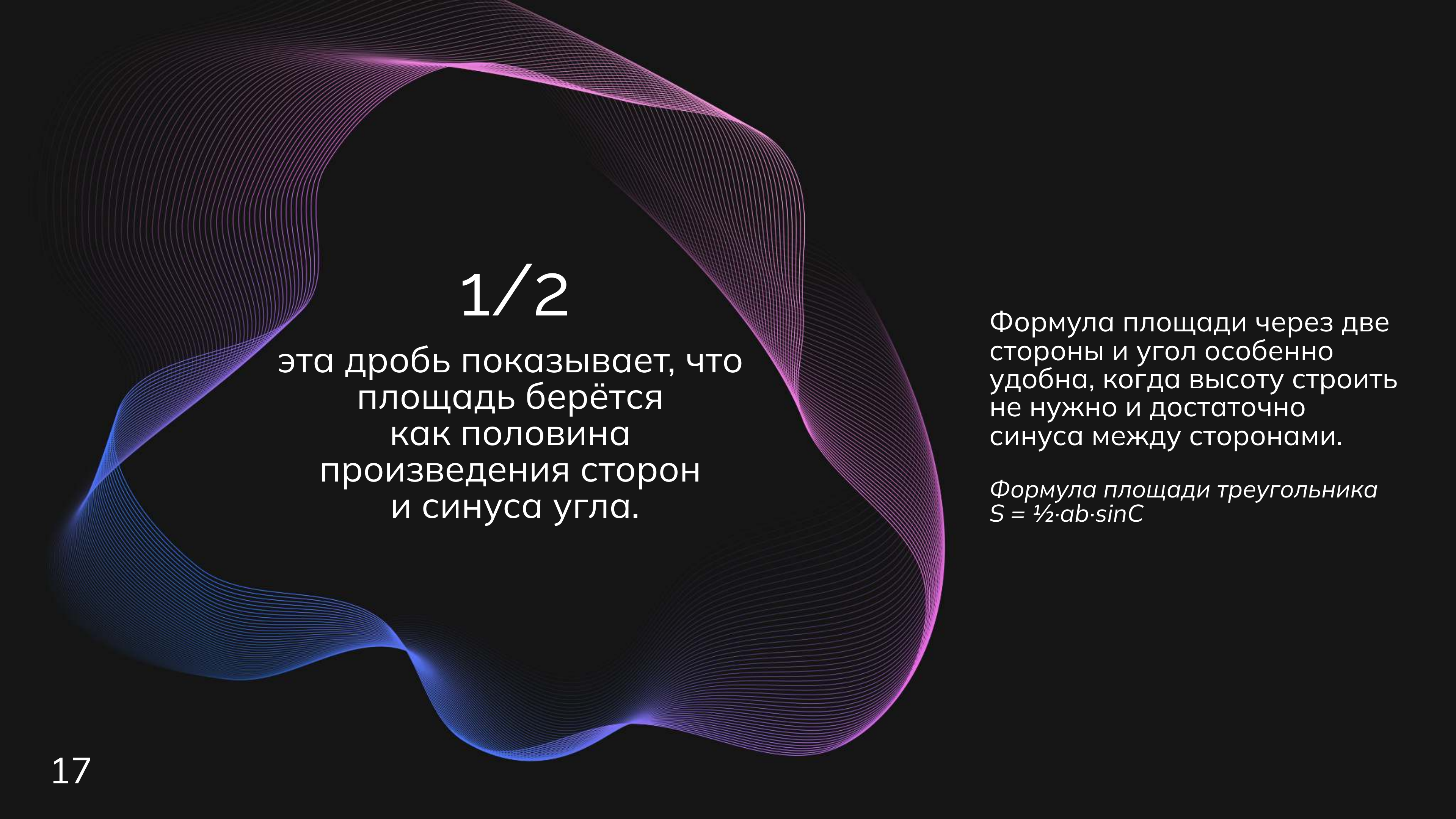


90°

такой результат
показывает связь
теоремы косинусов
с прямоугольным
треугольником.

В треугольнике со сторонами
6, 8 и 10 см получается $\cos C$
 $= 0$, значит угол C — прямой.

*Подстановка в формулу теоремы
косинусов для сторон 6 см, 8 см
и 10 см*


$$1/2$$

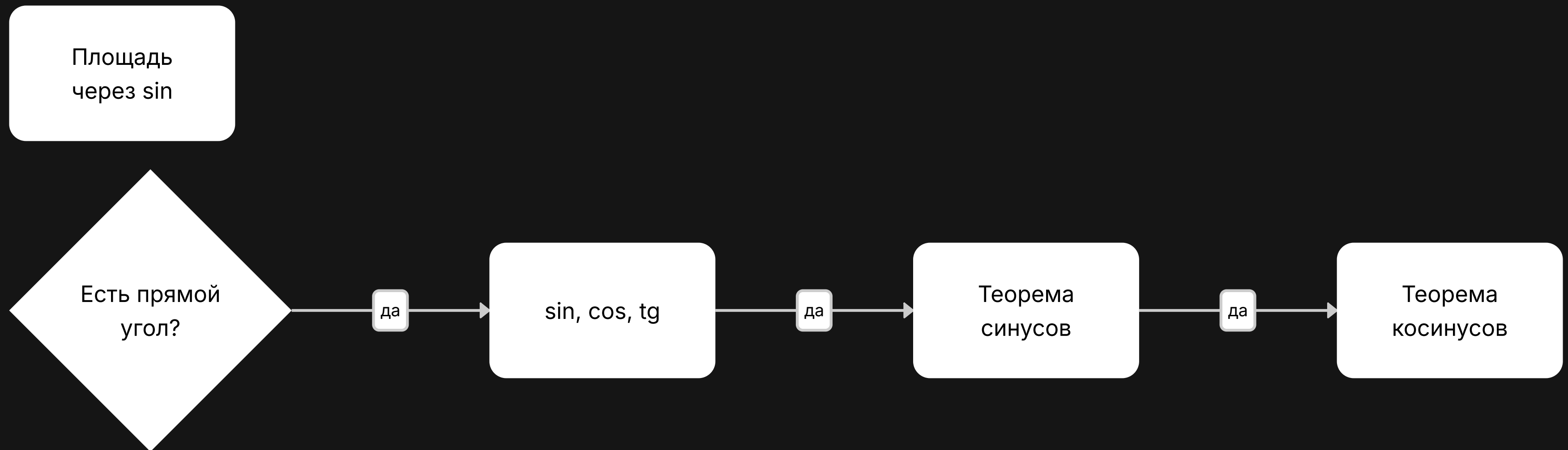
эта дробь показывает, что
площадь берётся
как половина
произведения сторон
и синуса угла.

Формула площади через две
стороны и угол особенно
удобна, когда высоту строить
не нужно и достаточно
синуса между сторонами.

Формула площади треугольника
 $S = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C$

Как выбрать формулу за 4 шага

Выбор формулы зависит от того, какие элементы треугольника уже известны.





3

такой набор помогает
закрепить все
основные случаи.

Попробуйте 3 задания
разного типа:
с прямоугольным
треугольником, с теоремой
синусов и с теоремой
косинусов вместе
с площадью.

*Учебные задания по теме
соотношений между сторонами
и углами треугольника*

Итоги: как выбирать формулу

Главное правило простое: сначала смотрят, что дано, потом выбирают нужную связь. Для прямоугольного треугольника подходят $\sin$, $\cos$ и tg ; для произвольного — теоремы синусов и косинусов, а также формула площади через $\sin$.