

Схема Бернулли в алгебре: как считать вероятность нескольких успехов

Как найти вероятность нескольких успехов в серии
одинаковых испытаний?



Зачем изучать схему Бернулли в 9 классе

Она показывает, как сочетания помогают считать вероятность не одного события, а целой серии одинаковых попыток: монет, тестов и попаданий в цель, если условия постоянны и исходов только два.



Условия применения схемы Бернулли

01

Одинаковые испытания

Все попытки должны проводиться в одинаковых условиях. Тогда каждое испытание можно сравнивать с предыдущим, а вероятность успеха остается одной и той же на протяжении всей серии.

02

Два исхода

В каждом испытании возможны только два результата: успех и неудача. Если исходов больше, например при броске кубика, схема Бернулли уже не подходит.

03

Постоянная вероятность

Вероятность успеха обозначают p , а вероятность неудачи — $q = 1 - p$. Эти значения не меняются от одного испытания к другому, иначе формула даст неверный результат.

04

Независимость попыток

Результат одного испытания не должен влиять на другое. Если прошлый исход меняет следующий, серия перестает быть независимой, и схема Бернулли применять нельзя.

Пример независимых испытаний: броски монеты

Постоянные шансы

При каждом броске монеты орел и решка появляются с одинаковой вероятностью $\frac{1}{2}$. Предыдущий результат не делает следующий более вероятным, поэтому условия остаются неизменными.

Серия попыток

Пять, десять или двадцать бросков — это одна и та же модель: много одинаковых независимых испытаний с двумя исходами. Именно такие задачи и решает схема Бернулли.



Наглядное изображение

Этот пример удобно показывать с помощью дерева исходов или цепочки одинаковых монет. Так легче увидеть, как из каждой попытки возникают два возможных пути.

Обозначения, используемые в формуле Бернулли

Основные обозначения помогают связать число испытаний, число успехов и вероятность события.

Обозначение	Значение
n	число испытаний
k	число успехов
p	вероятность успеха
q	вероятность неудачи
C_n^k	число сочетаний
$P_n(k)$	вероятность ровно k успехов

Формула Бернулли соединяет комбинаторику и вероятность: сначала считают способы, потом — вероятность каждого случая.

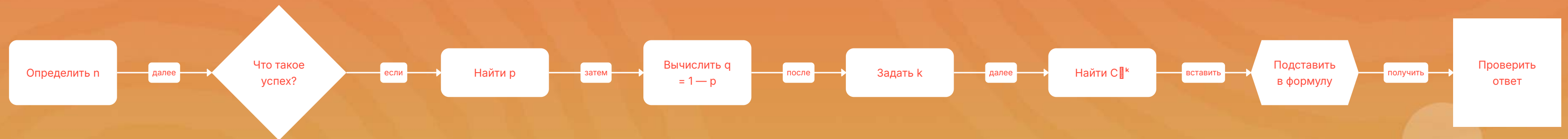
1

формула сразу дает точную вероятность нужного числа успехов в серии испытаний

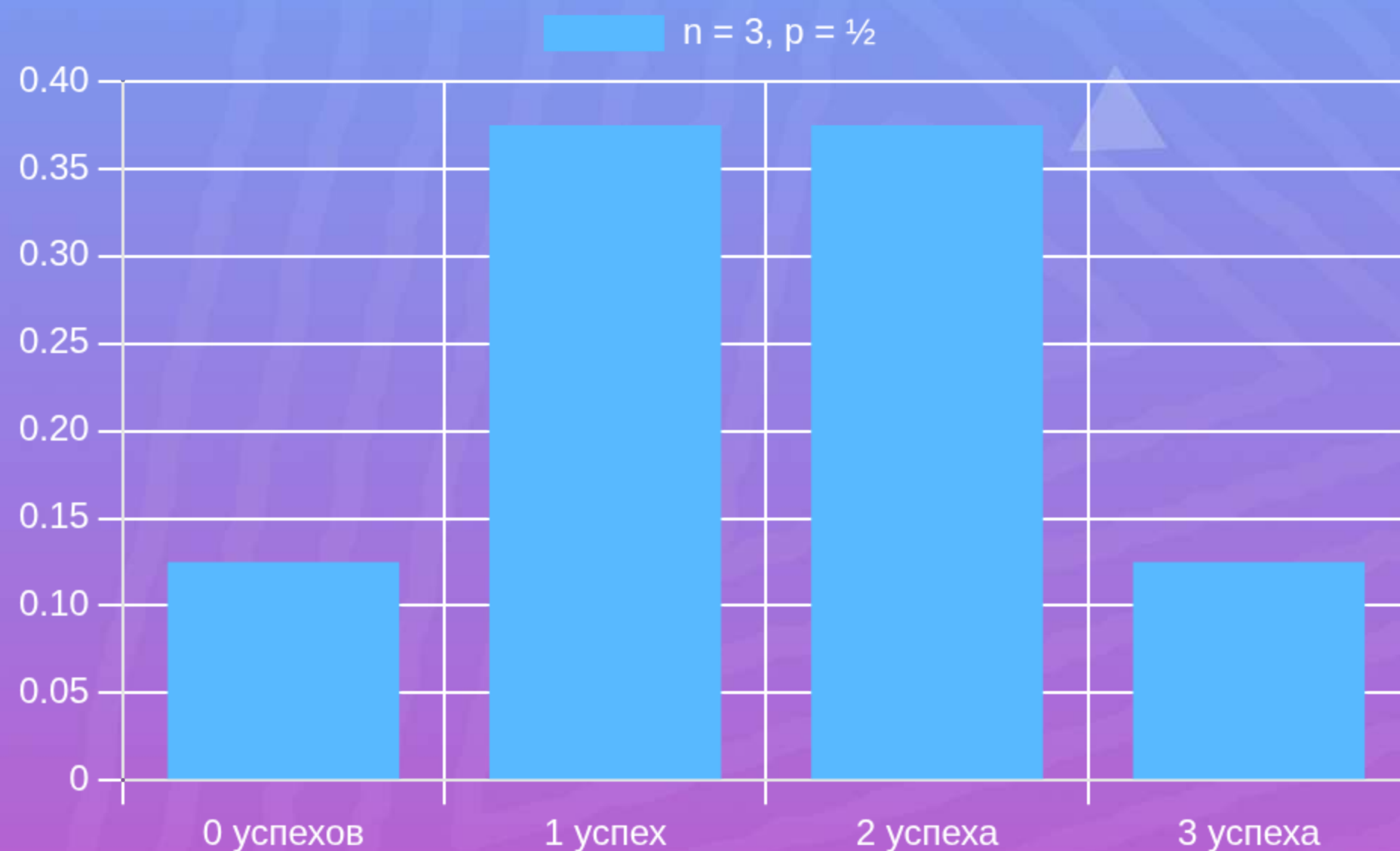
Это значение вычисляют по формуле $P(n, k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где учитываются все подходящие последовательности и их вероятности.

Алгоритм решения задач по схеме Бернулли

Последовательность действий при решении школьных задач на вероятности



Распределение вероятностей при трех бросках монеты



Расчет по формуле Бернулли при $n = 3, p = \frac{1}{2}$

При трех бросках симметрия распределения хорошо заметна: средние результаты встречаются чаще, чем крайние.

Наиболее вероятны 1 и 2 успеха; значения 0 и 3 успеха редки из-за меньшего числа подходящих последовательностей.

Пример вычисления: 4 броска монеты и 2 орла

01

Ставим данные

В задаче четыре броска монеты, а успехом считаем выпадение орла. Нужно найти вероятность того, что ровно два раза выпадет орел.

02

Записываем формулу

Используем $P_4(2) = C_4^2 \cdot (1/2)^2 \cdot (1/2)^2$. Здесь сочетания показывают, сколько разных последовательностей содержат ровно два орла.

03

Находим сочетание

Число C_4^2 равно 6, потому что два орла можно расположить в четырех бросках шестью способами. Это и есть число подходящих последовательностей.

04

Получаем ответ

Подставляем значения: $P_4(2) = 6 \cdot 1/16 = 6/16 = 3/8$. Значит, вероятность ровно двух орлов равна трем восьмым.

Почему вероятности складываются: все последовательности при 4 бросках

Все исходы

При четырех бросках монеты есть 16 равновозможных последовательностей. Каждая из них имеет одинаковую вероятность, поэтому можно рассматривать их как отдельные равные случаи.

Группа с двумя орлами

Последовательности с двумя орлами образуют одну большую группу. Их не одна, а несколько, и каждая добавляет свою вероятность к общей сумме события.



Смысл сложения

Итоговая вероятность получается сложением вероятностей всех подходящих последовательностей. Именно поэтому формула Бернулли включает сочетания: они считают число таких равных вариантов.

Что происходит с распределением при росте числа испытаний



Центр становится заметнее

Когда испытаний больше, вероятности сильнее сосредотачиваются возле наиболее типичного числа успехов. На графике это выглядит как более выраженный «пик» в средней части распределения.



Средние значения выгоднее

Если вероятность успеха близка к $\frac{1}{2}$, самые вероятные результаты оказываются рядом с половиной числа испытаний. Именно эти значения чаще всего дают наибольшие столбцы.



Крайние случаи редки

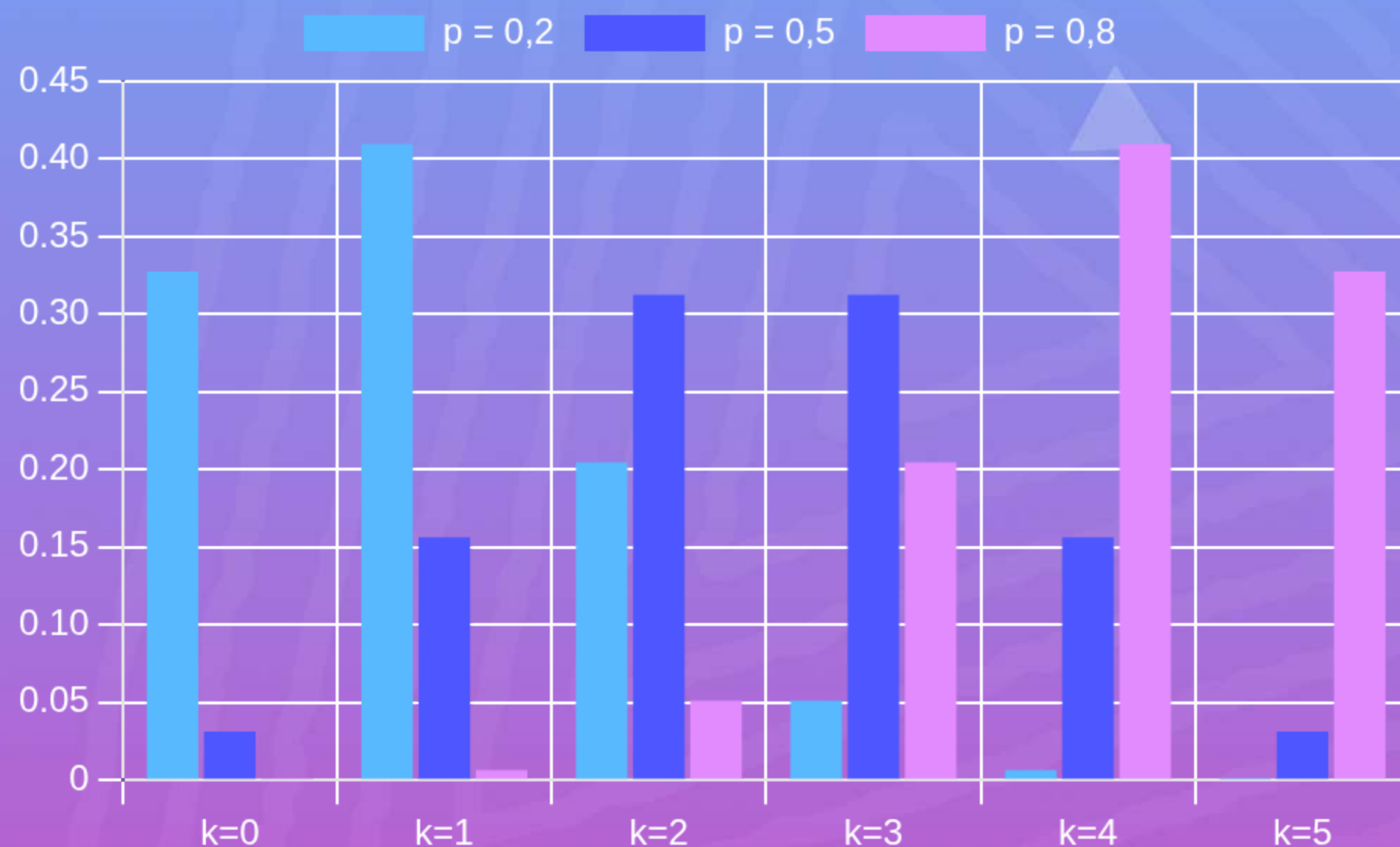
Чем дальше число успехов от середины, тем меньше вероятность такого исхода. Поэтому события вроде «все успехи» или «все неудачи» встречаются особенно редко.



Распределение выравнивается

При большом n форма распределения становится более устойчивой и понятной: основная масса вероятностей собирается вокруг центра, а по краям остаются маленькие значения.

Как влияет вероятность одного испытания p



Расчёт по формуле Бернулли для $n = 5$

При одном и том же числе испытаний форма распределения заметно меняется: с ростом p столбцы смещаются вправо, а с уменьшением — влево.

Вероятность одного успеха определяет, где сосредоточится основная масса исходов: слева, по центру или справа.

Типичные ошибки в задачах на схему Бернулли

Ошибка	Как выглядит	Что проверить
Ровно / не менее	Путают событие	Формулировку
Не найдено q	Забывают 1-p	Вероятность неудачи
Сложная комбинаторика	Ошибки в C_n^k	Число мест

Частые ошибки связаны не только с вычислениями, но и с неверным чтением условия. Перед подстановкой в формулу важно проверить тип события и параметры задачи.

Если сначала проверить условия и событие, большинство ошибок исчезает ещё до вычислений.

Где схема Бернулли встречается в жизни и задачах



Контроль качества

На производстве удобно считать, сколько изделий окажется с браком, а сколько — без него. Каждый новый предмет можно рассматривать как отдельную попытку с двумя исходами.



Спортивные серии

В спорте модель помогает оценивать серию попаданий и промахов, например в штрафных ударах или бросках. Здесь важно, что условия повторяются, а каждый результат рассматривается отдельно.



Тестовые задания

В школьных тестах каждый вопрос часто сводится к двум вариантам: ответ верный или неверный. Поэтому такие задачи удобно решать через схему Бернулли и сочетания.

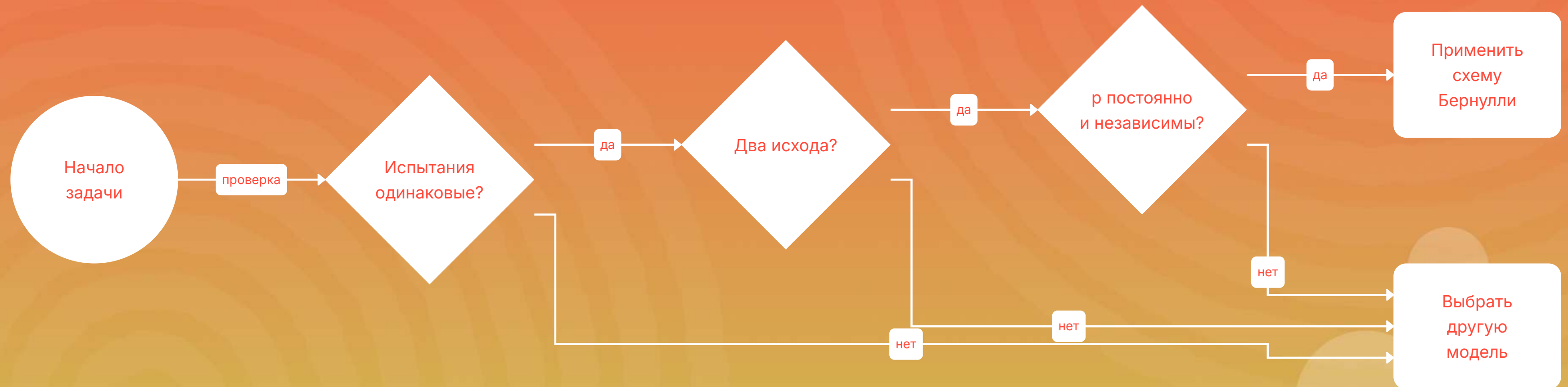


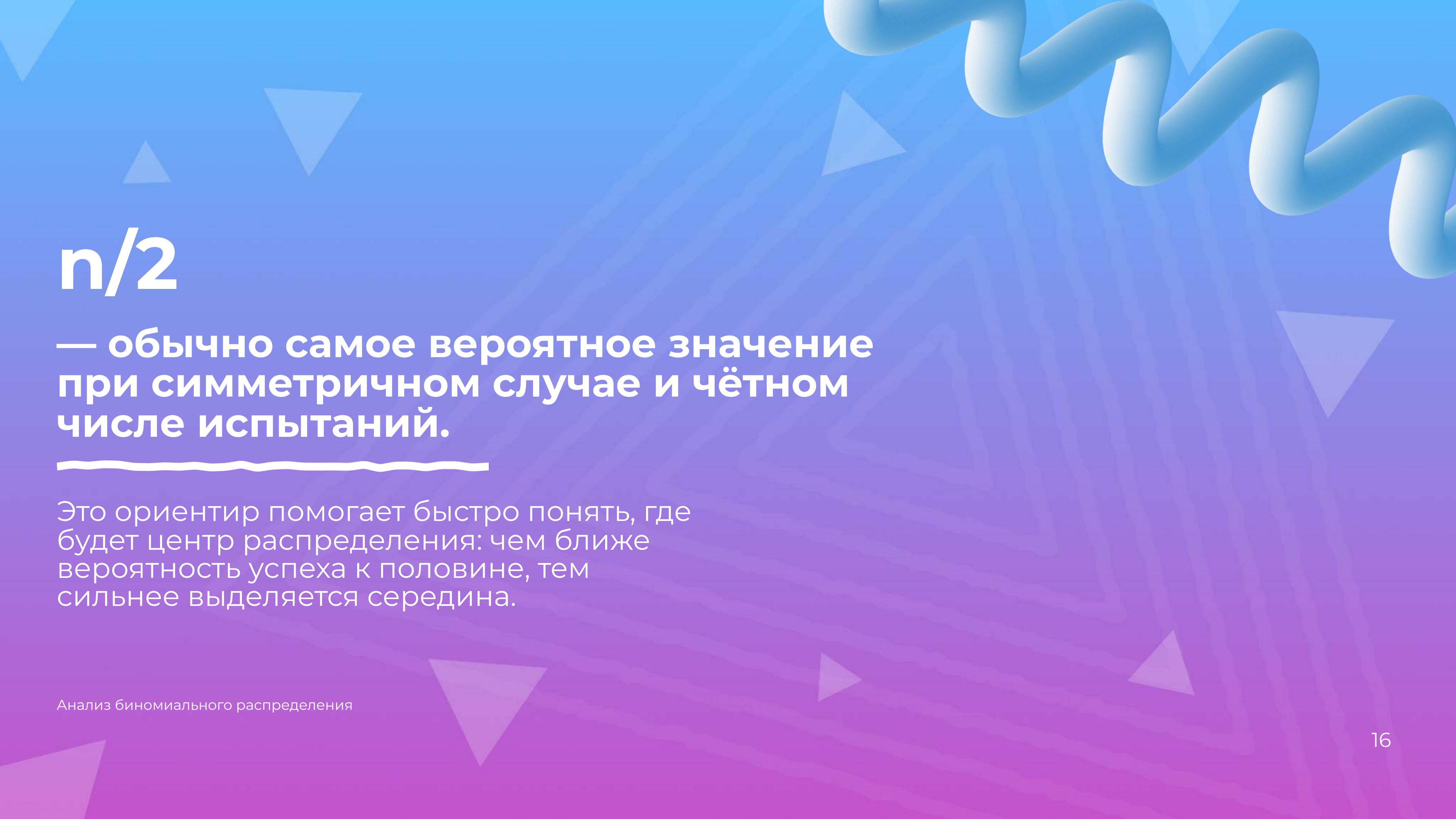
Игры и монеты

Монеты, кубики и простые игры с одинаковыми правилами наглядно показывают независимые испытания. Именно на таких примерах легче всего увидеть, как работает формула вероятности.

Как проверить, подходит ли схема Бернулли

Последовательность проверки условий перед выбором формулы вероятности



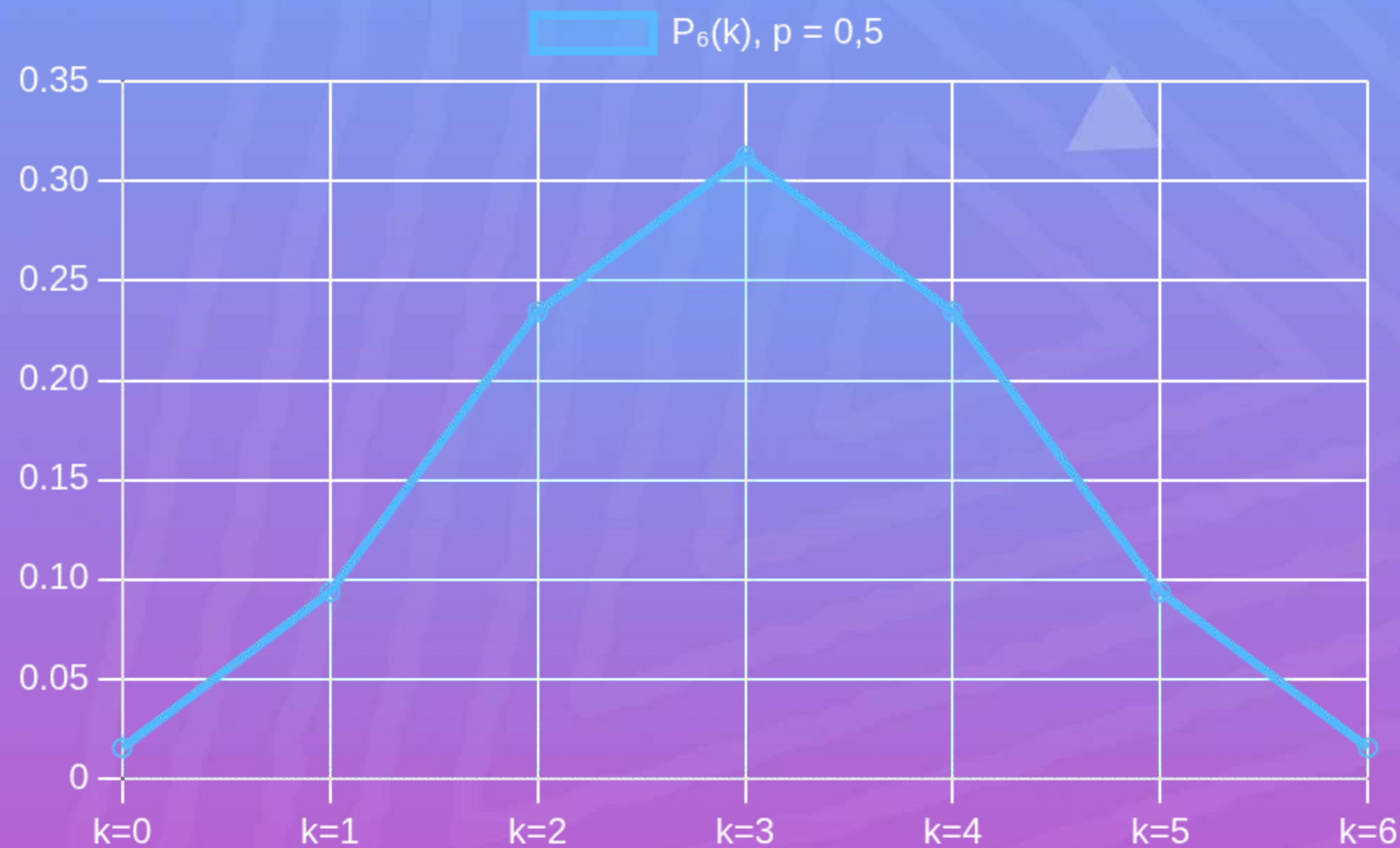


$n/2$

— обычно самое вероятное значение при симметричном случае и чётном числе испытаний.

Это ориентир помогает быстро понять, где будет центр распределения: чем ближе вероятность успеха к половине, тем сильнее выделяется середина.

Биномиальное распределение как результат схемы Бернулли



Каждое значение k получает свою вероятность, но все они вместе образуют одно распределение для заданных n и p .

Сумма вероятностей равна 1, а самые большие значения сосредоточены около середины распределения.

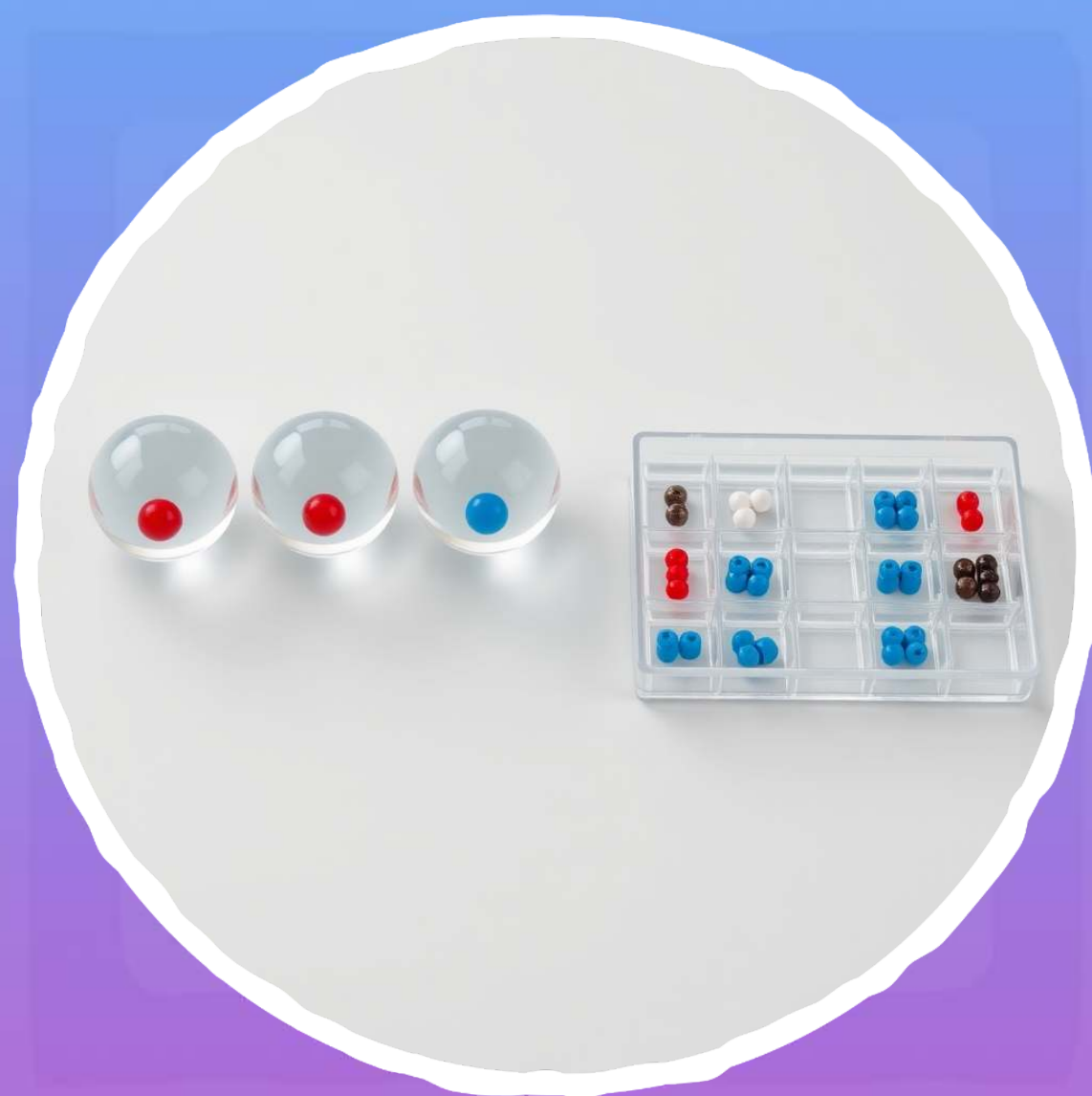
Почему сочетания так важны в формуле

Выбор мест

Число C_n^k показывает, сколькими способами можно разместить успехи среди n испытаний. Разные последовательности с одинаковым количеством успехов считаются отдельно, поэтому их нужно пересчитать.

Одна вероятность — много случаев

Если один и тот же исход можно получить несколькими способами, вероятности этих способов складываются. Именно поэтому сочетания входят в формулу Бернулли вместе со степенями p и q .



Пример на 5 ИСПЫТАНИЯХ

При пяти попытках и двух успехах число сочетаний равно $C_5^2 = 10$. Значит, одна и та же вероятность относится сразу к десяти разным последовательностям результатов.

Как выглядит дерево исходов в маленьких задачах

Три броска — восемь концов

Если бросить монету три раза, каждая развилка дерева показывает успех или неудачу. В конце получится 8 последовательностей, потому что на каждом шаге есть два варианта, а всего шагов три. На таком рисунке легко увидеть, почему появляются степени двойки и откуда берутся сочетания.



Четыре шага, один рисунок

При четырёх испытаниях дерево становится шире, но остаётся очень наглядным. По нему удобно считать, сколько путей ведёт к нужному числу успехов, и замечать, что многие последовательности имеют одинаковое число успехов. Это помогает понять смысл формулы Бернулли без длинных вычислений.



Схема Бернулли помогает считать повторяющиеся случайные события

Она связывает алгебру, комбинаторику и вероятность в одной формуле. Если испытания одинаковы, независимы и имеют два исхода, можно точно найти вероятность нужного числа успехов.