

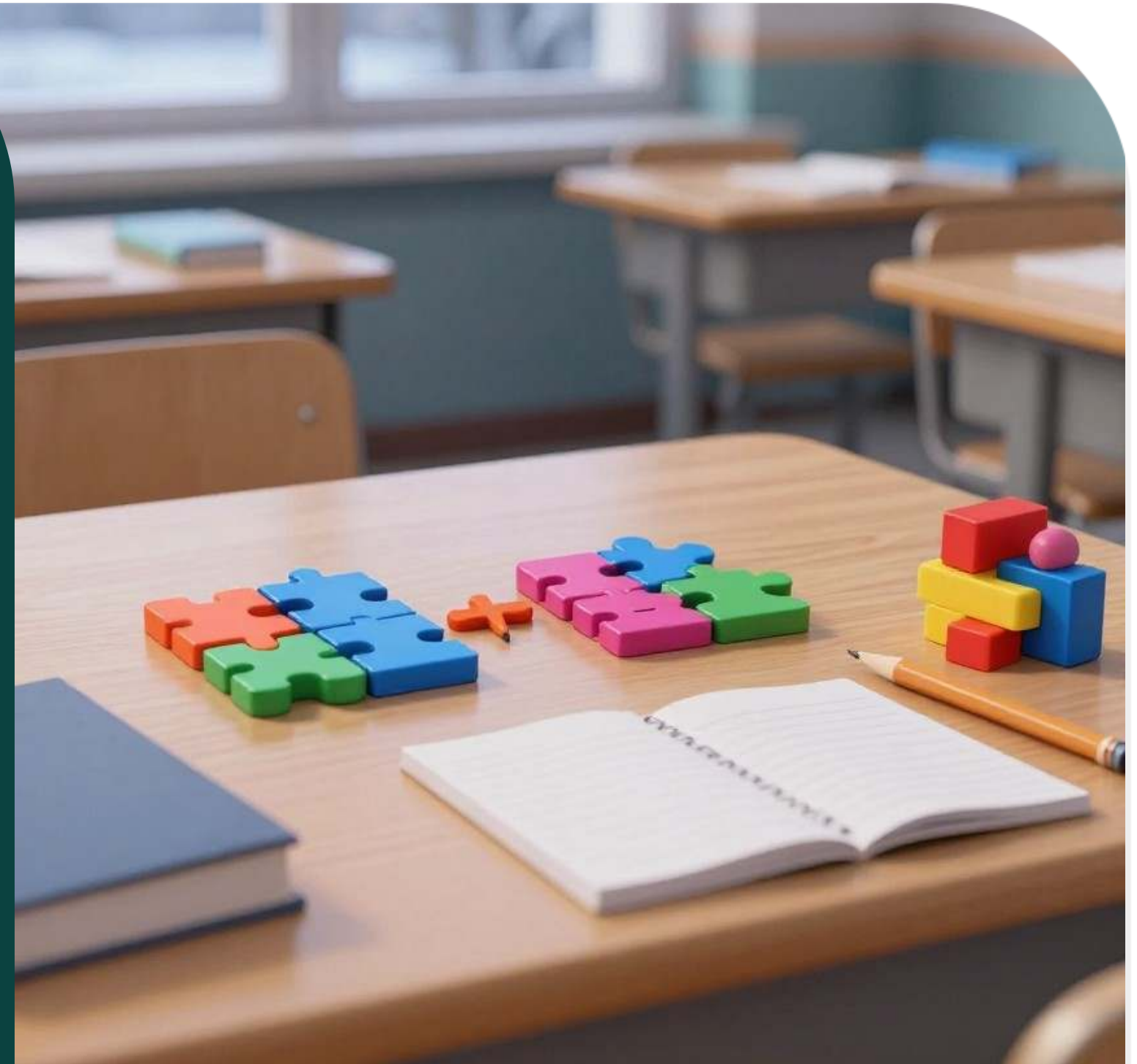
Решение уравнений с помощью разложения на множители

Научимся превращать уравнение в произведение и находить корни.



Как множители упрощают уравнения

Если выражение удаётся разложить на множители, уравнение становится короче и понятнее. Дальше работает правило нулевого произведения: один из множителей должен быть равен нулю. Это особенно удобно для квадратных выражений и простых многочленов, которые часто встречаются в 7 классе.



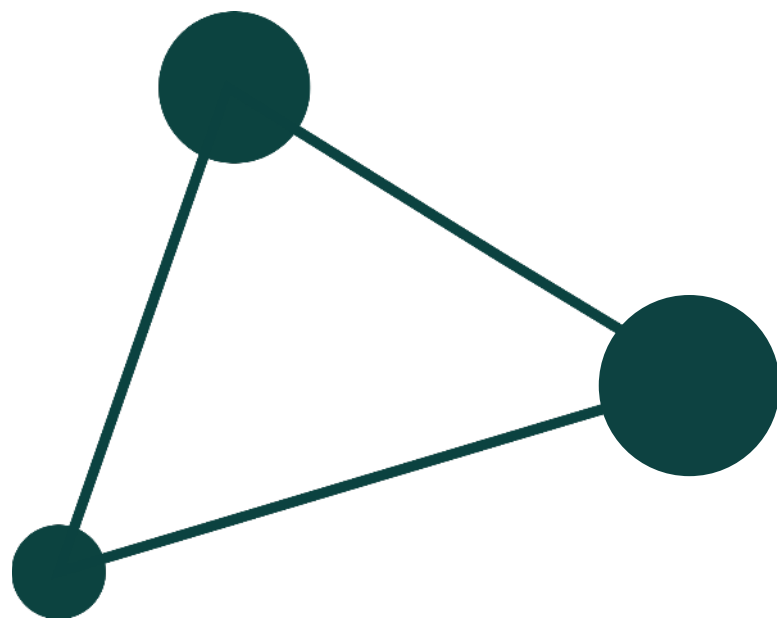
Правило нулевого произведения

3

1

Два множителя

Если произведение двух множителей равно нулю, то нулём должен быть хотя бы один из них. Поэтому уравнение $a \cdot b = 0$ заменяют двумя более простыми уравнениями, которые решают отдельно.



2

Три и больше

Правило не меняется, даже если множителей больше двух. Когда после разложения получается произведение нескольких скобок, каждую скобку приравнивают к нулю и ищут все возможные корни.

3

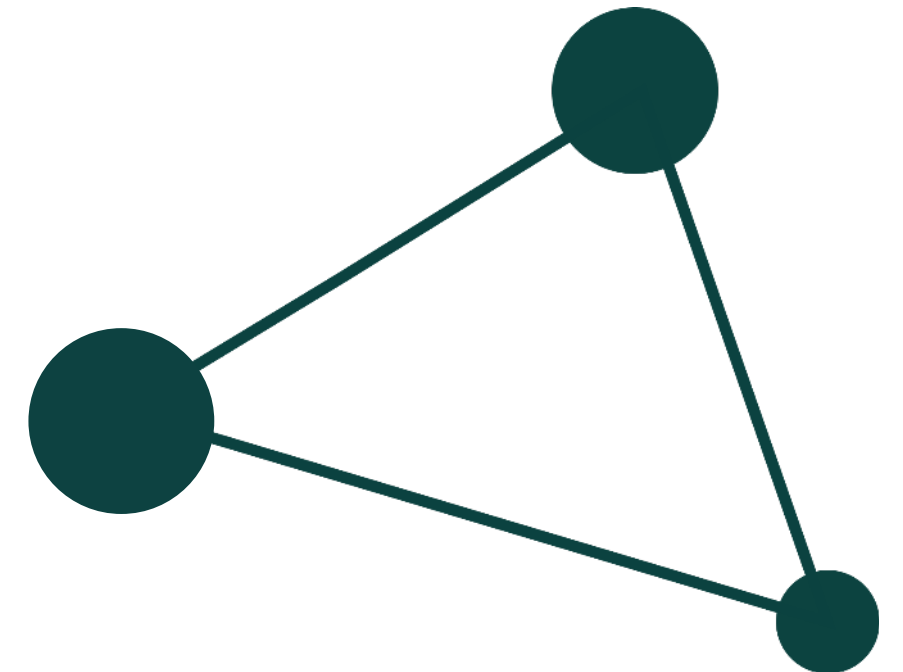
Переход к корням

Сначала уравнение преобразуют в вид произведения. Затем каждый множитель записывают как отдельное равенство с нулём, и именно так получают ответы без лишних вычислений.

4

Почему это работает

Произведение не может быть ненулевым, если хотя бы один множитель равен нулю. Это свойство делает метод надёжным и очень удобным для школьных уравнений.



Вынесение общего множителя за скобки

● Сначала ищем общее

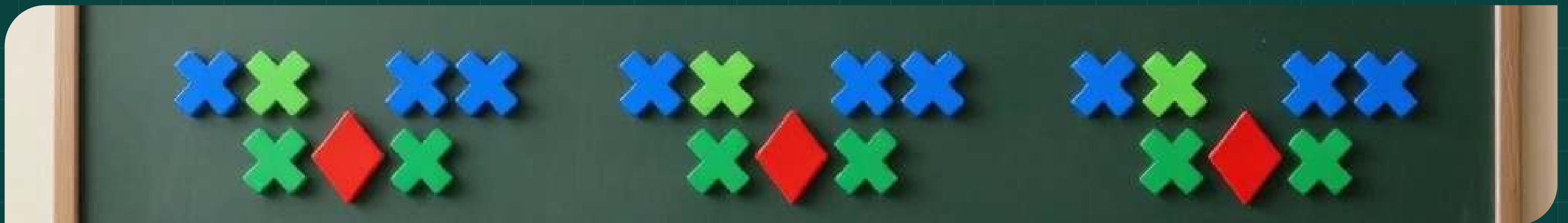
В выражении нужно заметить число, букву или степень, которые есть в каждом слагаемом. Именно они становятся общим множителем и выносятся за скобки.

● Преобразование записи

После вынесения остаётся сумма или разность, записанная в скобках. Например, $3x+6$ превращается в $3(x+2)$, а $4x^2-8x$ — в $4x(x-2)$.

● Зачем это нужно

Такое преобразование сразу переводит выражение в форму произведения. После этого можно применять правило нулевого произведения и быстрее находить корни уравнения.



Как решать уравнение через разложение на множители

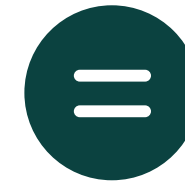
Последовательность шагов от исходного уравнения до проверки ответа

Формулы, которые помогают раскладывать выражения



Разность квадратов

Формула $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ помогает сразу увидеть два множителя. Она особенно полезна, когда выражение содержит два квадрата и знак минус между ними.



Квадрат суммы

Запись $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ показывает, что три слагаемых образуют один квадрат. Это позволяет заменить многочлен одной скобкой в квадрате.



Квадрат разности

Формула $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ похожа на предыдущую, но в скобках стоит знак минус. Её удобно распознавать по среднему члену и двум полным квадратам.



Быстрое распознавание

Эти формулы не решают уравнение сами, но подсказывают правильный способ разложения. Чем раньше удаётся заметить шаблон, тем меньше шагов требуется до ответа.

Какие приёмы разложения встречаются чаще всего

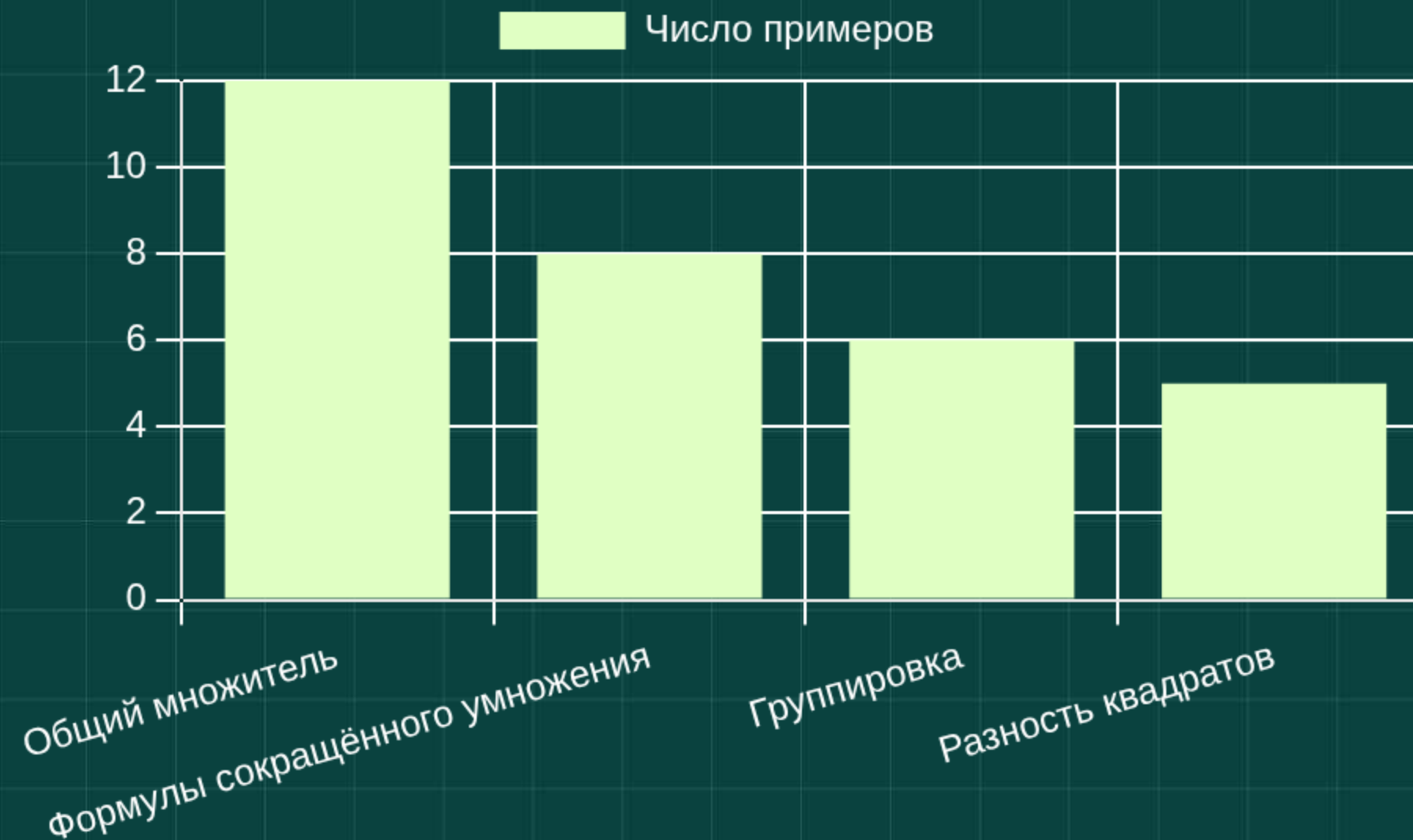


Диаграмма помогает сравнить не сложность, а частоту встречаемости приёмов в учебных заданиях.

Чаще всего используется вынесение общего множителя; остальные способы встречаются реже и требуют более внимательного распознавания.



Учебные задания по теме; пример распределения для наглядного сравнения

Сравнение способов разложения на множители

Способ	Когда	Пример
Общий множитель	Есть общий множитель	$6x+12$
Группировка	4 и более слагаемых	$ax+ay+bx+by$
Разность квадратов	Два квадрата	x^2-16
Полный квадрат	Три члена	$x^2+10x+25$

Способ выбирают по виду выражения: один шаблон подходит не для всех случаев.

Ключевой ориентир — структура выражения. Если её узнать, разложение выполняется быстрее и точнее.

Разложение группировкой

9

1

Когда подходит

Группировку используют, если в выражении четыре или больше слагаемых и общий множитель не заметен сразу. Тогда удобнее сначала объединить члены по парам и посмотреть на них по-новому.

2

Как появляется множитель

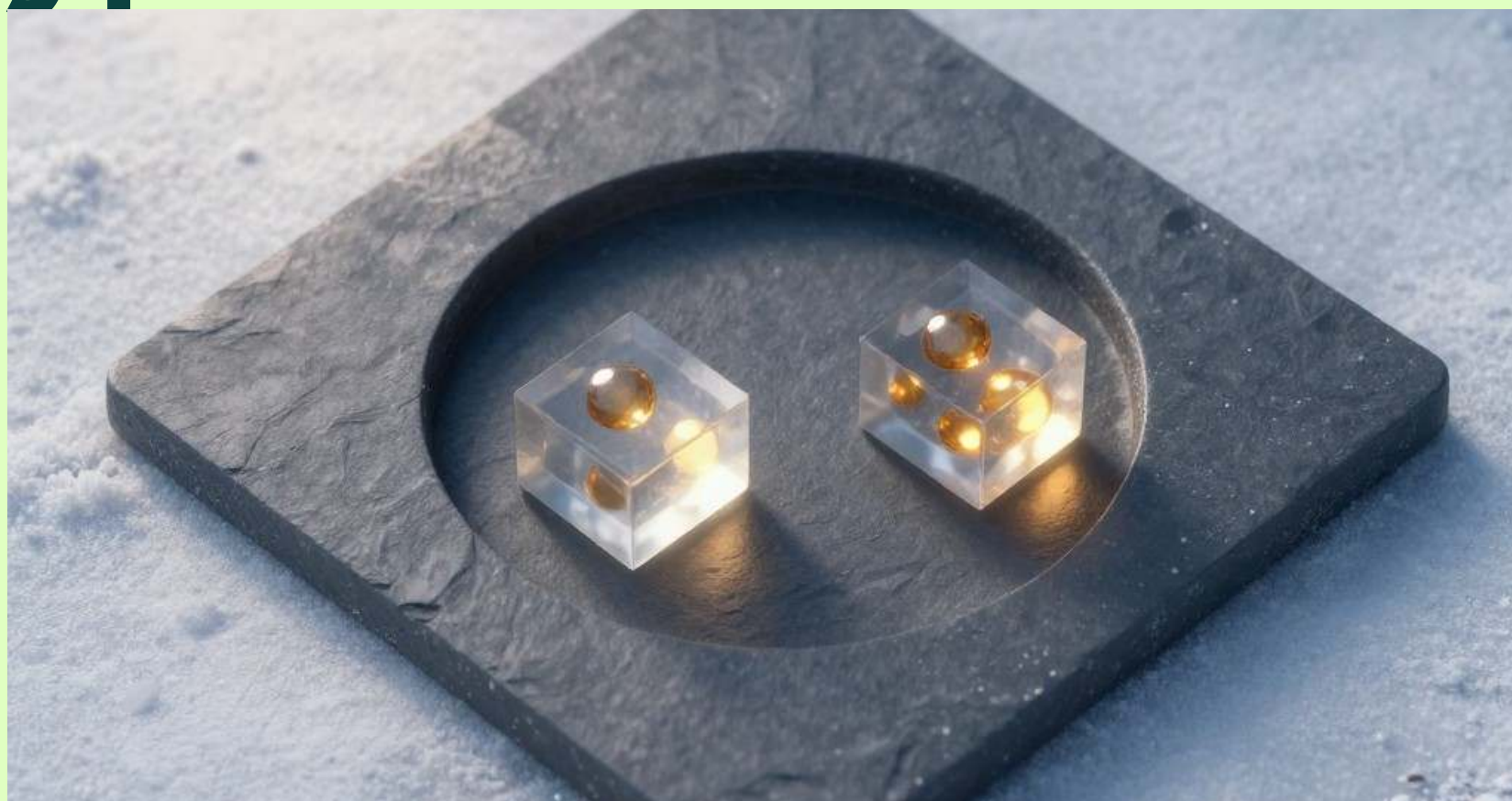
После объединения в каждой паре можно вынести одинаковую часть за скобки. Так скрытый общий множитель становится видимым, а исходная запись превращается в произведение двух скобок.

3

Пример преобразования

Например, $ax+ay+bx+by$ можно записать как $a(x+y)+b(x+y)$, а затем как $(a+b)(x+y)$. В этом и состоит смысл метода: найти повторяющуюся часть и выделить её.

История одного квадратного уравнения



Как увидеть два множителя

Уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ не выглядит очень длинным, но его можно превратить в более удобную запись. Если подобрать два числа, сумма которых равна 5, а произведение — 6, появляется разложение $(x-2)(x-3)=0$. Дальше остаётся только применить правило нулевого произведения.



От скобок к ответу

Каждая скобка даёт своё простое уравнение: $x-2=0$ и $x-3=0$. Так быстро находятся два корня — $x=2$ и $x=3$. Этот пример показывает, что разложение на множители помогает пройти путь от многочлена к ответу без лишних шагов.

Сколько корней может получиться после разложения



Число корней зависит от того, как раскладывается многочлен и повторяются ли множители.

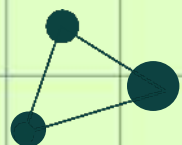
Чаще всего в школьных заданиях встречаются два корня, но повторяющийся множитель даёт один корень, а отсутствие действительных корней — ни одного.



Схематическая иллюстрация по теме «Решение уравнений с помощью разложения на множители»

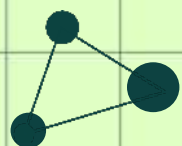
Зачем нужна проверка корней

12



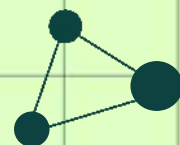
Исключить ошибку

Подстановка найденного значения в исходное уравнение показывает, верен ли ответ. Это особенно полезно после преобразований, где легко потерять знак, скобку или лишний корень.



Убедиться в ответе

Когда корней несколько, проверка подтверждает каждый из них по отдельности. Так ученик видит, что все найденные значения действительно обращают исходное уравнение в верное равенство.



Найти лишний корень

Если при решении уравнение было умножено на выражение с неизвестным или сокращено, проверка помогает заметить значение, которое подходит только для преобразованной записи, но не для исходной.



Типичные ошибки при разложении на множители

Ошибка	Пример	Причина
Минус пропущен	$-x(x-2)$	Невнимание к знаку
Скобки раскрыты неверно	$(x-3)(x+2)$	Ошибка в умножении
Корень не найден	$x(x-5)=0$	Не применено правило
Проверка пропущена	$x=4$	Не замечен лишний ответ

В таблице собраны ошибки, которые чаще всего встречаются при преобразовании уравнений и поиске корней.

Большинство трудностей связано со знаками, скобками и пропуском проверки после преобразования.

Когда уравнение удобно решать разложением на множители

Пошаговая схема выбора метода для уравнений с многочленами.

Пример с двумя корнями

1. Исходное уравнение

Записываем уравнение $2x^2 - 8x = 0$ и замечаем, что все слагаемые можно представить как произведение с общим множителем.

2. Разложение

Выносим общий множитель за скобки: $2x(x-4)=0$. Теперь уравнение стало произведением двух множителей.

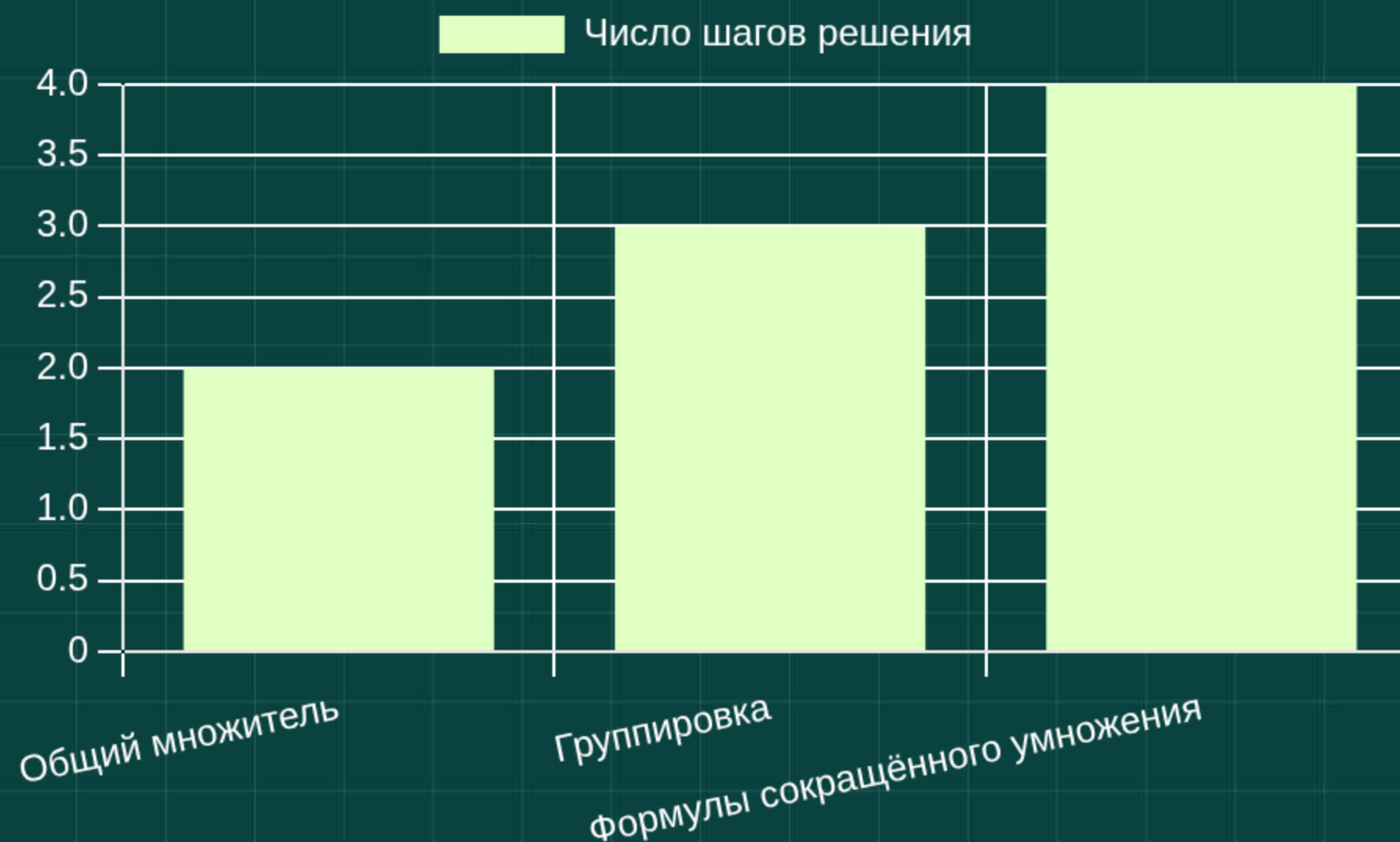
3. Нулевое произведение

Приравниваем к нулю каждый множитель отдельно: $2x=0$ и $x-4=0$. Так получаем два простых уравнения.

4. Ответ

Решаем их и получаем $x=0$ и $x=4$. Оба значения можно проверить в исходном уравнении.

Как вид уравнения влияет на способ решения



Чем быстрее замечается нужная форма многочлена, тем короче путь к ответу.

Самый короткий путь даёт общий множитель; группировка требует больше действий, а формулы сокращённого умножения — внимательного распознавания вида выражения.



Схематическое сравнение способов решения по теме урока

Графическая проверка корней уравнения



Парабола пересекает ось Ox

Если уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ представить как функцию $y = x^2 - 5x + 6$, её график пересекает ось Ox в двух точках. Именно эти точки показывают корни: $x = 2$ и $x = 3$. На рисунке удобно отметить их подписями.



Корень видно сразу на графике

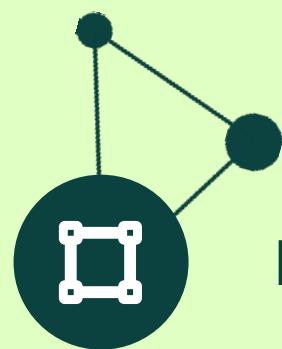
График помогает не только найти ответ, но и проверить его наглядно. Там, где парабола касается или пересекает ось Ox , значение y равно нулю, а значит, соответствующее x является корнем уравнения.

Где разложение на множители встречается в школьных задачах



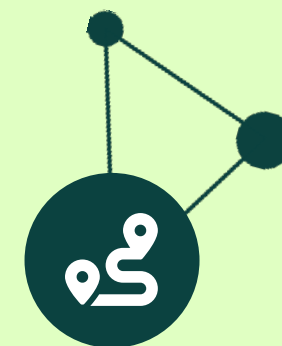
Числовые задачи

Метод помогает быстрее находить неизвестное в задачах на числа, когда выражение можно преобразовать в удобное произведение и применить правило нулевого произведения.



Площади и периметры

При работе с геометрическими формулами разложение часто помогает вынести общий множитель и увидеть зависимость величин, не выполняя лишних вычислений.



Движение

В задачах на движение разложение упрощает уравнения, где скорость, время или расстояние входят в многочлен. Это сокращает вычисления и делает поиск ответа понятнее.



Неравенства и уравнения

В школьном курсе этот приём нужен не только в уравнениях, но и при дальнейшем изучении неравенств. Он помогает преобразовывать выражения и анализировать их знак.

Мини-набор примеров для закрепления

Уравнение	Разложение	Корни
x^2-9	$(x-3)(x+3)$	$x=\pm 3$
x^2+7x	$x(x+7)$	$x=0; x=-7$
x^2-4x+4	$(x-2)^2$	$x=2$
$3x^2-12x$	$3x(x-4)$	$x=0; x=4$

Ниже показаны четыре коротких примера, где ответ находится через разложение на множители и правило нулевого произведения.

Во всех примерах сначала находится удобная форма разложения, а затем ответ получается из нулей множителей.



Разложение делает уравнение проще

Разложение на множители переводит длинное уравнение в несколько коротких. Когда найдено произведение, остаётся применить правило нулевого произведения, решить простые уравнения и обязательно проверить ответ.