



Взаимное расположение прямой и окружности

Как прямая может встретиться с окружностью?

Зачем это нужно в 9 классе

/2



Эта тема помогает уверенно решать задачи на построения, доказательства и вычисления. Здесь важны перпендикуляр, расстояние до прямой и свойства радиуса — без них трудно работать с касательными, хордами и секущими.

Основные элементы окружности

/3

Центр и радиус



Окружность задаётся центром и радиусом: все её точки находятся от центра на одинаковом расстоянии. Именно эти величины помогают сравнивать положение прямой и окружности.

Хорда окружности



Хордой называют отрезок, который соединяет две точки окружности. Она появляется, когда прямая пересекает окружность в двух местах и «вырезает» внутри неё отрезок.

Диаметр окружности



Диаметр — это особая хорда, проходящая через центр. Его длина равна удвоенному радиусу, поэтому он сразу показывает наибольшую возможную хорду окружности.

Обозначения в рассуждениях

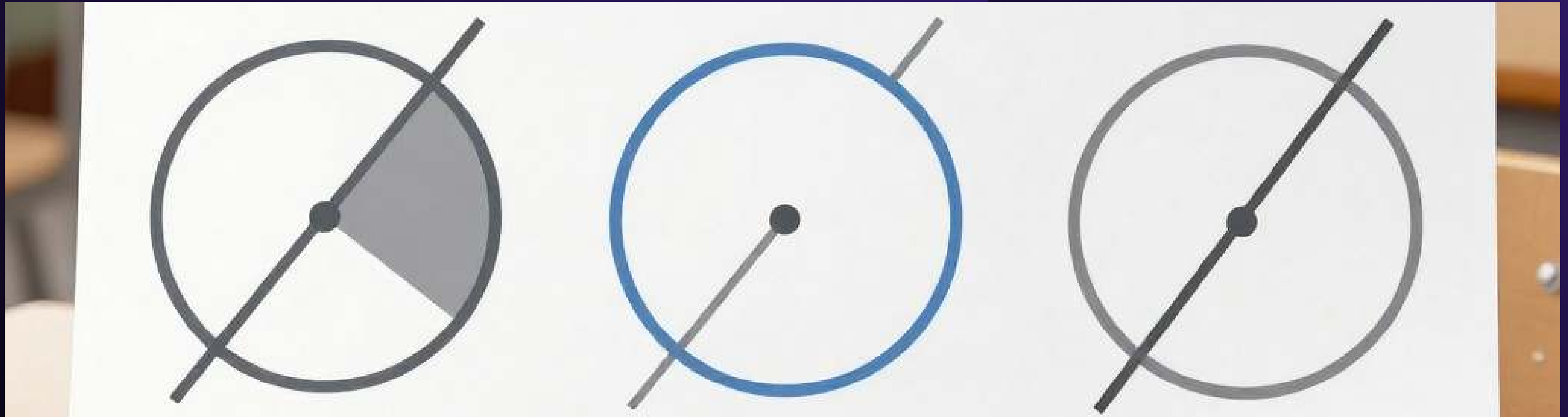


В задачах центр часто обозначают O , радиус — r или R . Эти обозначения позволяют быстро записывать условия и делать выводы о пересечении прямой с окружностью.



Три случая взаимного расположения

/4



Две общие точки

Если прямая пересекает окружность в двух точках, она называется секущей. Такой случай означает, что прямая проходит через окружность и входит внутрь неё.

Одна общая точка

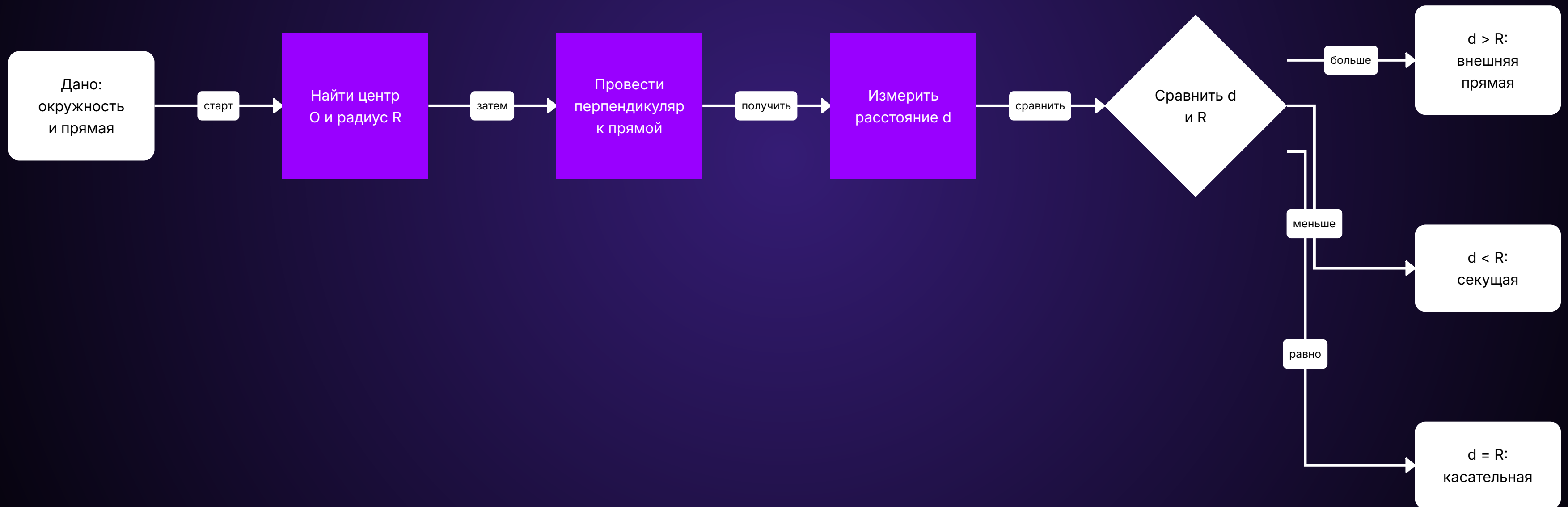
Если у прямой только одна общая точка с окружностью, она является касательной. В этом случае прямая как будто касается окружности, но не проходит через неё.

Нет общих точек

Если прямая не имеет с окружностью общих точек, её называют внешней. Она расположена настолько далеко, что окружность её не достигает.

Алгоритм определения положения прямой ^{/5}

Схема показывает, как по расстоянию от центра до прямой определить число общих точек.



Сравнение расстояния d и радиуса R

/6

Положение	Общие точки	Название
$d < R$	2	секущая
$d = R$	1	касательная
$d > R$	0	внешняя

Правило сравнения расстояния от центра окружности до прямой с радиусом

По таблице легко определить, сколько общих точек будет у прямой и окружности.

Достаточно одного сравнения d и R , чтобы сразу сделать вывод о взаимном расположении.

Секущая прямая и хорда

/7

01 Пересечение

Секущая проходит через окружность и встречает её в двух точках. Эти точки определяют отрезок внутри окружности.

Хорда

02

Отрезок секущей между точками пересечения называется хордой. Он всегда соединяет две точки окружности.

03 Диаметр и длина

Если секущая проходит через центр, хорда становится диаметром. Чем ближе прямая к центру, тем длиннее хорда.

Касательная и радиус в точке касания

/8



Одна общая точка

Касательная имеет с окружностью только одну общую точку. Именно поэтому она отличается от секущей и не «заходит» внутрь окружности.

Перпендикуляр к радиусу

Радиус, проведённый в точку касания, всегда перпендикулярен касательной. Это главное свойство помогает доказывать верные решения и строить рисунки.

Что отмечают на чертеже

На схеме обычно показывают центр, точку касания, радиус, саму касательную и значок прямого угла. Так легче увидеть связь между элементами.

Почему касательная не пересекает окружность

/9

d равно R



Когда расстояние равно радиусу, прямая касается окружности ровно в одной точке. Она идёт по границе и не пересекает окружность.

d меньше R



Если расстояние от центра до прямой меньше радиуса, прямая проходит внутри окружности. Тогда появляются две общие точки, и это уже секущая.

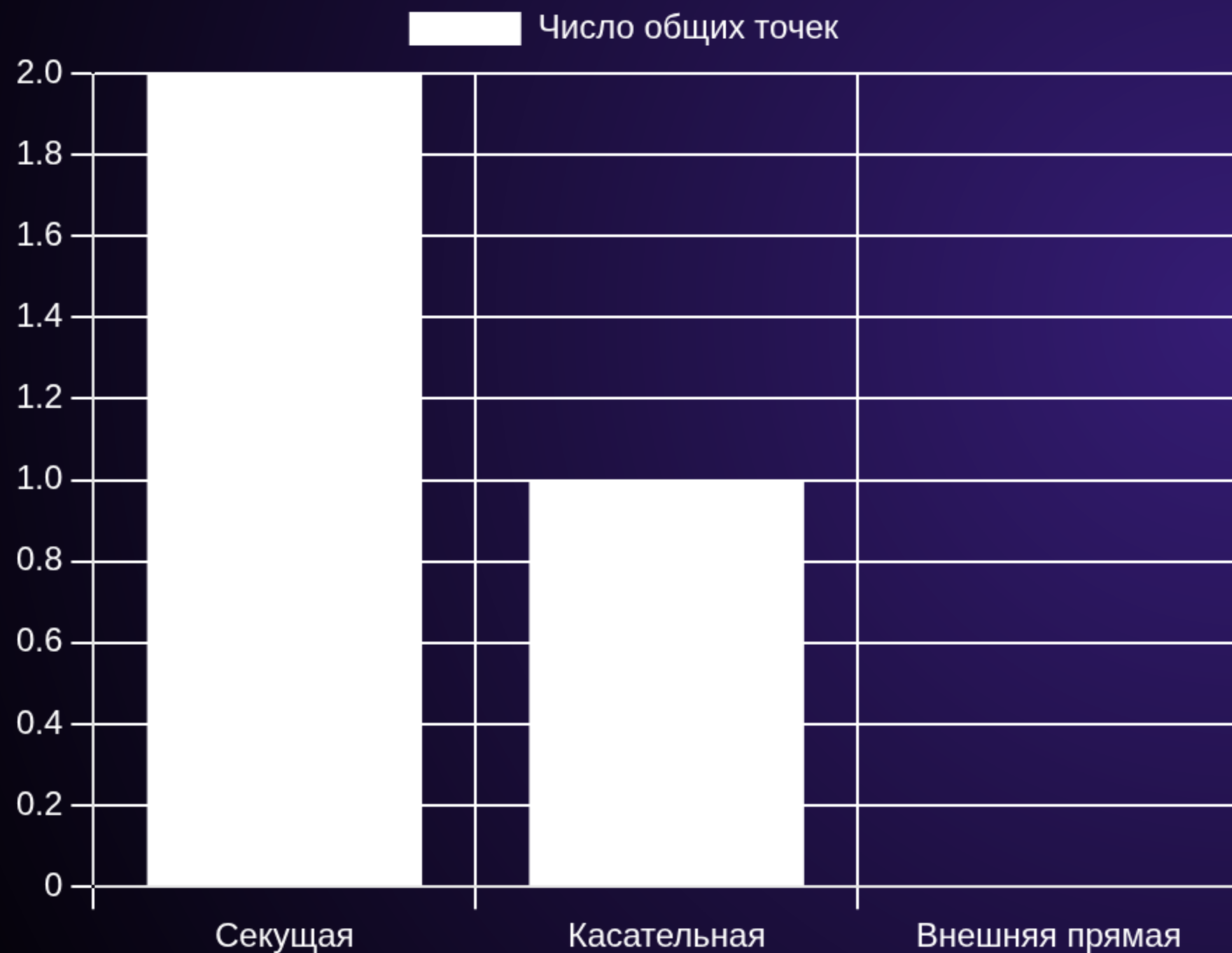
Предельный случай



Касательная — это пограничное положение прямой. Она касается окружности, но не проходит через неё, поэтому общая точка только одна.

Три случая в наглядной диаграмме

/10



На диаграмме видно, как меняется число общих точек при разных положениях прямой относительно окружности.

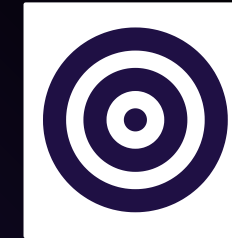
Сравнение d и R полностью определяет результат: две, одна или ноль общих точек.

Правило взаимного расположения прямой и окружности

Как находят расстояние от центра до прямой

/11

Измерить отрезок



Длина полученного перпендикуляра обозначается d . Если на чертеже указан масштаб или данные для вычисления, эту длину находят точно и затем сравнивают с радиусом окружности R .

Построить перпендикуляр



Из центра окружности проводят перпендикуляр к данной прямой. Именно по этому отрезку измеряют кратчайшее расстояние от точки до прямой, а не по наклонной линии или по рисунку на глаз.

Сделать вывод



По сравнению d и R определяют взаимное расположение. Так сразу видно, проходит ли прямая через окружность, касается её в одной точке или совсем не имеет общих точек.

Построение касательной к окружности

/12

01 Выбрать точку касания

Сначала отмечают точку на окружности, через которую должна пройти касательная. Без этой точки нельзя однозначно задать построение, потому что касательная касается окружности только в одном месте.

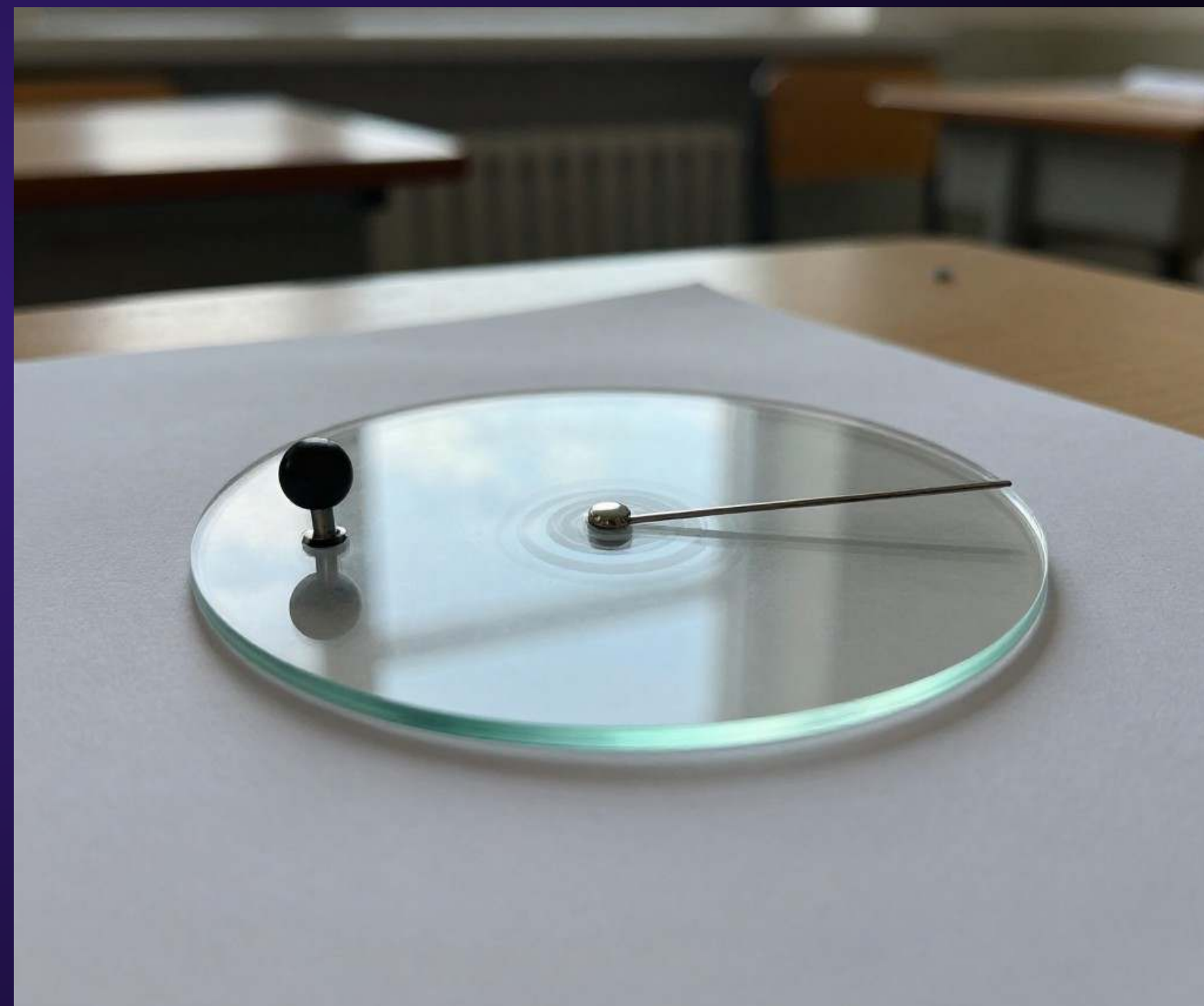
Провести радиус

Затем соединяют центр окружности с выбранной точкой. Полученный отрезок является радиусом, и именно он задаёт направление, относительно которого нужно строить перпендикулярную прямую.

02

03 Построить перпендикуляр

Через точку на окружности проводят прямую, перпендикулярную радиусу. Эта прямая и будет касательной, потому что в точке касания касательная всегда образует с радиусом прямой угол.



Обозначения, которые встречаются в задачах

Элемент	Обозначение	Смысл
Центр	O	центр окружности
Радиус	R, r	отрезок до окружности
Расстояние	d	от центра до прямой
Хорда	—	соединяет 2 точки
Секущая	—	2 общие точки
Касательная	—	1 общая точка

Короткие обозначения помогают быстрее читать условие, делать чертёж и не путать элементы окружности при решении задач.

Если сразу понимать обозначения O, R и d, легче сравнивать величины и делать правильный вывод о виде прямой.

Материал по теме «Взаимное расположение прямой и окружности», 9 класс

Типичные ошибки при решении задач

/14



Путают секущую и касательную

Если прямая проходит очень близко к окружности, её иногда называют касательной по виду рисунка. Проверять нужно не «на глаз», а по числу общих точек.

Берут неверную длину

Сравнивать с радиусом нужно именно расстояние от центра до прямой. Любая другая длина на чертеже, даже похожая, не даёт правильного ответа.

Забывают про перпендикуляр

Расстояние d находят только по перпендикуляру из центра к прямой. Без этого построения невозможно корректно определить, пересекает ли прямая окружность.

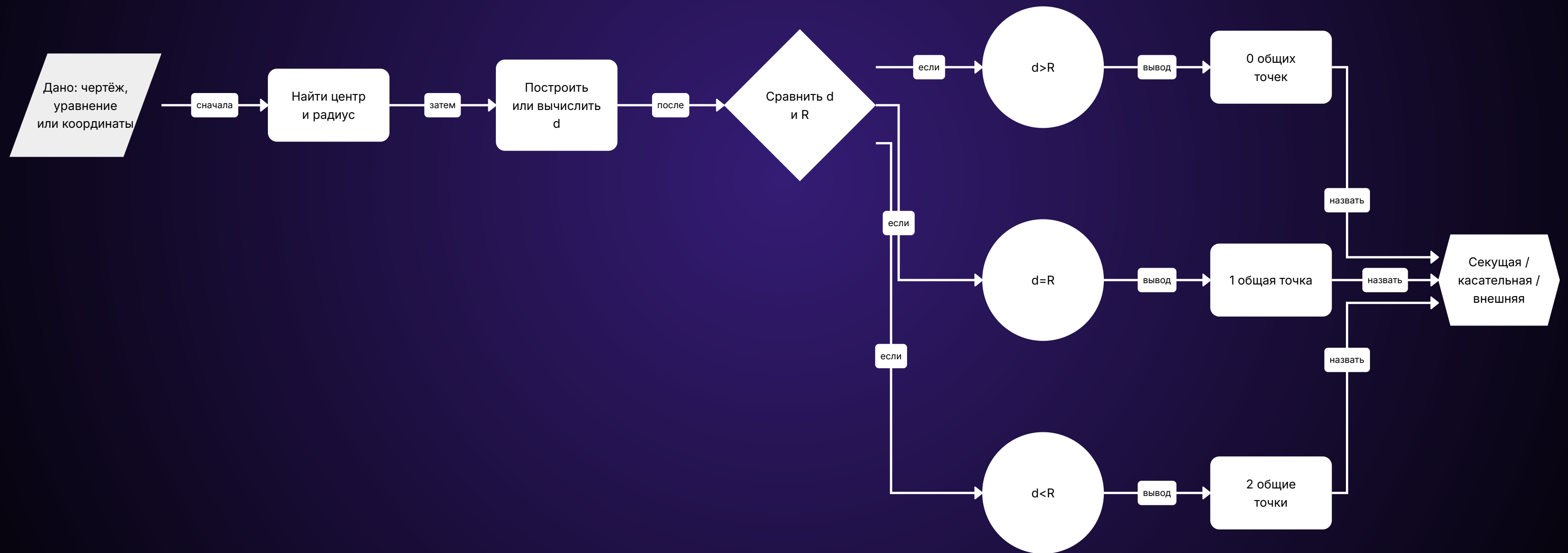
Ошибаются при $d=R$

Когда расстояние равно радиусу, общая точка только одна. Это касательная, а не секущая, поэтому важно точно считать количество точек пересечения.

Алгоритм решения задач по теме

/15

Последовательность действий помогает быстро определить число общих точек прямой и окружности.



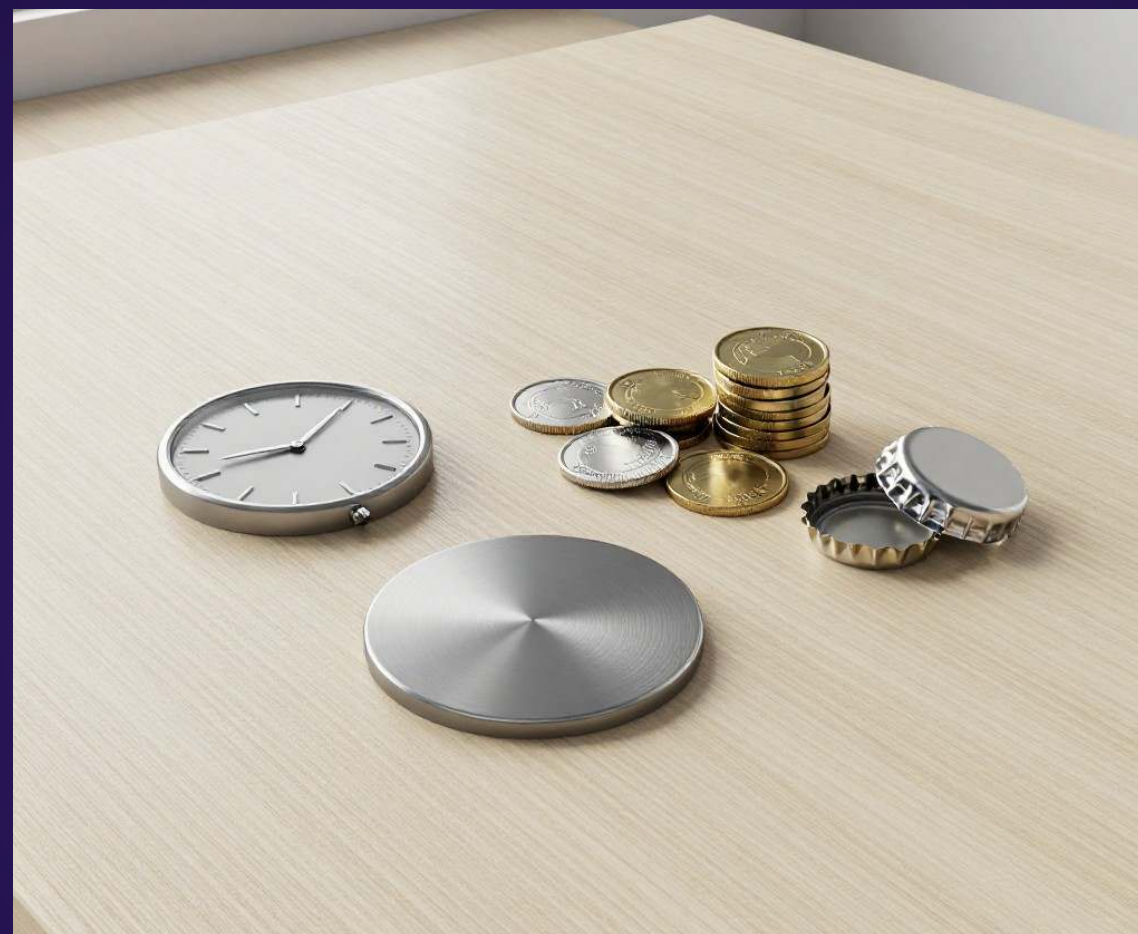
Примеры из окружающего мира

/16



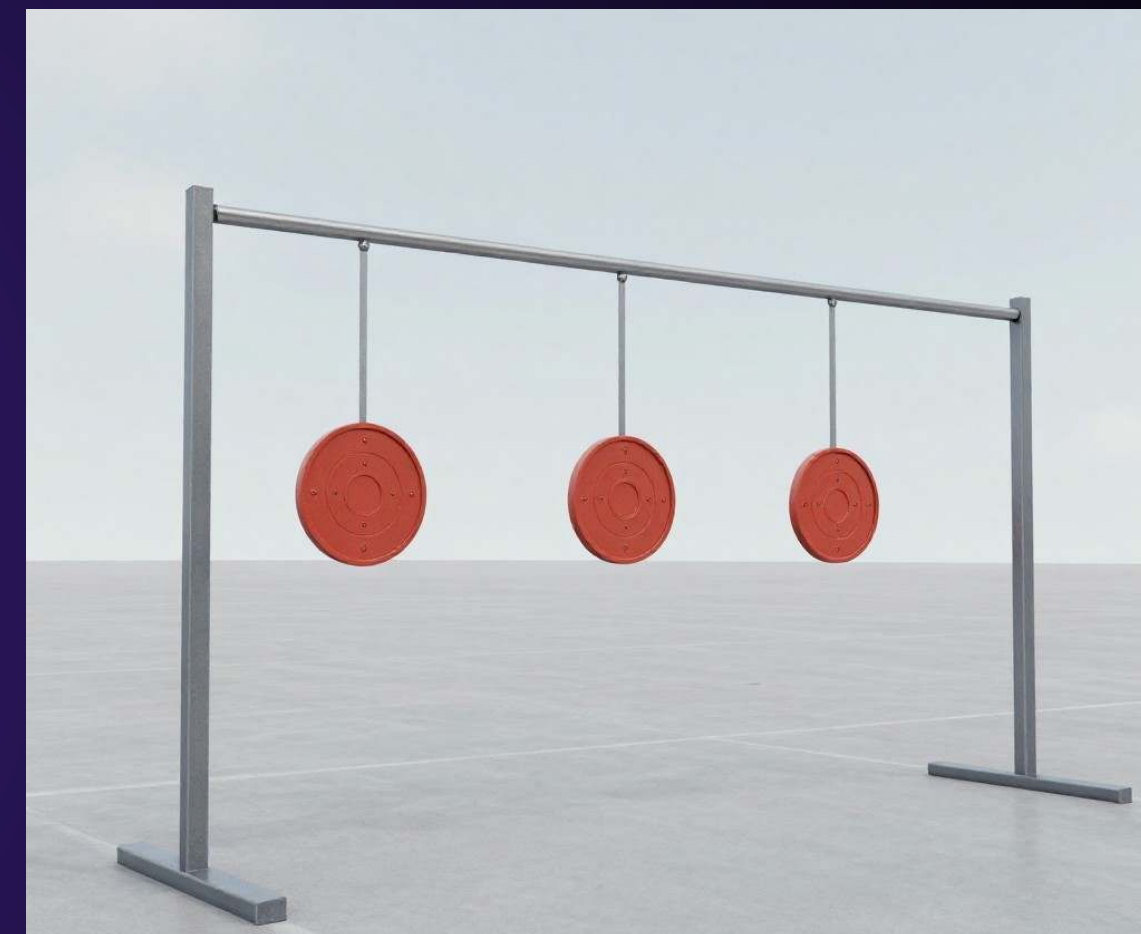
Колесо и край дороги

Колесо велосипеда или автомобиля напоминает окружность, а край бордюра или дорожная разметка — прямую. Когда колесо катится рядом с краем, легко увидеть, где линия пересекает окружность, а где лишь касается её. Такой пример помогает связать геометрию с движением в реальности.



Часы, монеты и крышки

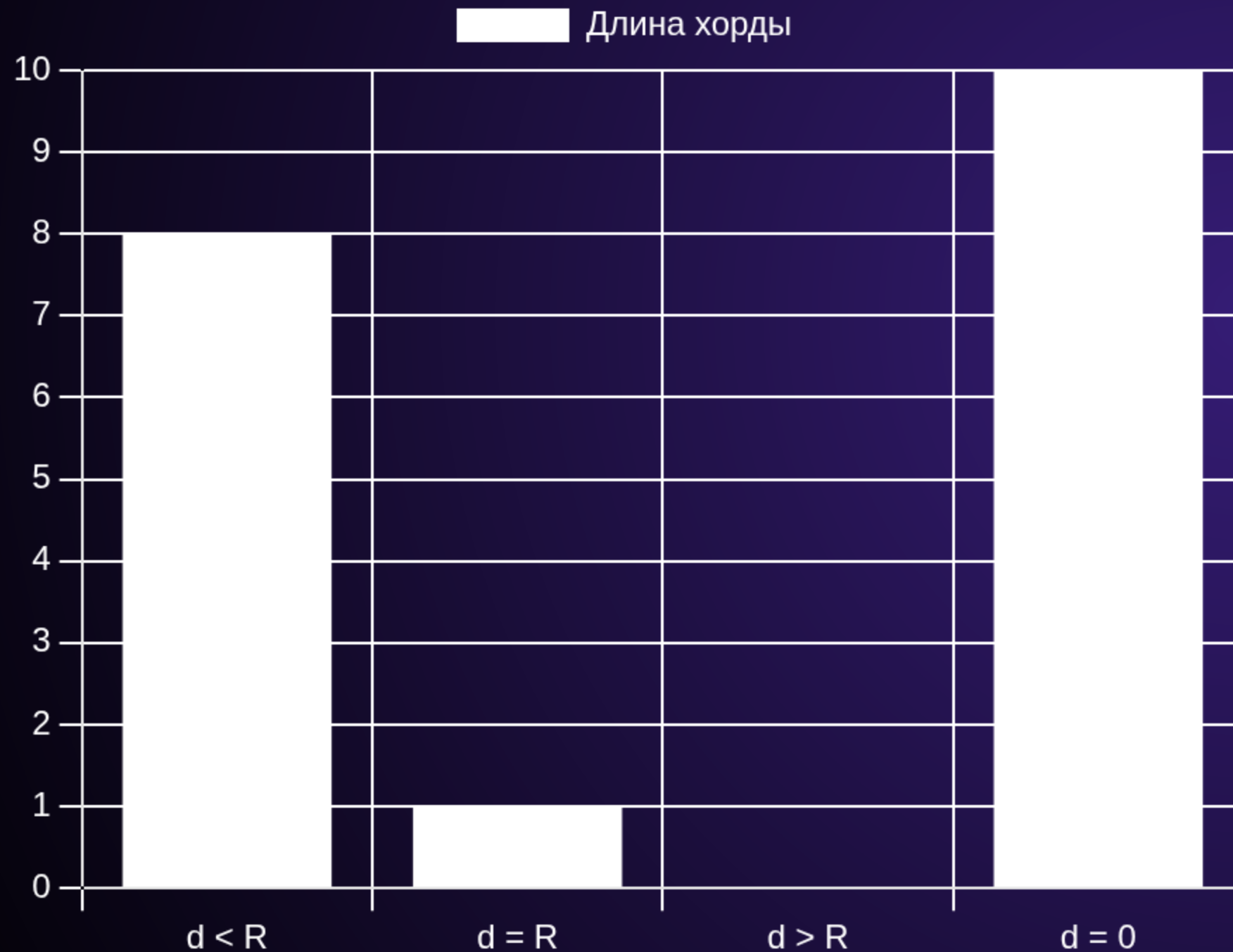
У часов, монет и крышек форма близка к окружности, поэтому любая ровная грань или край стола может быть для них прямой. Если приложить предмет к линии, можно наглядно заметить касание в одной точке или пересечение в двух точках.



Мишени и дорожные знаки

Круглые мишени и знаки часто расположены рядом с прямыми опорами, стойками и рамками. На таких объектах хорошо видно, как одна и та же прямая может не задевать круг, касаться его или проходить через него.

Как меняется длина хорды при изменении расстояния d



Чем ближе прямая к центру, тем длиннее отрезок, вырезанный окружностью. При прохождении через центр получается диаметр — самая длинная хорда.

Зависимость наглядно показывает: увеличение d уменьшает хорду, а при $d > R$ общих точек уже нет.

Схематическая зависимость по свойствам хорды и расстояния до прямой

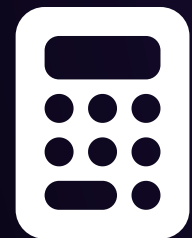
Связь с координатной плоскостью и уравнениями

/18



Уравнение окружности

На координатной плоскости окружность задают формулой, где есть центр и радиус. По этому уравнению можно точно описать все точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от центра.



Решение системы

Если совместить уравнения прямой и окружности, получится система. Два решения означают пересечение, одно — касание, а отсутствие решений показывает, что общих точек нет.



Уравнение прямой

Прямая в координатах записывается линейным уравнением. Тогда её положение относительно окружности можно изучать не только по рисунку, но и с помощью вычислений.



Переход к алгебре

Этот способ помогает перевести геометрию в алгебру. В задачах с координатами можно проверить ответ вычислениями и убедиться, что вывод совпадает с чертежом.

Краткая памятка по теме

Условие	Результат	Название
$d < R$	2 точки	секущая
$d = R$	1 точка	касательная
$d > R$	0 точек	внешняя

Правило сравнения расстояния от центра до прямой с радиусом окружности

Схема ниже помогает быстро вспомнить, как по сравнению d и R определить взаимное расположение прямой и окружности.

Чтобы не ошибиться, достаточно найти d и сравнить его с R : это полностью определяет число общих точек и вид прямой.

В этой теме всё решает сравнение расстояния от центра до прямой с радиусом. Если помнить три случая и свойства касательной, секущей и хорды, задачи становятся понятнее и решаются быстрее.

**Главное, что нужно
запомнить**