

Неравенства с одной переменной

Находим все подходящие значения и читаем ответ по знакам.



Где встречаются неравенства

Неравенства помогают описывать все значения, которые подходят по условию задачи: от возраста и времени до цены и расстояния. Мы учимся преобразовывать запись, проверять ответ и показывать его на числовой прямой.



Основные понятия темы

Знаки сравнения

Неравенство содержит знак $<$, $>$, $\leq$ или $\geq$. Он показывает, как сравниваются значения выражений и в какую сторону нужно искать подходящие решения.

Что считается решением

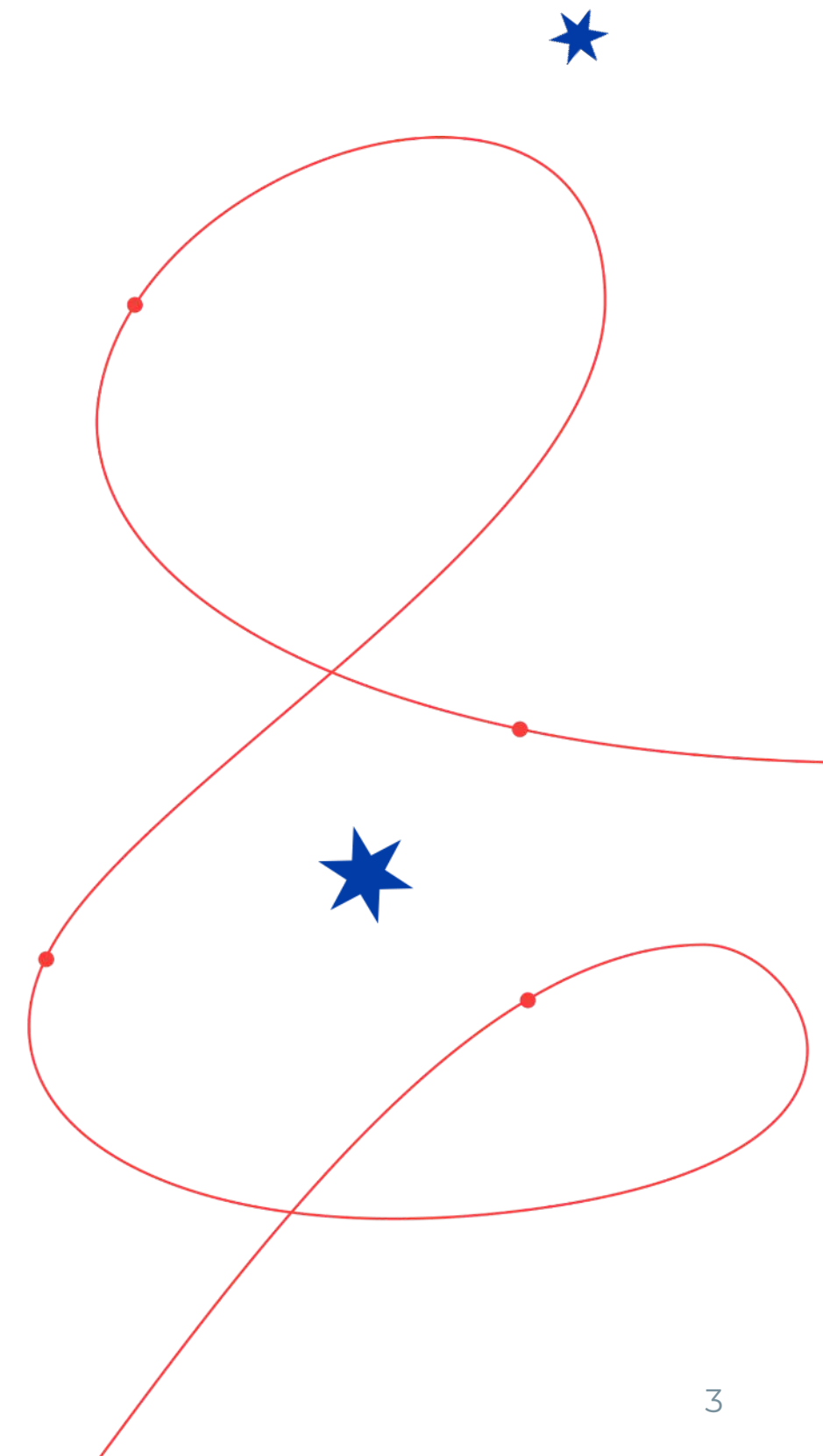
Решение неравенства — это не одно число, а все значения переменной, при которых запись становится верной. Обычно ответ записывают как промежуток или множество.

Область допустимых значений

ОДЗ, или область допустимых значений, ограничивает смысл выражения. Например, знаменатель дроби не может быть равен нулю, иначе запись теряет смысл.

Как показывают ответ

Чтобы ответ был понятным, его часто изображают на числовой прямой. Тогда сразу видно, какие значения включены, а какие остаются вне решения.



Интуиция: какие значения подходят

1. Смысл условия

Если записано $x+3>7$, нужно найти все значения x , при которых левая часть становится больше семи. Подходит не один ответ, а целый набор чисел.

2. Направление поиска

Для неравенства $x<2$ решения находятся слева от числа 2. Это удобно представить на прямой: чем меньше число, тем дальше оно уходит влево.

3. Набор решений

Любое неравенство описывает область значений, а не отдельный результат. Поэтому важно читать знак внимательно: он сразу подсказывает, где лежат подходящие числа.



Как записывать ответ

1.

Три записи ответа

Если получено $x > 4$, ответ можно записать как неравенство, как интервал $(4; +\infty)$ или как луч на числовой прямой с пустой точкой у 4.

2.

Строгая граница

Знак $<$ или $>$ означает строгую границу. Значение на самой границе не входит в ответ, поэтому на прямой ставят пустую точку.

3.

Граница включена

При знаках $\leq$ и $\geq$ граница включается в решение. Тогда на числовой прямой ставят закрашенную точку и проводят луч или отрезок нужного направления.



Числовая прямая и границы

Пустая точка

Пустая точка на числовой прямой показывает, что граница не входит в ответ. Так оформляют строгие знаки $<$ и $>$, чтобы не перепутать включение значения.

Закрашенная точка

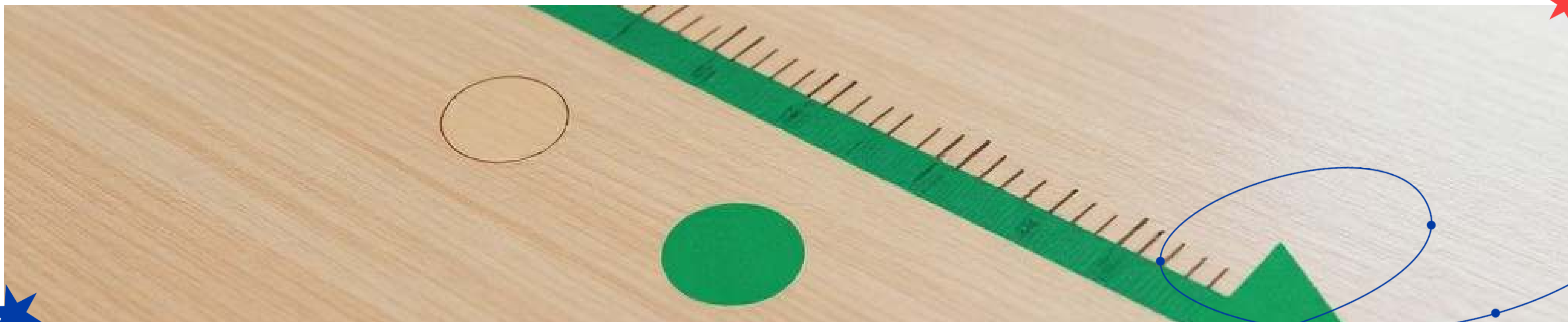
Закрашенная точка означает, что граница входит в решение. Это соответствует знакам $\leq$ и $\geq$ и сразу отличает их от строгих неравенств.

Направление луча

Стрелка вправо показывает большие числа, а влево — меньшие. Направление луча должно совпадать с тем, как записан ответ в неравенстве.

Проверка записи

Перед записью ответа полезно сверить границу, тип точки и направление. Если хотя бы один элемент не совпадает со знаком, ответ оформлен неверно.



Добавление и вычитание без смены знака

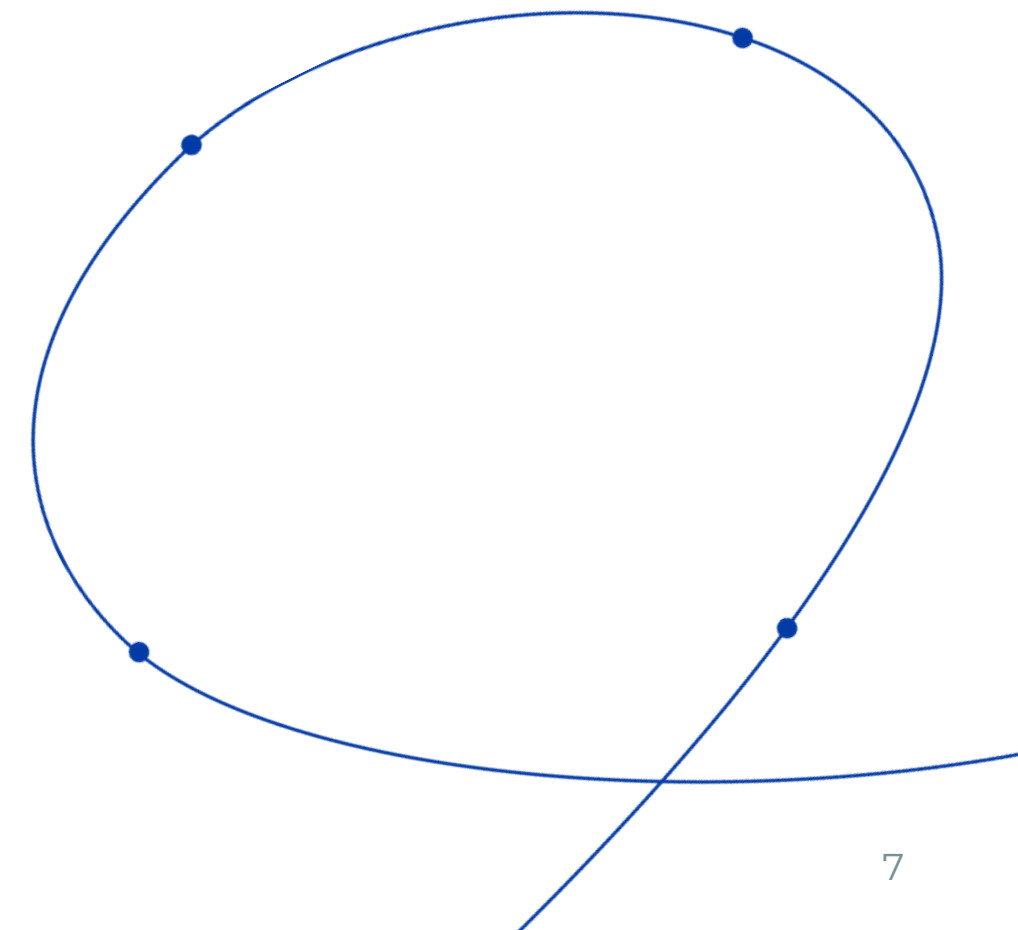


1. Прибавление

Прибавление одного и того же числа к обеим частям неравенства не меняет знак. Поэтому из $x-5 < 9$ получаем $x < 14$, сохраняя смысл сравнения.

2. Вычитание

Вычитание тоже безопасно: если из обеих частей убрать одинаковое число, знак останется прежним. Это правило помогает быстро упростить неравенство без ошибок.



Правило отрицательного числа



1.

Положительное число

Если обе части умножают или делят на положительное число, знак неравенства остаётся тем же. Например, $2x < 8$ сразу даёт $x < 4$.

2.

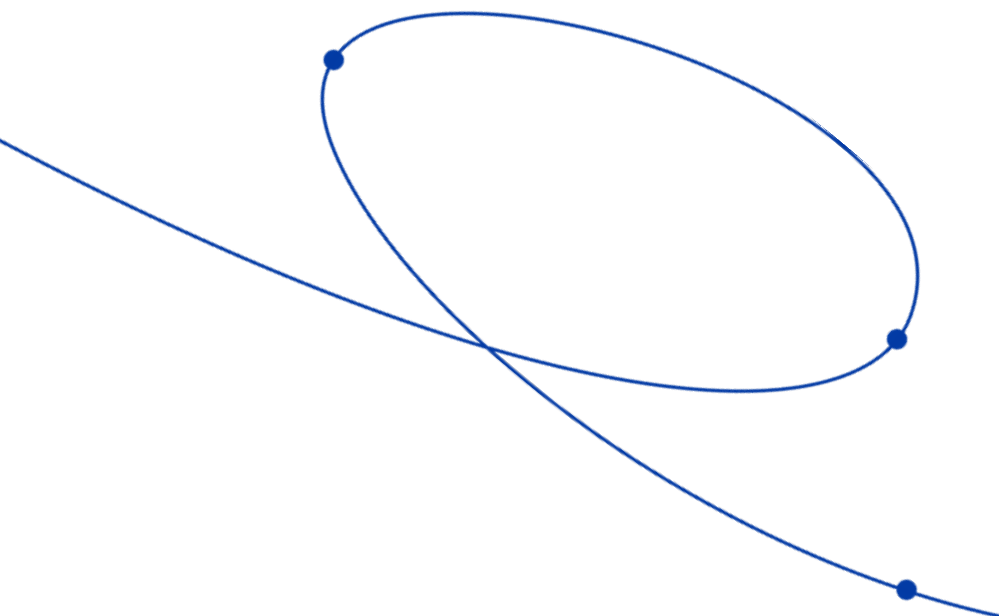
Отрицательное число

При умножении или делении на отрицательное число порядок чисел меняется, поэтому знак нужно развернуть. Иначе решение будет неверным.

3.

Пример преобразования

В примере $-3x > 12$ после деления на -3 получаем $x < -4$. Смена знака здесь обязательна, потому что коэффициент был отрицательным.



Главная ловушка: смена знака

1. Ошибка при делении

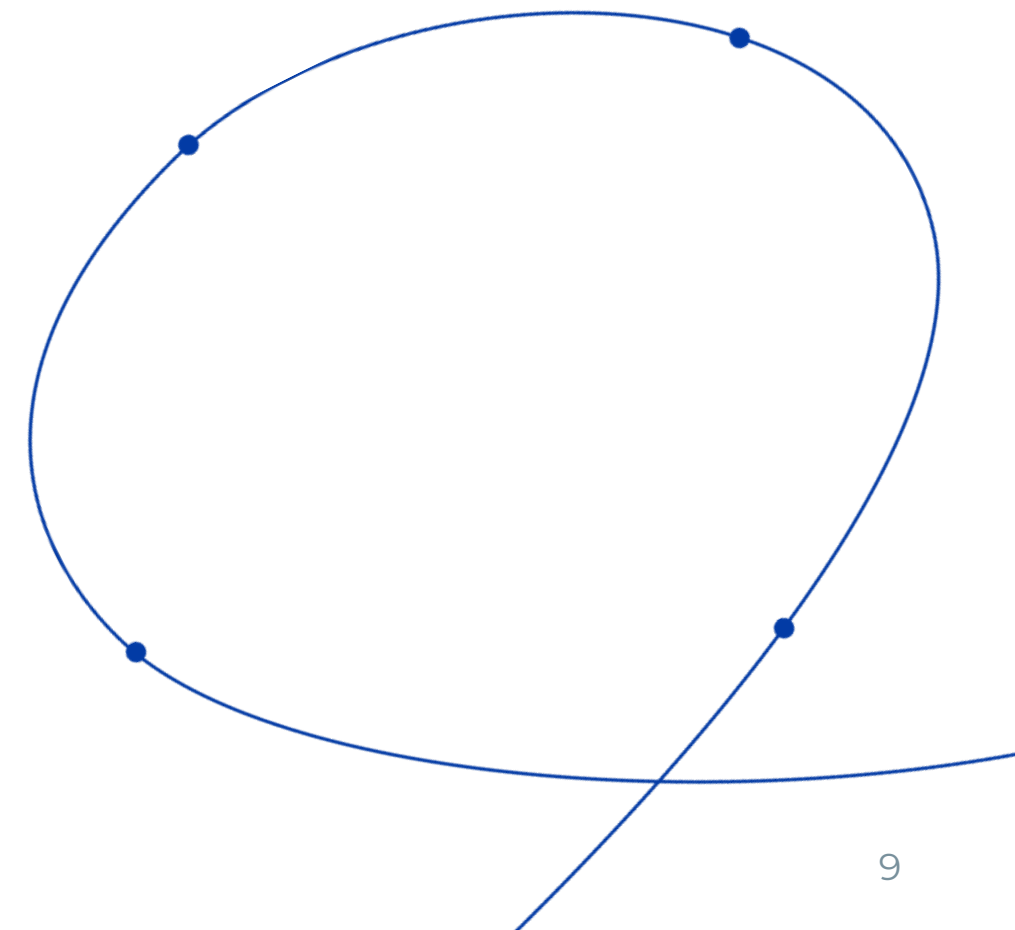
Самая частая ошибка — забыть изменить знак после деления на отрицательное число. Из $-2x < 6$ нельзя получить $x < -3$, потому что сравнение меняется.

2. Верный результат

Правильное преобразование даёт $x > -3$. Если не поменять знак, получится совсем другой промежуток значений и неверный ответ на числовой прямой.

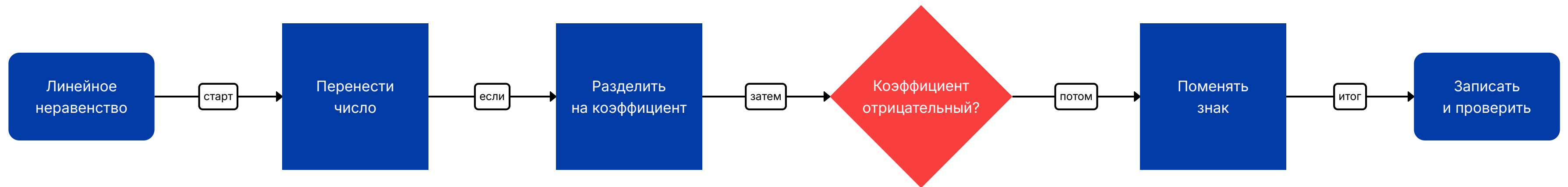
3. Что проверять

Ещё одна ловушка — не проверить, на какое число делят. Когда оно отрицательное, знак обязательно меняется, даже если шаг кажется привычным.



Алгоритм решения линейных неравенств

Последовательность действий для неравенств вида $ax+b<0$ и $ax+b\geq 0$.



2

**— это граница,
к которой сводятся
оба решения.**

Оба примера сводятся к одному и тому же: после преобразований нужно сравнить x с числом 2 и правильно прочитать знак.

-2

**требуется обязательной
смены знака в ответе.**

При делении на отрицательное число знак неравенства меняется, поэтому ответ для примера с коэффициентом -2 становится противоположным.

2

**показывает, что скобки
сначала раскрывают,
а затем приводят
подобные слагаемые.**

Минус перед скобками меняет знаки всех слагаемых внутри, и именно это помогает правильно привести выражение к виду для решения.

Двойные неравенства и интервалы

Промежуток решений

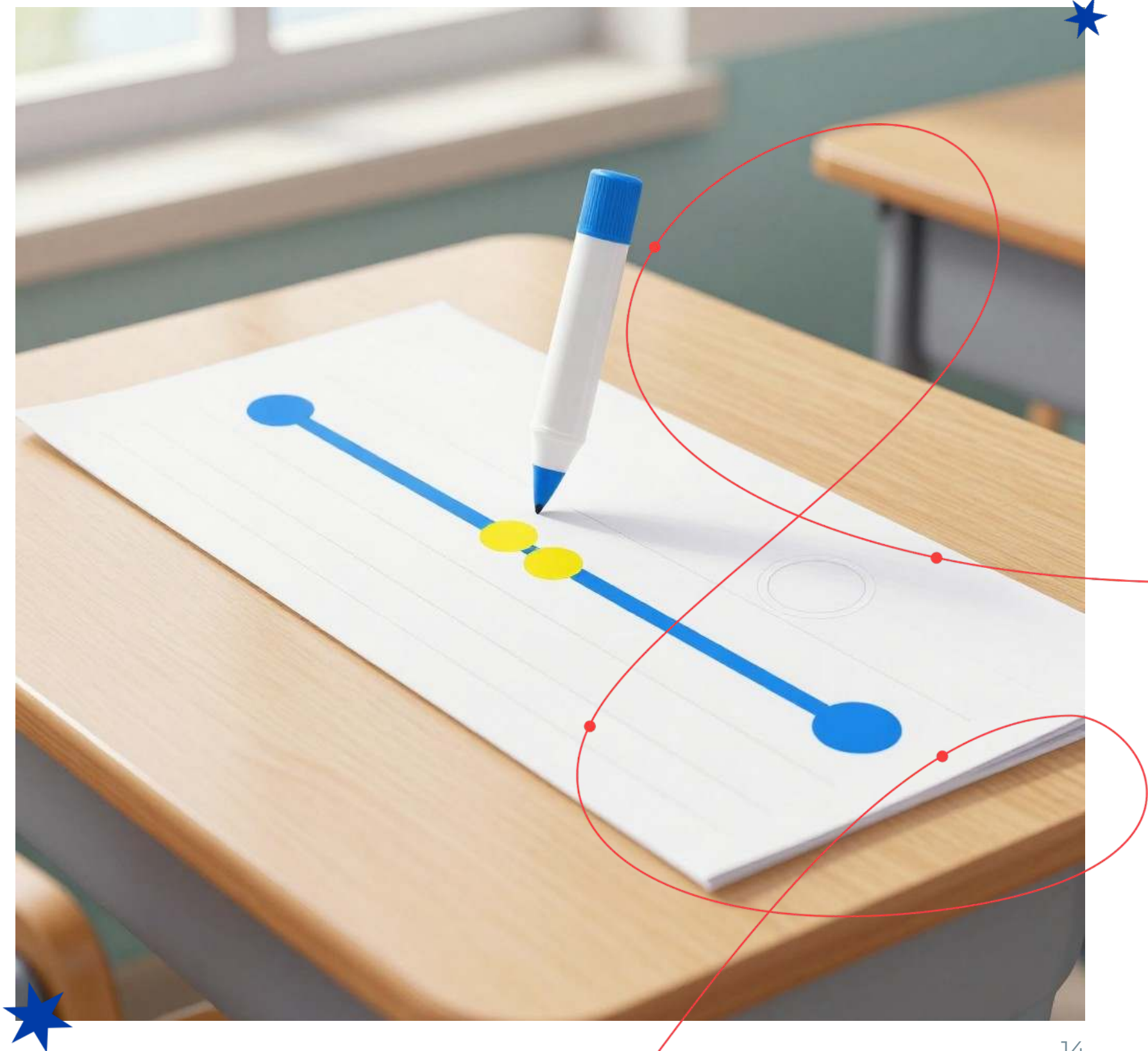
Двойное неравенство сразу задаёт промежуток значений. Число x должно быть больше левой границы и меньше правой, поэтому удобно мысленно видеть его между двумя точками.

Границы и точки

Если левая граница включается, используют знак $\leq$ и закрашенную точку. Если правая граница не включается, ставят $<$ и рисуют пустую точку на числовой прямой.

Как записывать ответ

Запись интервалом помогает не путать ответ с одним числом. Она показывает весь набор подходящих значений и хорошо подходит для проверки на числовой прямой.



2

**отдельных промежутка
входят в ответ
при союзе «или».**

В записи $x < -2$ или $x \geq 4$ получаются два отдельных участка числовой прямой. Слово «или» объединяет варианты, а не заставляет выбирать только один.

Модуль: расстояние до числа

1.

Смысл модуля

Начинаем с модуля как с расстояния. Выражение $|x-a|$ показывает, насколько далеко x находится от числа a на числовой прямой.

2.

Переход к промежутку

Неравенство $|x-a|<b$ означает, что расстояние меньше b . Тогда x лежит между $a-b$ и $a+b$, то есть получается двойное неравенство.

3.

Пример на числах

На примере $|x-3|<2$ видно: подходящие значения находятся между 1 и 5. Это удобно сразу отмечать на прямой и проверять границы.



4

**определяет обе
включённые границы
решения.**

При знаке $\leq$ границы входят в ответ, поэтому для $|x+1| \leq 4$ отрезок на прямой имеет два закрашенных конца.

Дробное неравенство и ОДЗ



Сначала исключают значения, при которых знаменатель обращается в ноль, а затем определяют, где дробь положительна.

Ответ состоит из промежутков, где числитель и знаменатель одного знака, при обязательном учёте ОДЗ.

Шаг	Что делаем	Результат
ОДЗ	$x \neq -2$	знаменатель не ноль
Точки	$x = -2, 1$	границы промежутков
Знак	$(x-1)/(x+2) > 0$	ищем положительные интервалы



Типичные ошибки и как их заметить

Следите за знаком

Если делить или умножать на отрицательное число, знак неравенства обязательно меняется. Иначе ответ окажется в противоположной части числовой прямой.

Проверяйте ОДЗ

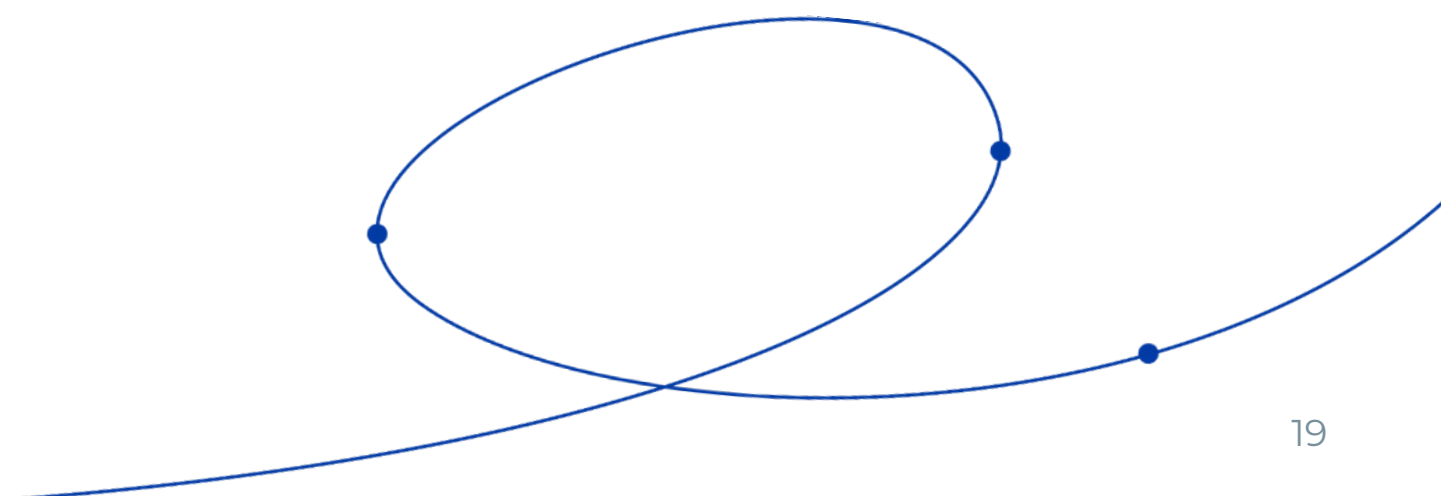
ОДЗ нельзя пропускать: даже верно решённое неравенство может дать лишние значения, если в ответ попало число, обращающее знаменатель в ноль.

Смотрите на точки

Пустая точка означает строгий знак, а закрашенная — включённую границу. Эта деталь сразу показывает, правильно ли записан ответ на прямой.

Проверяйте подстановкой

Полезно подставить крайние значения из найденного промежутка. Если неравенство не выполняется, значит в вычислениях допущена ошибка и ответ нужно пересмотреть.



Закрепляем тему: от знака к ответу

Чтобы уверенно решать неравенства с одной переменной, держите в памяти четыре опоры: знак сравнения, ОДЗ, смену знака при делении на отрицательное число и запись ответа на прямой. Для тренировки решите три линейных неравенства, одно дробное и проверьте границы подстановкой.

