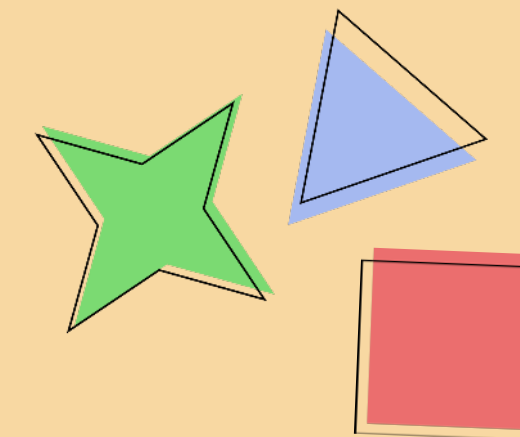
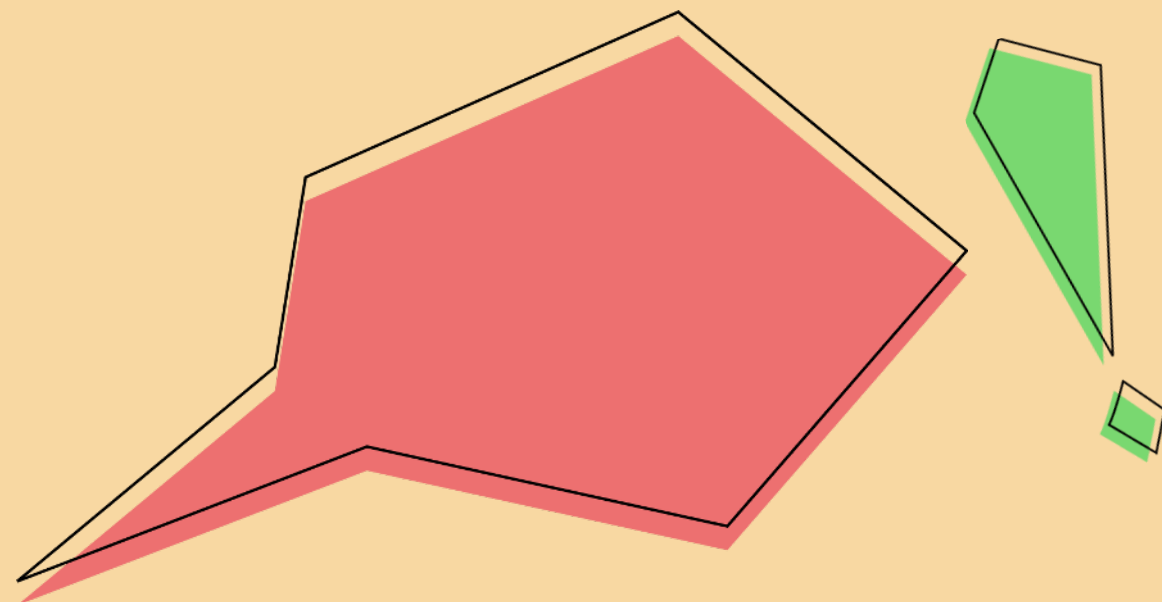
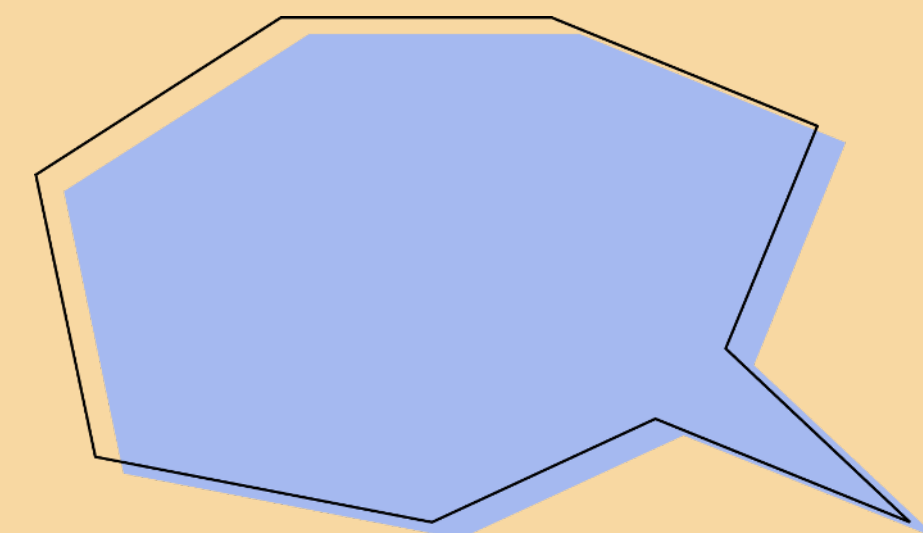
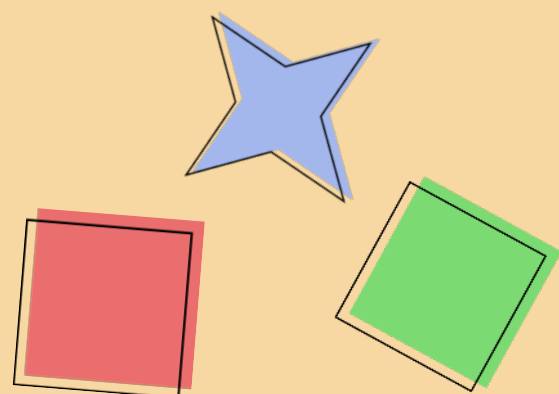




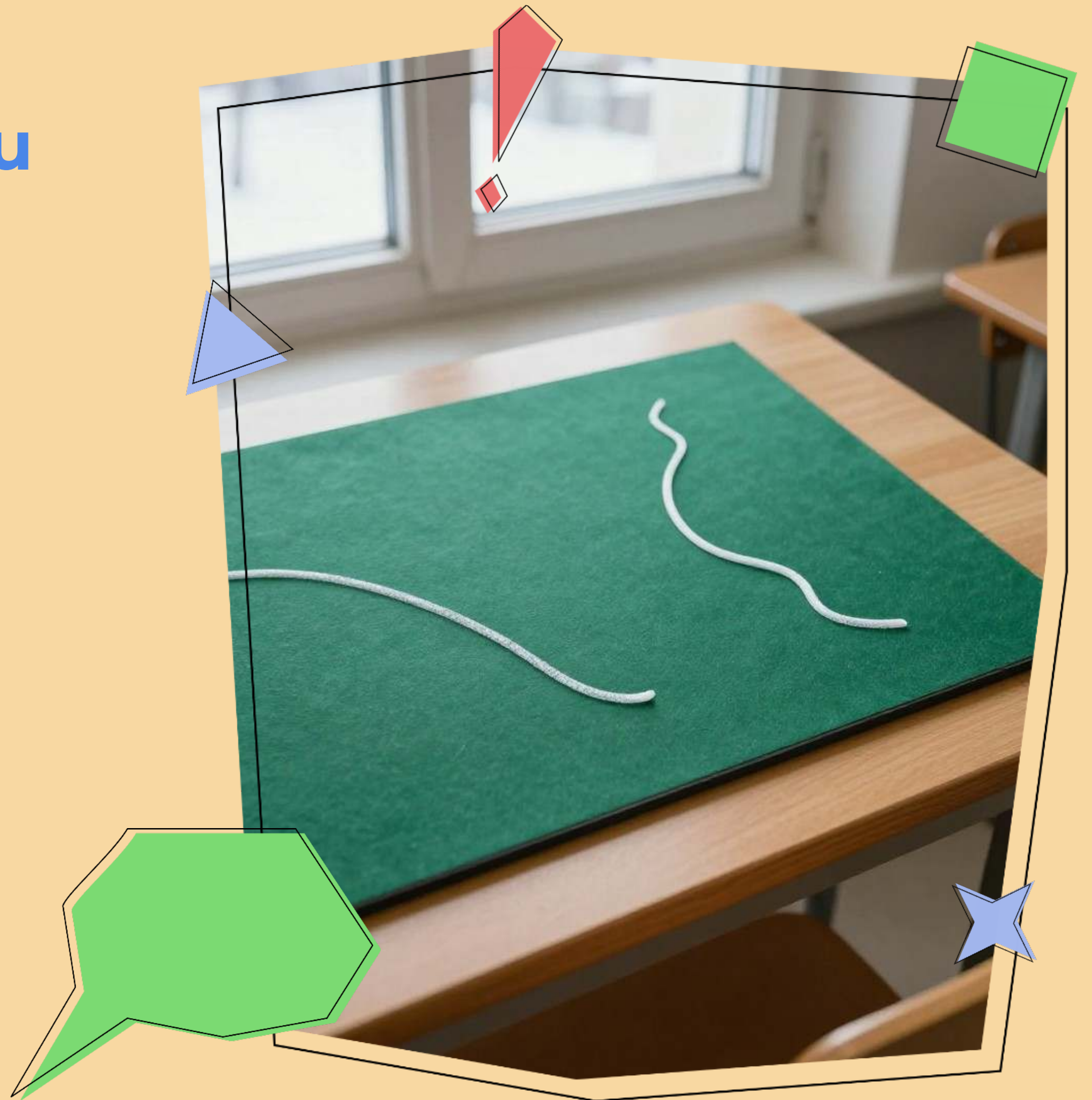
Непрерывность обратных функций: главная идея

**Непрерывность обратной функции требует условий:
биективности, непрерывности и строгой монотонности.**

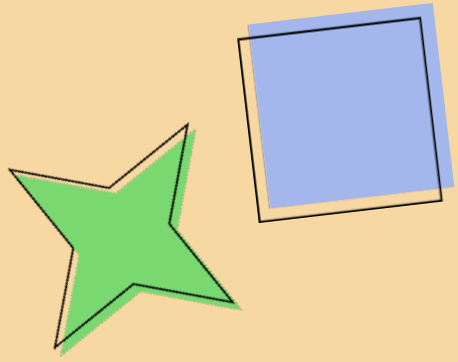


Почему это важно в школьной геометрии и алгебре

Переход от графика $y=f(x)$ к обратному $x=f^{-1}(y)$ помогает анализировать зависимости. Непрерывность означает отсутствие разрывов и «скачков», а в графиках — цельность линии. Связь с $y=x$ делает тему наглядной: она опирается на монотонность и отражение.

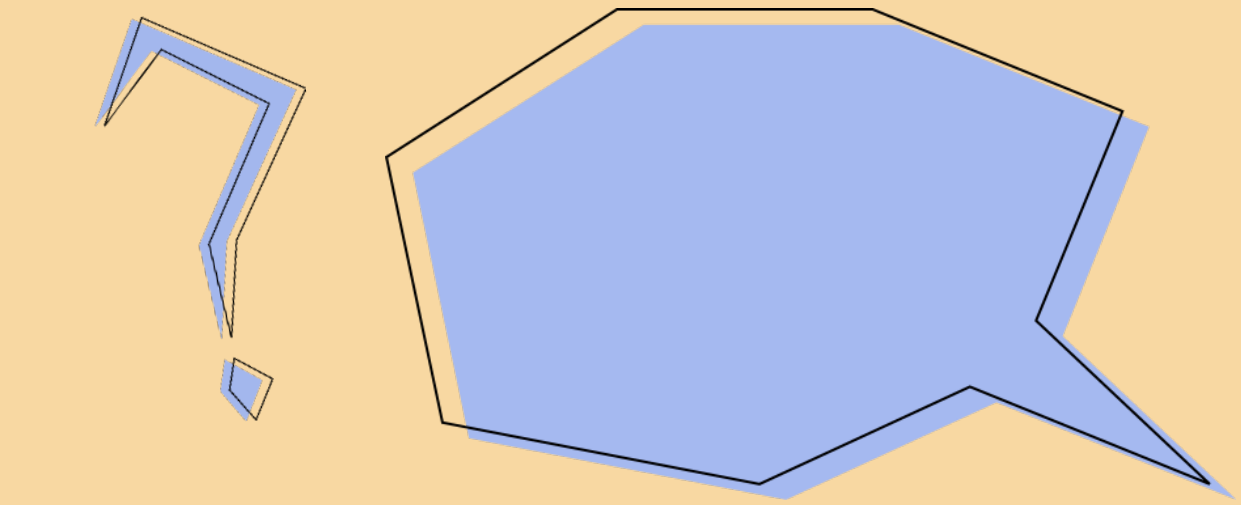


Когда обратная функция существует

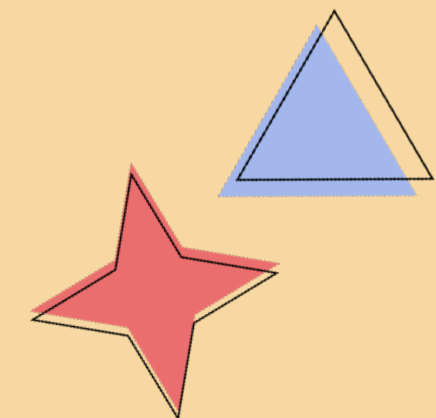


Обратная функция появляется только тогда, когда соответствие взаимно однозначно: каждому x соответствует ровно одно y , и каждому y соответствует ровно одно x . Обычно это достигается на промежутке строгой монотонностью.

Если функция неинъективна, то одному и тому же значению y могут соответствовать два разных x . Тогда «обратное» становится не одним значением, а несколькими вариантами ответа.

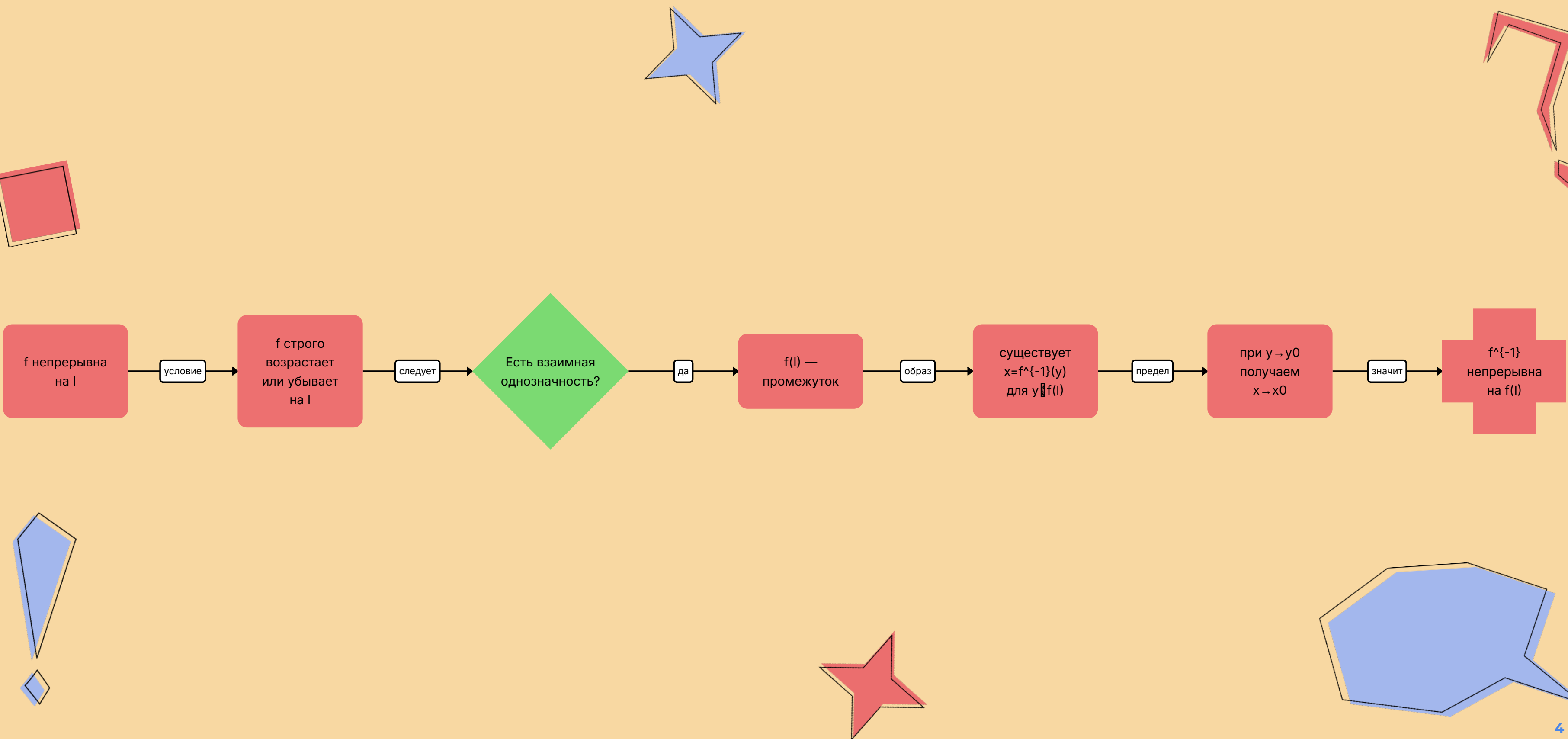


Например, $y=x^2$ на всей числовой прямой не взаимно однозначна: значения $y>0$ получаются и при положительных, и при отрицательных x , поэтому обратная функция не задаётся как однозначное правило.

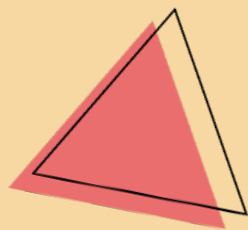
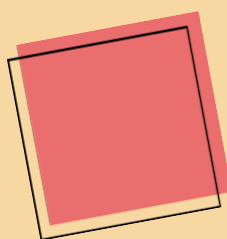


Логика теоремы о непрерывности обратной функции

От непрерывности и строгой монотонности f на I — к непрерывности f^{-1} на $f(I)$



Свойства функции и её обратной

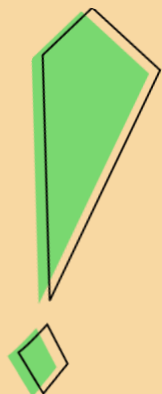
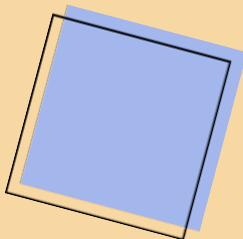
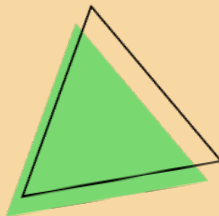


Свойство	f	f^{-1}
Область определения	I	$f(I)$
Множество значений	$f(I)$	I
Графики	$(a;b)$ на f	$(b;a)$ на f^{-1}
Монотонность	возрастает/ убывает	сохраняется как тип монотонности
Непрерывность	нужно по теореме	сохраняется на образе

Сравнение показывает, как меняются область определения, множество значений, монотонность и геометрический смысл построения.

Чтобы обратная функция была непрерывной, исходная должна быть непрерывной и строго монотонной на промежутке; тогда области и графики корректно «меняются местами» без разрывов.

Обобщение условий теоремы о непрерывности обратной функции

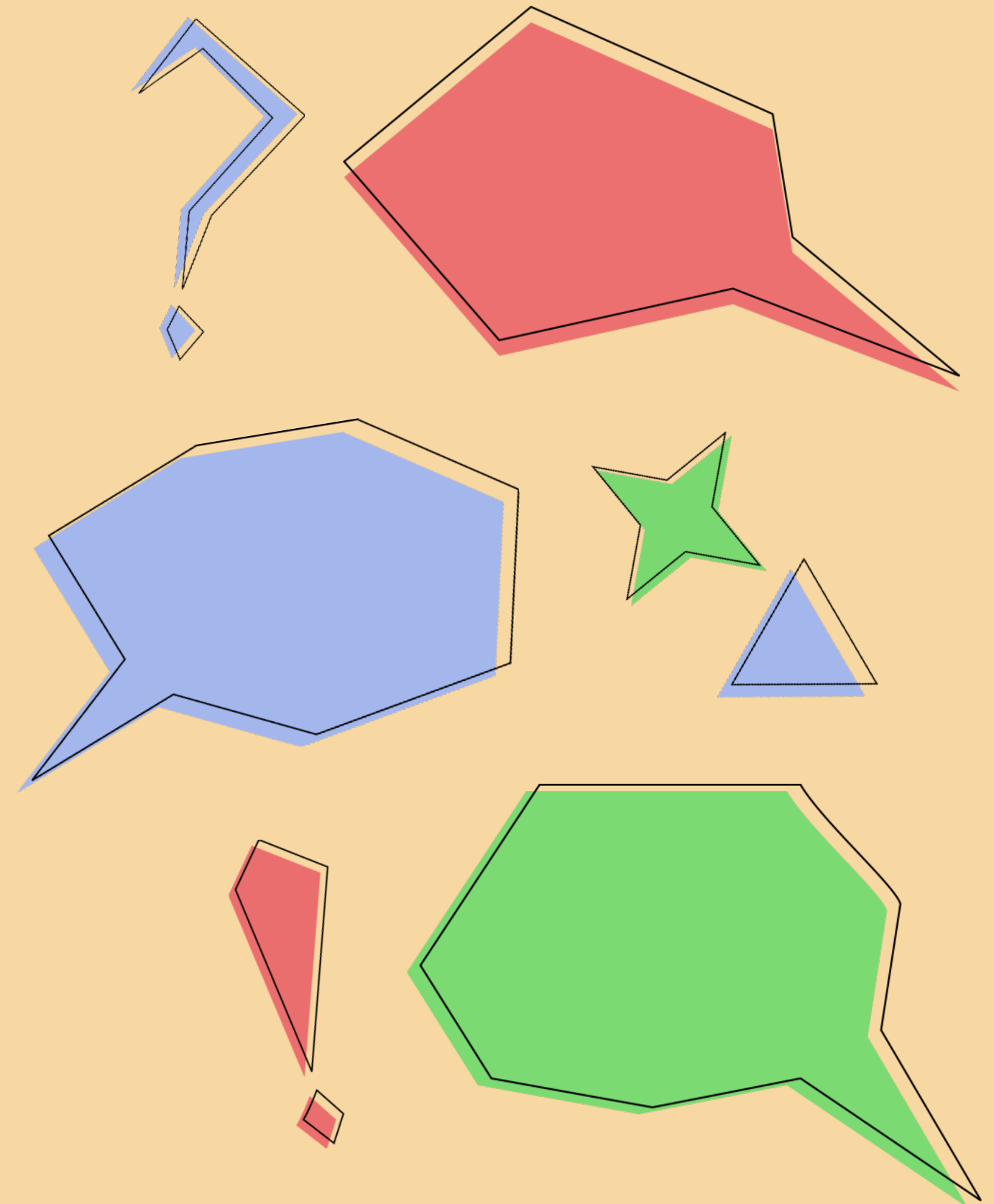
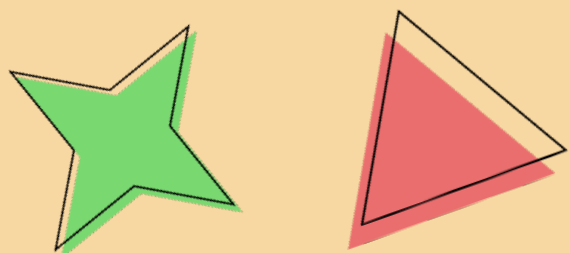


Основная теорема школьного курса

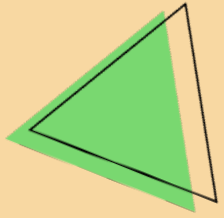
Если функция f непрерывна на промежутке I и при этом строго монотонна, то она взаимно однозначна. Следовательно, обратная функция существует на образе $f(I)$ как однозначное отображение.

Для такой обратной функции сохраняется непрерывность: её график не разрывается на $f(I)$. Это делает работу с обратными функциями предсказуемой и «безопасной» в задачах.

При возрастании f обратная тоже возрастает, а при убывании — убывает. Эта связь упрощает анализ графиков и помогает строить обратные зависимости в 11 классе.

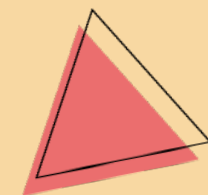
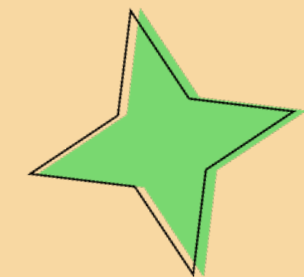


Графическая симметрия взаимно обратных функций

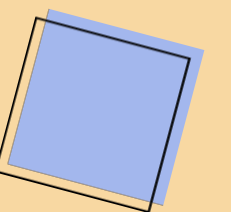


Каждое значение по оси x на графике f превращается в значение по оси y $y = f^{-1}$, поэтому ось $y=x$ становится естественной линией «разворота» координат.

Данные точки подтверждают правило: при переходе к обратной функции координаты меняются местами, а значит геометрически происходит отражение относительно $y=x$.



Собственные примеры для иллюстрации правила отражения



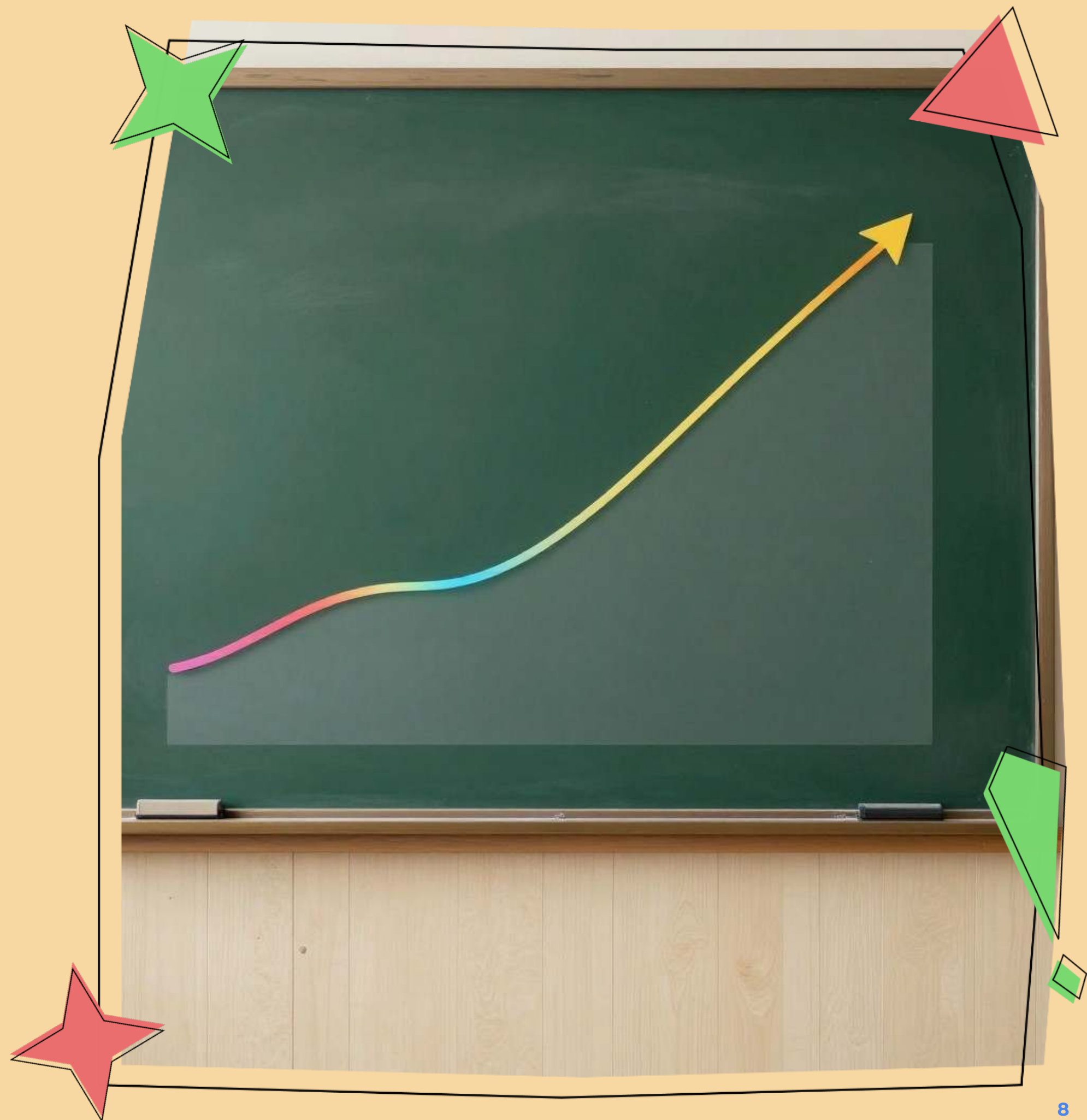
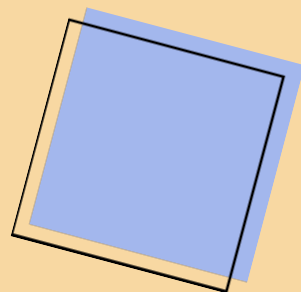
Почему графики отражаются относительно $y=x$

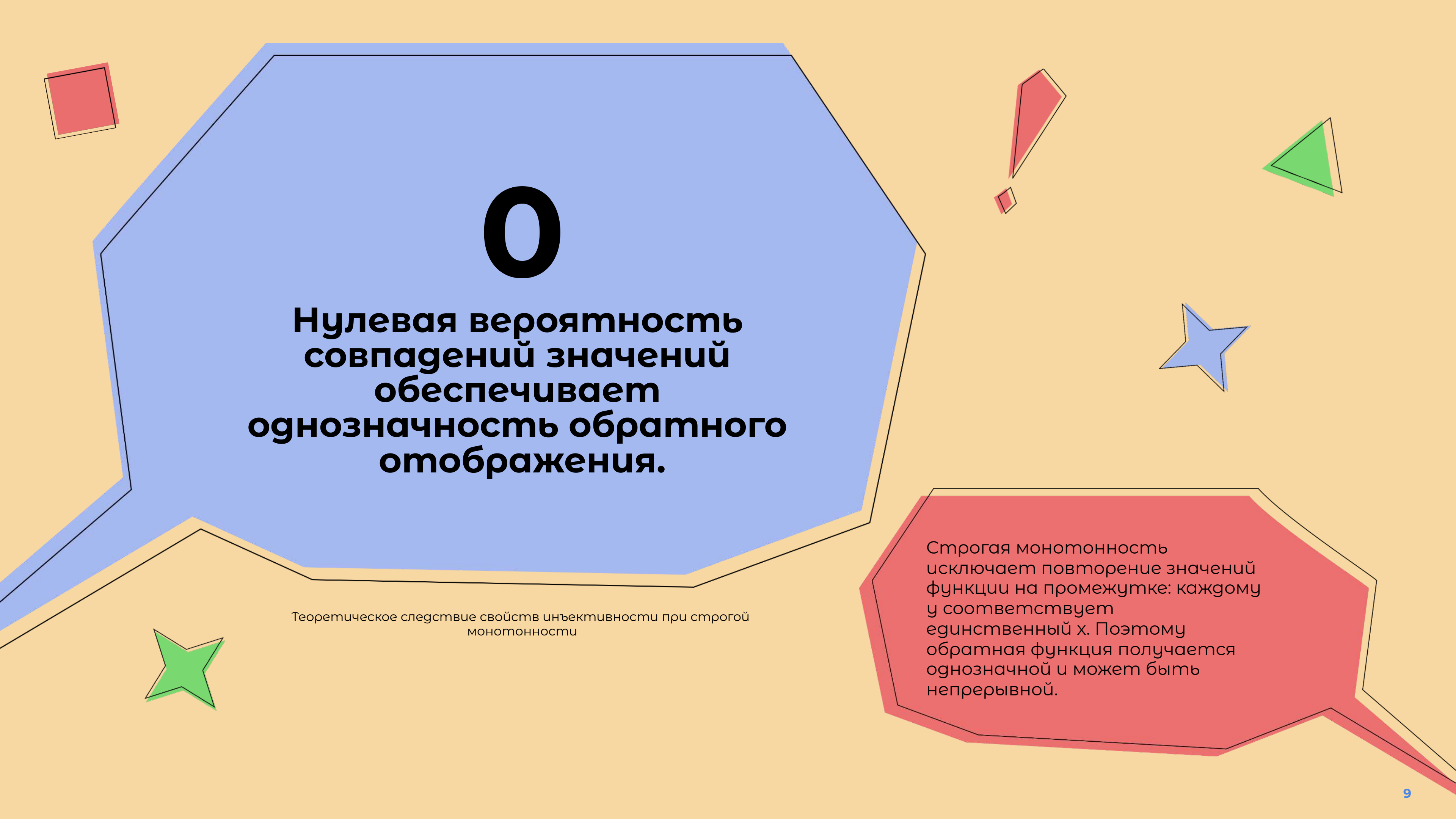
Координаты меняются местами

При построении обратного соответствия точка $(a;b)$ графика f задаёт связь « $x=a$ даёт $y=b$ ». Для обратной функции это означает: $x=b$ даёт $y=a$, то есть точка переходит в $(b;a)$.

Почему получается цельный график

Отражение относительно прямой $y=x$ как раз и реализует такую замену координат. Если исходная функция непрерывна и строго монотонна на промежутке, то после отражения не появляются петли и разрывы.





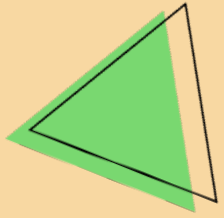
0

**Нулевая вероятность
совпадений значений
обеспечивает
однозначность обратного
отображения.**

Теоретическое следствие свойств инъективности при строгой
монотонности

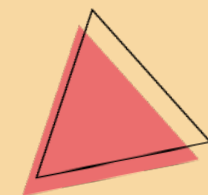
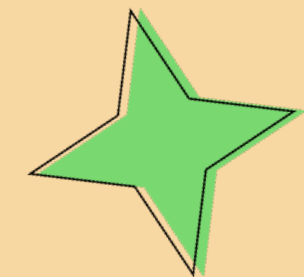
Строгая монотонность
исключает повторение значений
функции на промежутке: каждому
 y соответствует
единственный x . Поэтому
обратная функция получается
однозначной и может быть
непрерывной.

Контрпример: функция $y=x^2$ на всей числовой прямой

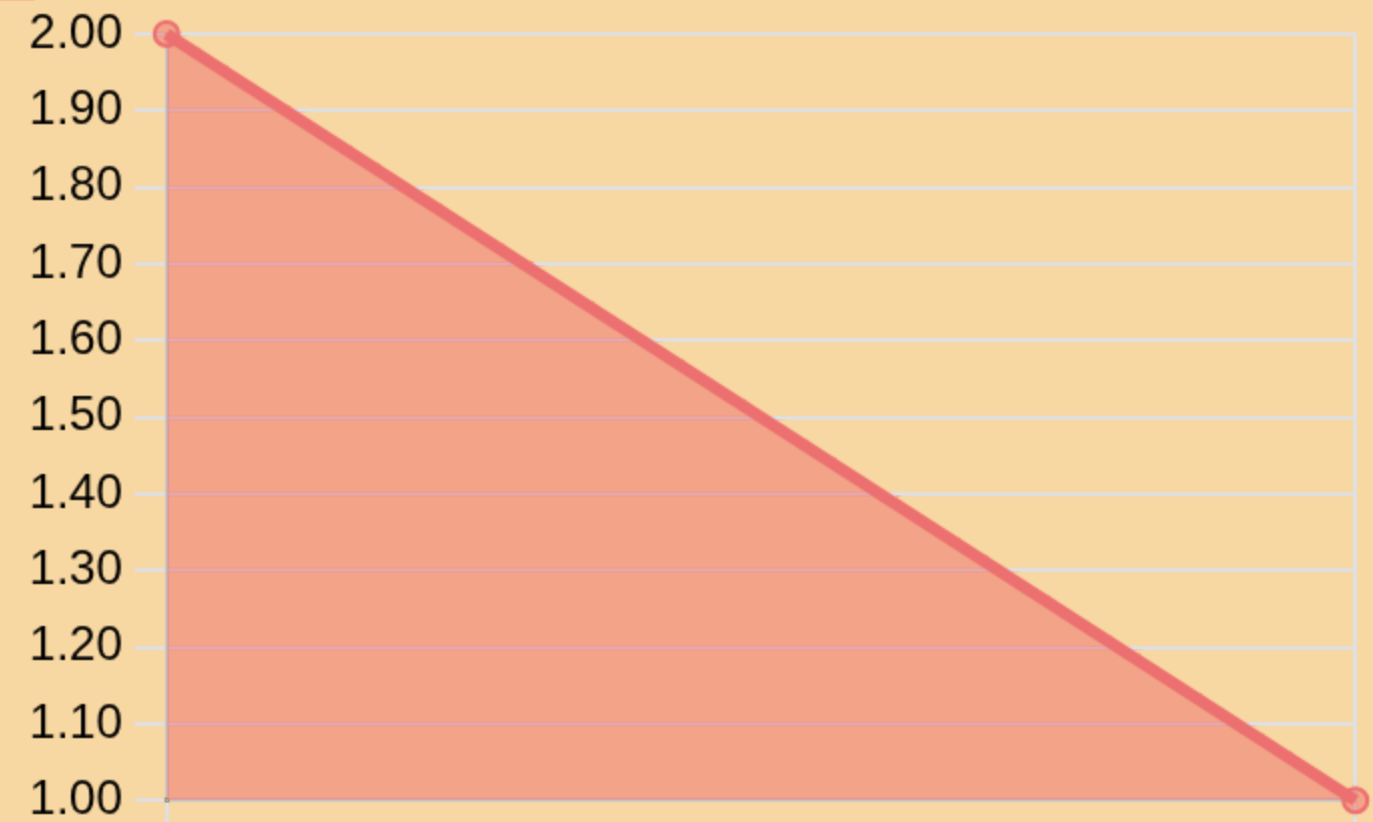


У параболы $y=x^2$ значения $y>0$ достигаются дважды: одному y соответствуют два разных x . Поэтому обратная функция не определяется как однозначное выражение на всей $\mathbb{R}$.

После ограничения, например $x\geq 0$, остаётся одна ветвь, и соответствие становится взаимно однозначным. Тогда обратной становится $y=\sqrt{x}$, а непрерывность сохраняется на $[0; +\infty)$.



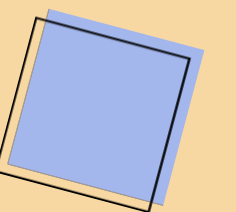
Контрпример: $y=x^2$ на всей числовой прямой и обратная неоднозначность



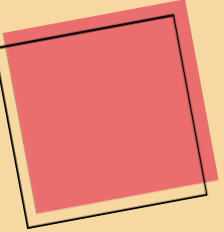
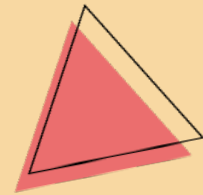
$y>0$ имеет два прообраза

ограничение $x\geq 0$ даёт одну ветвь

Иллюстрация свойств функции $y=x^2$ и её обратной при ограничении области определения



Ограничение области определения



Выбираем ветвь для $y=x^2$

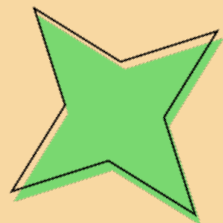
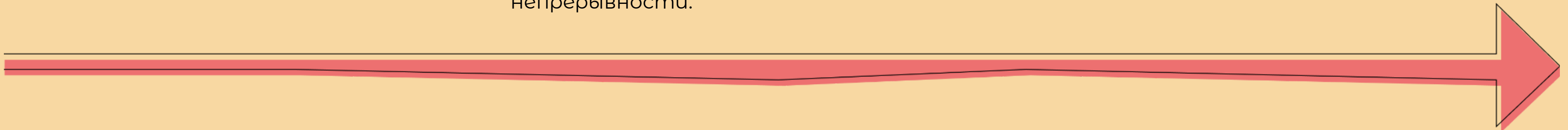
Чтобы обратная функция стала однозначной, берут не всю числовую прямую. Для $y=x^2$ выбирают область $[0; +\infty)$ или $(-\infty; 0]$ — тогда значению y соответствует ровно один x .

Свойства на выбранном промежутке

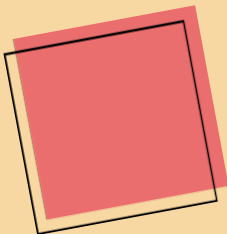
На каждом из этих промежутков исходная функция становится строго монотонной и взаимно однозначной. Именно это гарантирует существование обратной зависимости и подготавливает почву для непрерывности.

Аналогия с тригонометрией

Для $\sin x$ обратную задачу решают так же: синус ограничивают, например, на $[-\pi/2; \pi/2]$. Тогда график не «повторяет» значения, и функция $\arcsin x$ определена корректно и непрерывно на своей области.

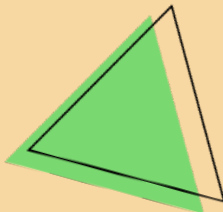


Типичные функции и их обратные

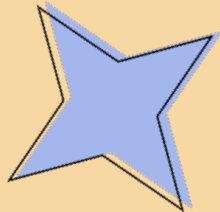


f(x)	Обратная f ⁻¹ (x)	Область для обратной
x на R	x	R
e ^{ax} на R	ln x	(0; +∞)
x ² на [0; +∞)	√x	[0; +∞)
sin x на [-π/2; π/2]	arcsin x	[-1; 1]

Школьные разделы об обратных функциях и элементарных тригонометрических/экспоненциальных функциях.



Сопоставление популярных примеров показывает, как выбор подходящего промежутка делает обратную функцию однозначной; в перечисленных случаях она оказывается непрерывной на своей области определения.



Непрерывность обратной функции в этих примерах достигается за счёт строгой монотонности f на выбранном промежутке и корректно заданной области значений.

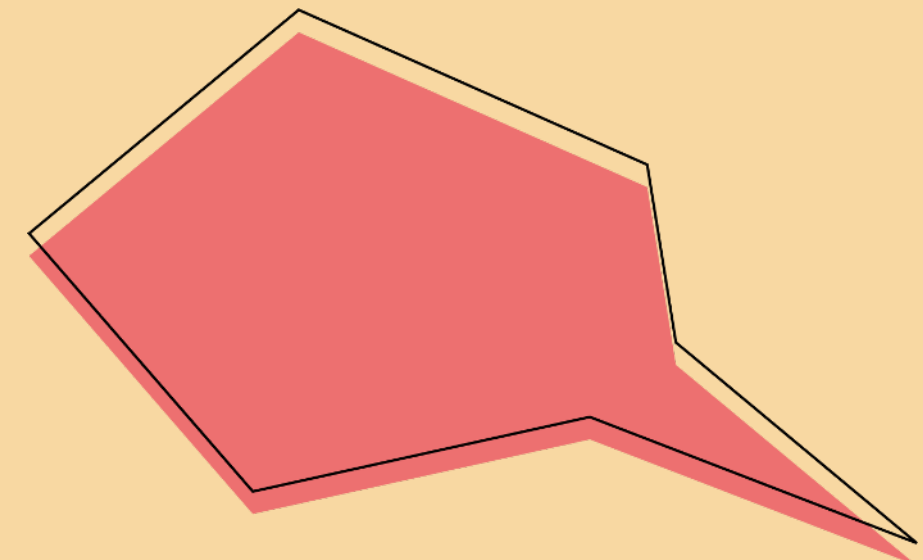
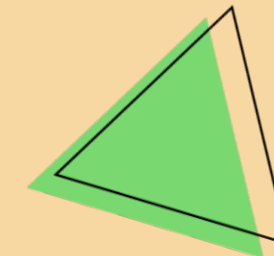
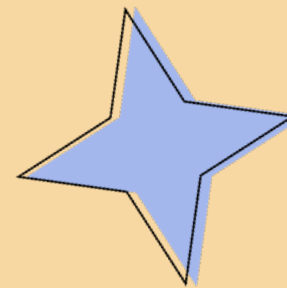
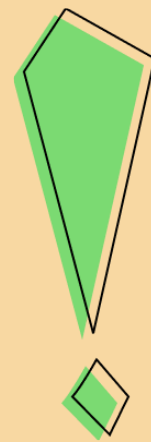
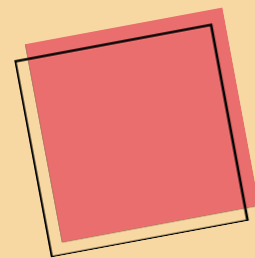
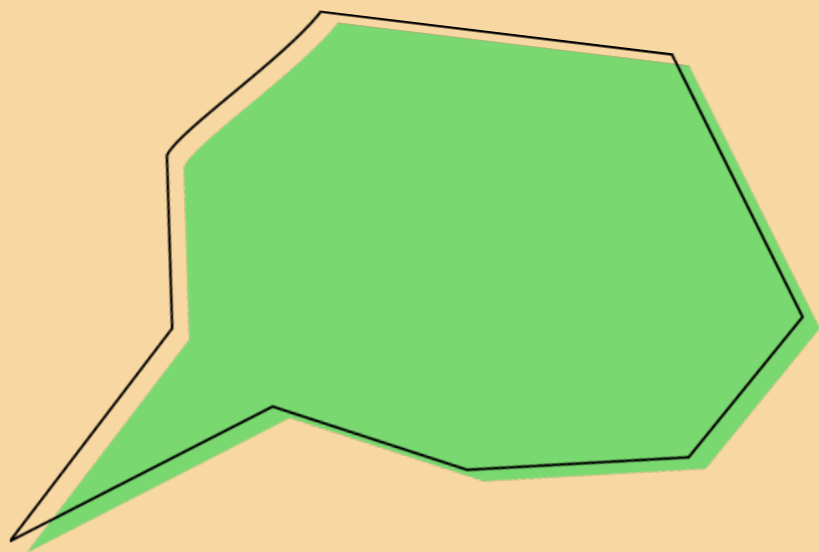
Непрерывность через пределы

Рассмотрим предельный переход: если y стремится к y_0 в области значений исходной функции, то соответствующее значение $x=f^{-1}(y)$ стремится к $x_0=f^{-1}(y_0)$. Это и есть смысл непрерывности обратной.

Когда исходная функция непрерывна и строго монотонна на промежутке, у неё нет скачков и «повторений» значений. Тогда каждому y отвечает один x , а предельный переход не приводит к разрыву.

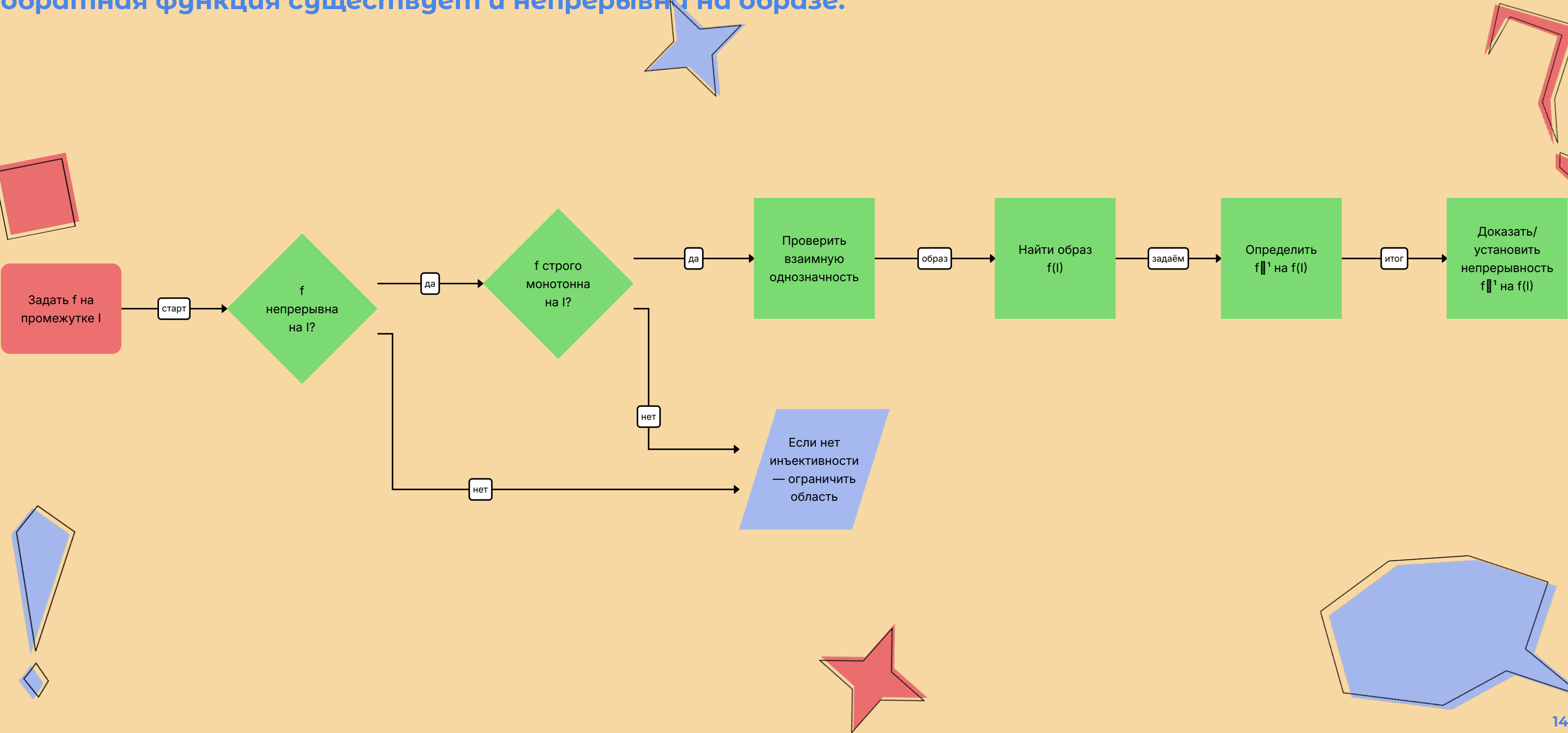
Идея особенно заметна на графиках: перемещая точку по кривой f , мы двигаемся по кривой обратной в зеркальном отражении. Строгая монотонность не даёт возникнуть петлям и многозначности.

В школьных задачах это позволяет заменять проверку «в лоб» проверкой пределов. Если $x=f^{-1}(y)$ ведёт себя без скачков при $y \rightarrow y_0$, значит обратная функция непрерывна на всём своём промежутке значений.



Проверка непрерывности обратной функции

Пошаговый алгоритм: непрерывность исходной функции + строгая монотонность на промежутке → обратная функция существует и непрерывна на образе.

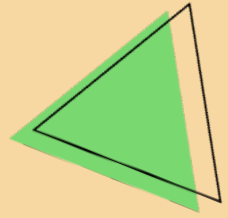


Геометрический смысл возрастания и убывания

- Для возрастающей функции близкие значения x переходят в близкие значения y : график не «перескакивает» через промежуток. Поэтому при отражении относительно $y=x$ линия остаётся цельной, без разрывов.
- Для убывающей функции порядок значений меняется, но непрерывность графика сохраняется. На зеркальном отображении относительно прямой $y=x$ обратная зависимость также не образует разрывов, хотя направление движения меняется.

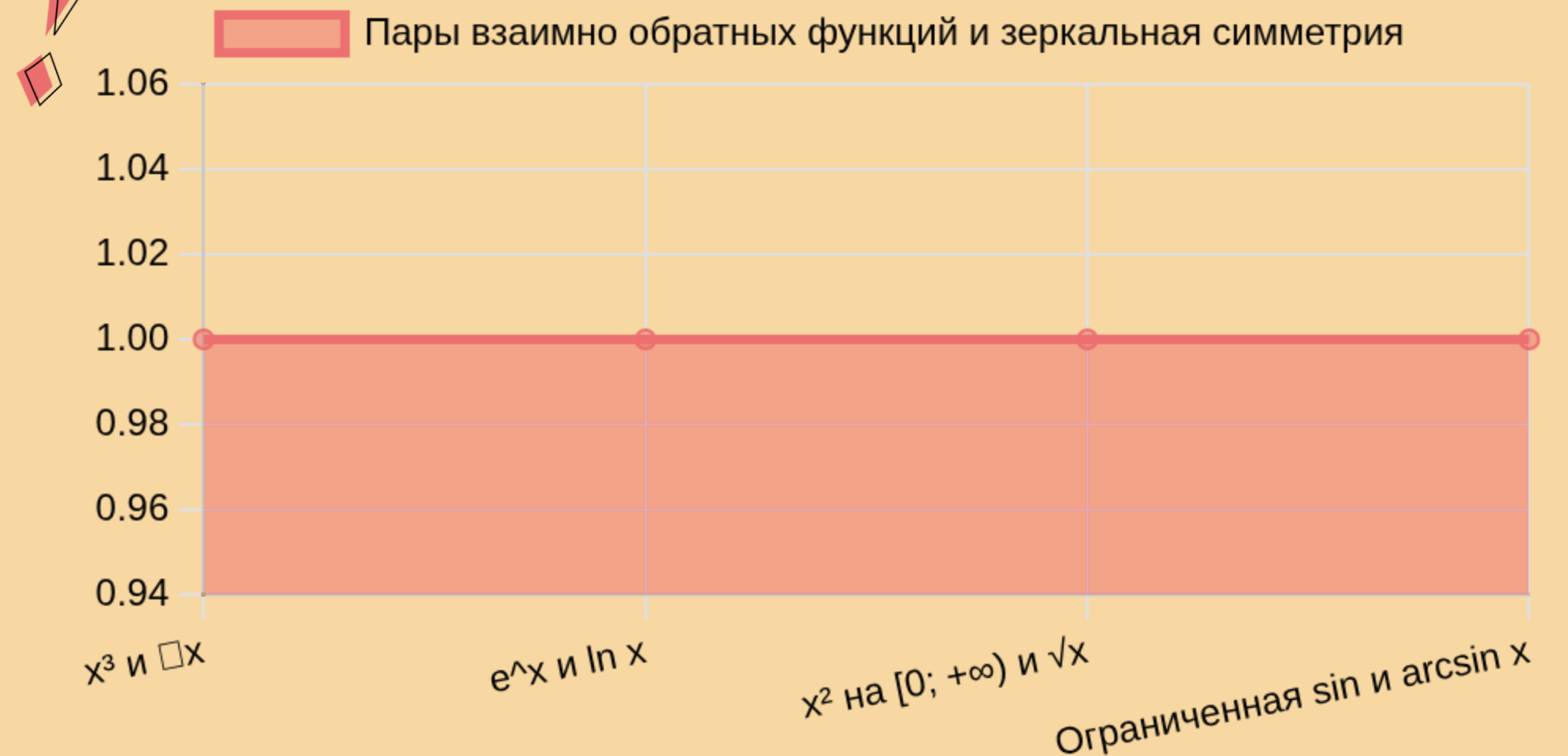
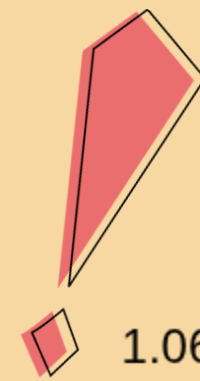
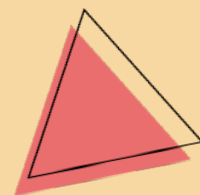
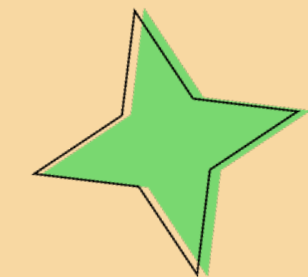


Сравнение поведения функции и обратной

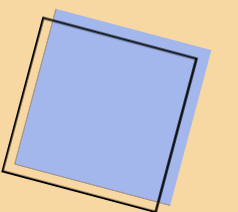


На одном рисунке удобно видеть, что отражение относительно $y=x$ меняет роли переменных, сохраняя непрерывность при выполнении условий строгой монотонности.

Из сопоставления следует: непрерывность «переходит» к обратной при корректно выбранном промежутке, но меняются область определения и множество значений, где функция однозначна.



Сопоставление графиков пар $(x^3, \sqrt[3]{x})$, $(e^x, \ln x)$, $(x^2 \text{ на } [0; +\infty), \sqrt{x})$, а также ограниченной $\sin x$ и $\arcsin x$.

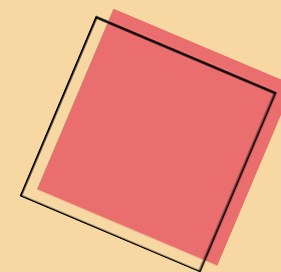
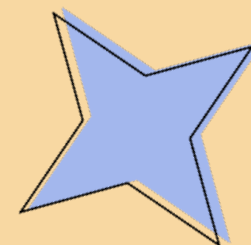
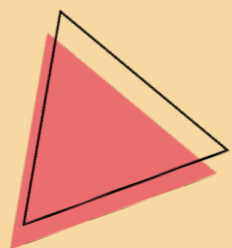
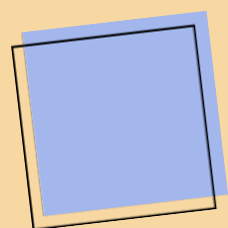
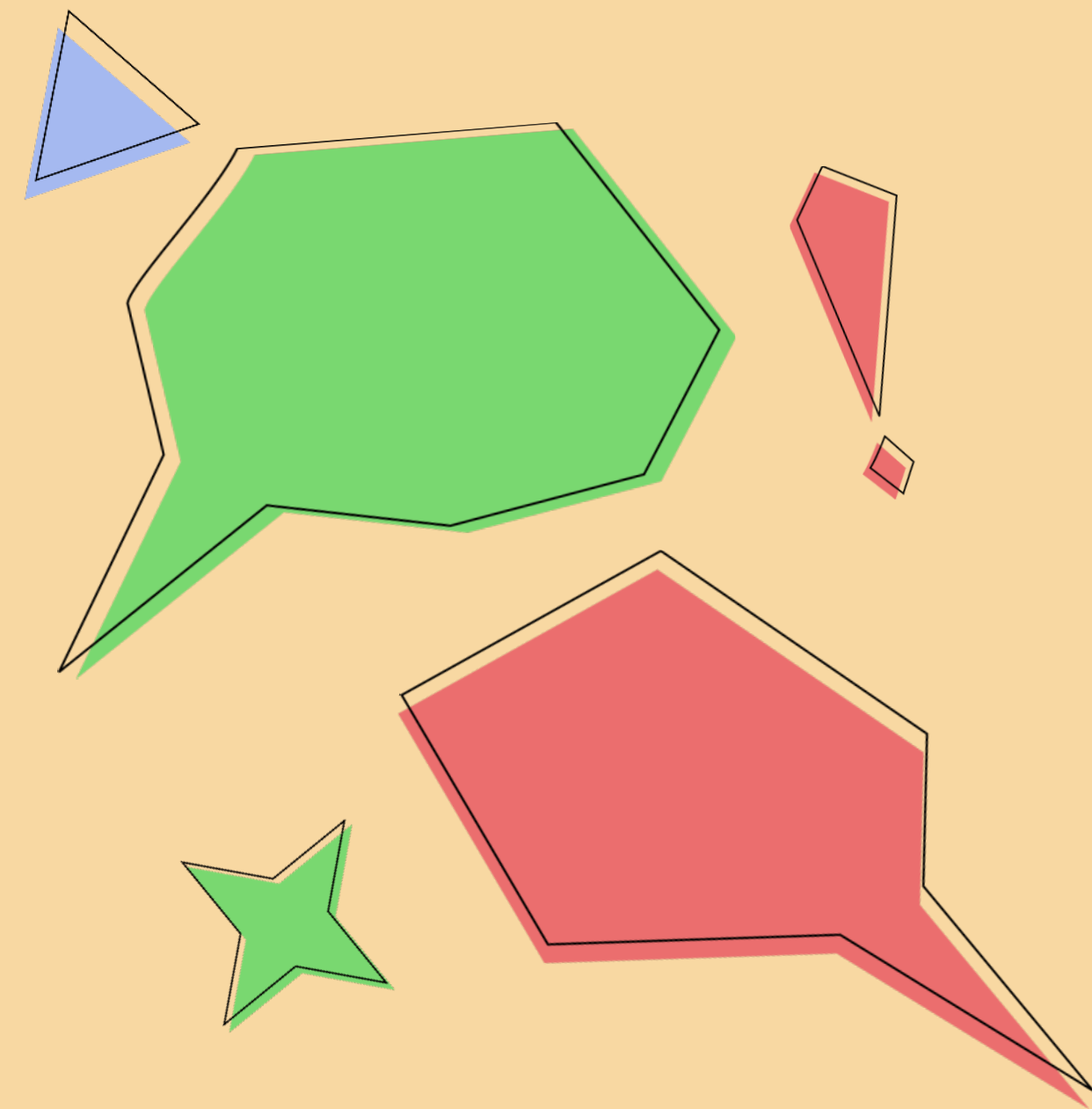


Частые ошибки при работе с обратными функциями

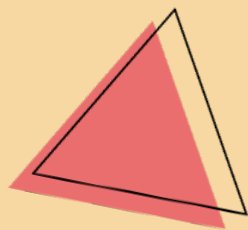
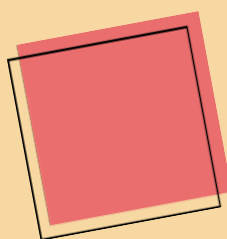
Первая ошибка — считать обратной любой функцию без проверки взаимной однозначности. Если одно значение y соответствует двум разным x , обратная функция как однозначное отображение не существует.

Третья ошибка — игнорировать ограничение области определения для функций вроде $y=x^2$ и $y=\sin x$. На всей области они не инъективны, поэтому нужно выбрать промежуток, где функция становится строго монотонной.

Вторая ошибка — путать существование обратного соответствия с его непрерывностью. Даже когда обратное отображение можно выписать, важно проверить, что при предельных переходах нет скачков в обратной переменной.



Мини-критерии для запоминания

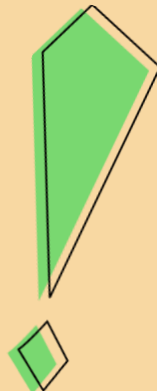
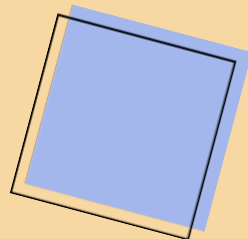
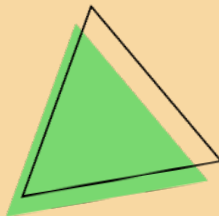


Условие	Что это даёт
Непрерывность f	Нет разрывов на I
Строго монотонна f	Инъективность (однозначность)
Взаимная однозначность	Обратная существует
$f(I)$ — промежуток	Обратная определена на промежутке
Непрерывность f^{-1}	Нет скачков на образе

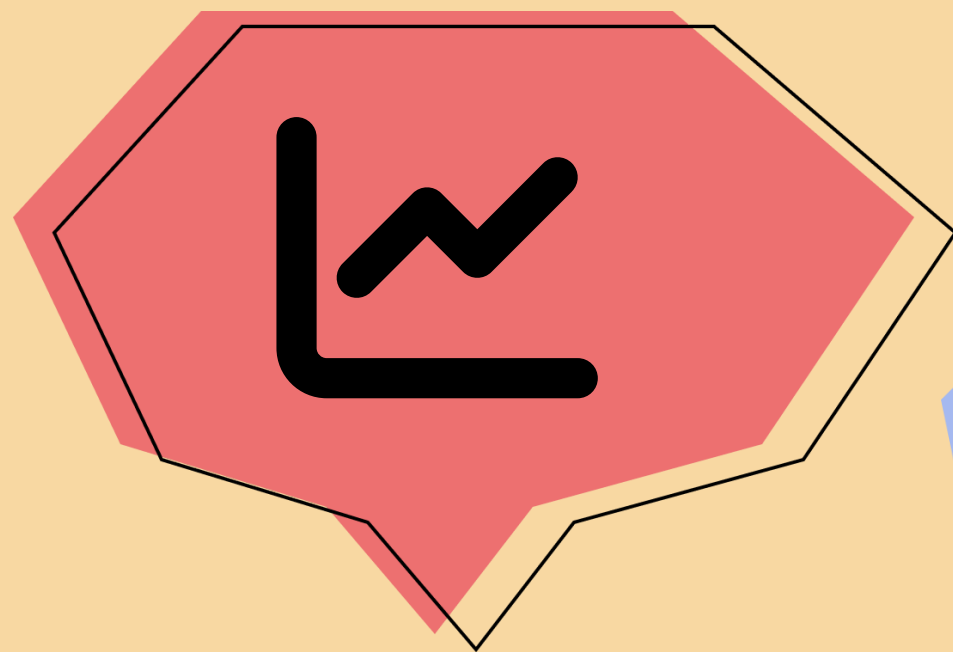
В таблице фиксируются опорные условия: если выполняются непрерывность и строгая монотонность на промежутке, то обратная функция существует и непрерывна на образе; при нарушении любого условия требуется дополнительное ограничение.

Если хотя бы одно условие не выполнено, обратная функция может стать многозначной или разрывной; тогда корректируют промежуток, где функция строго монотонна.

Обобщение теоремы о непрерывности обратной функции для школьного курса.

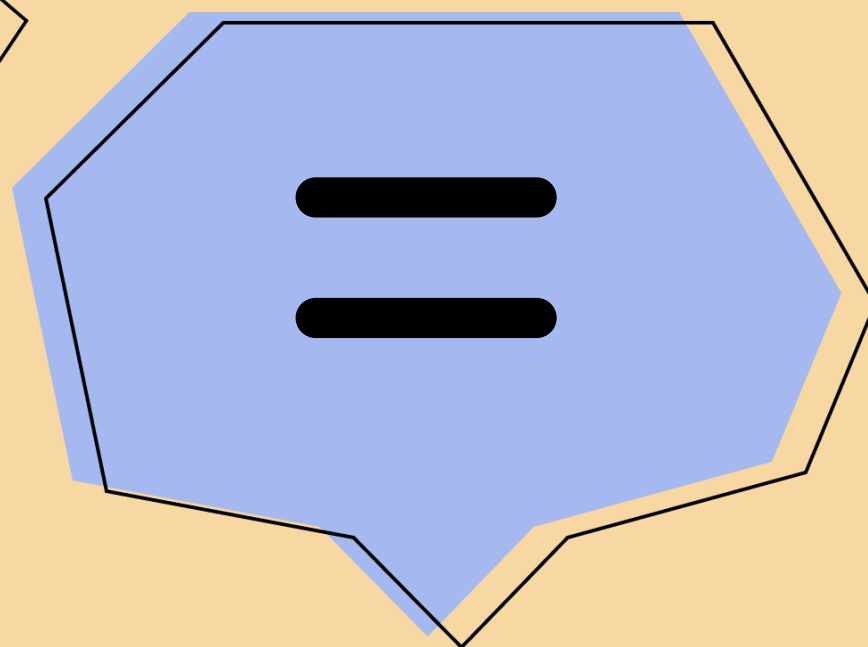
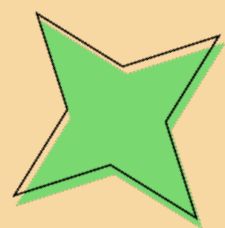


Связь с другими темами 11 класса



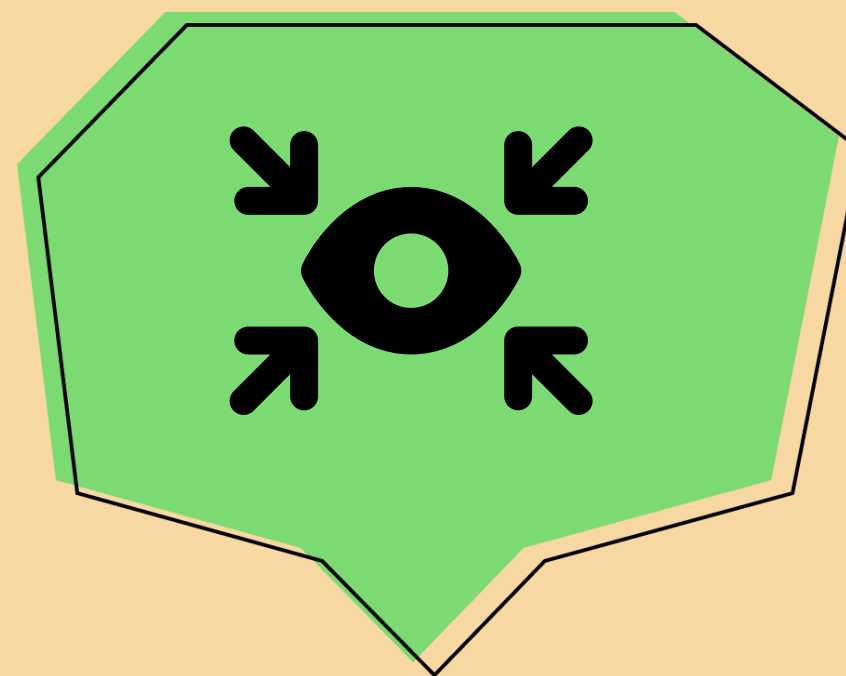
Исследование графиков

В задачах по графикам приходится анализировать непрерывность, монотонность и область значений. Понимание обратных функций помогает уверенно переходить от уравнений вида $f(x)=a$ к обратным зависимостям.



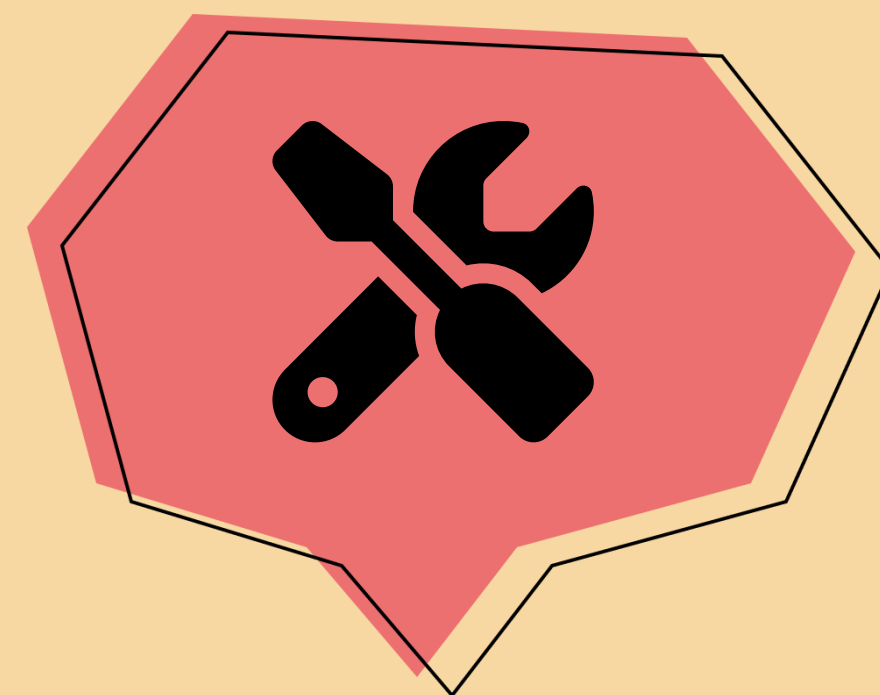
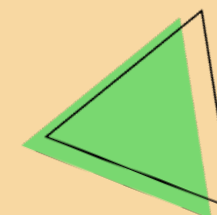
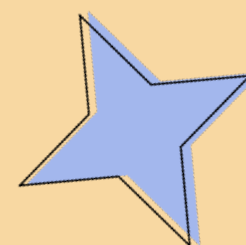
Решение уравнений

Когда уравнение приводится к виду $f(x)=y$, обратная функция упрощает поиск x . При этом важно помнить о выборе промежутка, где f инъективна, иначе ответы могут оказаться неверными.



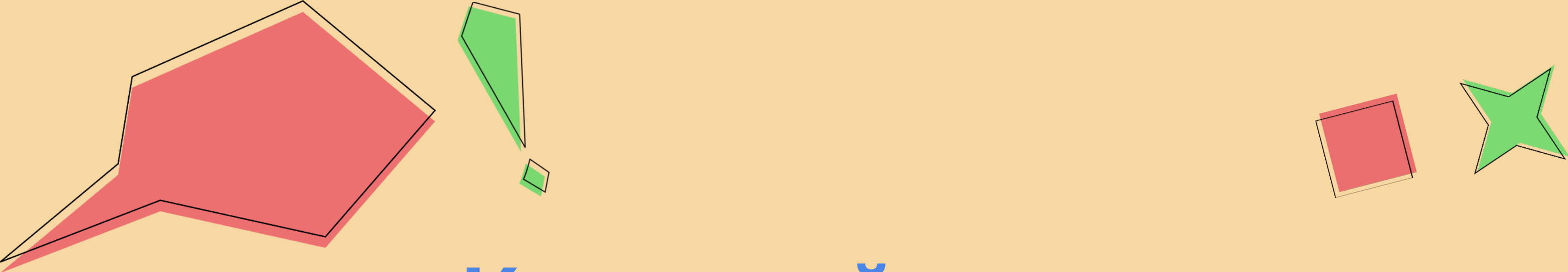
Преобразования графиков

Отражение относительно прямой $y=x$ — это геометрический язык для построения обратной функции. Такой подход напрямую связан с задачами на преобразования графиков и их свойствами.



Подготовка к производной обратной

Дальнейшее изучение производной обратной функции опирается на то, что f^{-1} корректно определена. Практика выбора промежутка монотонности снижает риск ошибок в последующих выводах и вычислениях.



Ключевой вывод: непрерывность — при строгой монотонности

Непрерывность обратной функции обеспечивается, если исходная функция непрерывна и строго монотонна на промежутке. Тогда она взаимно однозначна, обратная существует и тоже непрерывна на образе: на промежутке строгой монотонности обратная «не разрывается».

