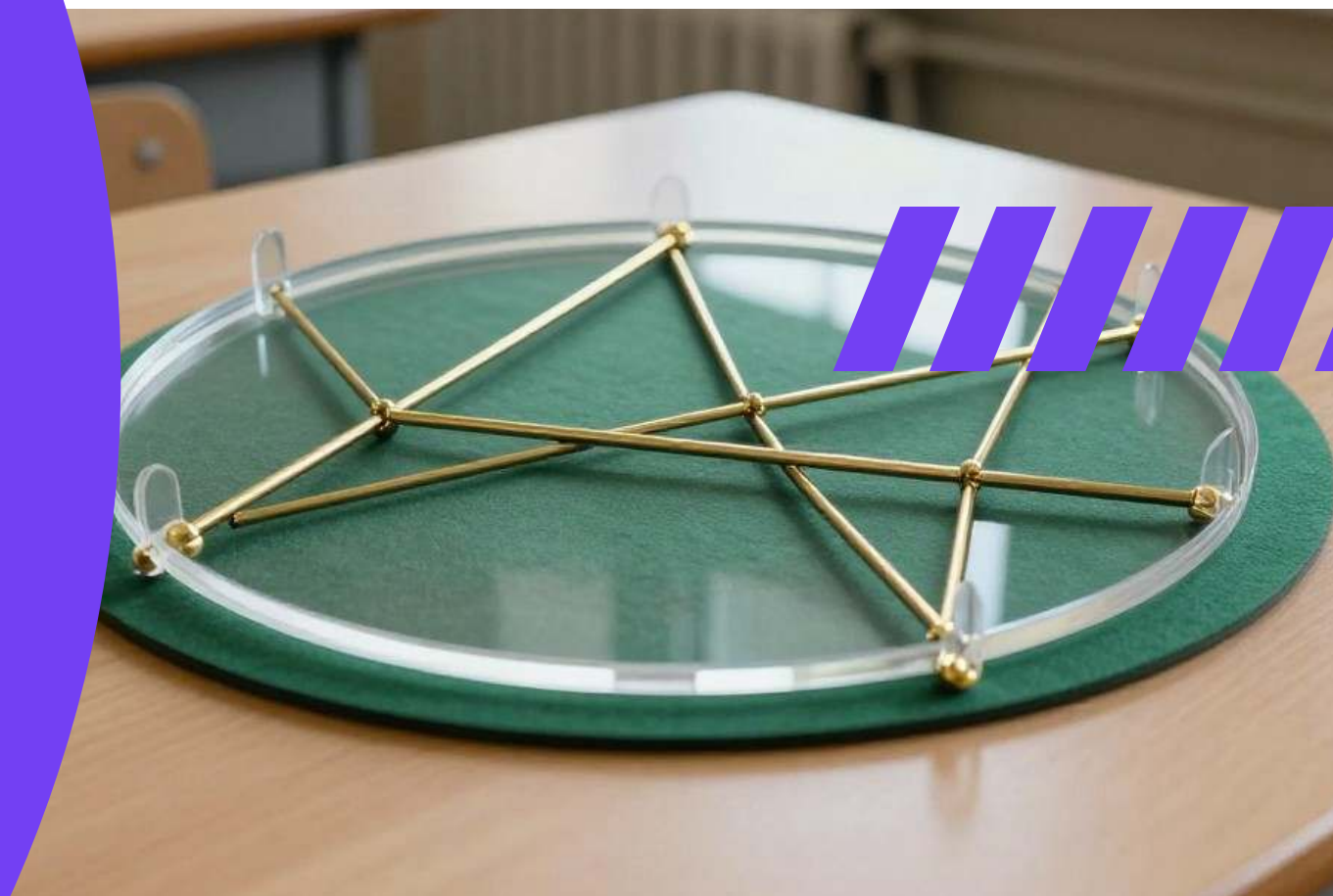


Многоугольники , вписанные в окружность



Окружность, углы, хорды и правильные многоугольники.

Почему эта тема важна



Вписанные многоугольники встречаются в узорах, знаках и часах. Они помогают быстро находить углы и стороны, а также готовят к задачам по окружности и планиметрии в 9 классе.

Определение вписанного многоугольника



○ Все вершины на окружности

Многоугольник называют вписанным, если каждая его вершина лежит на одной окружности. Именно это условие делает фигуру связанной с дугами, хордами и углами окружности.

○ Стороны как хорды

Любая сторона вписанного многоугольника соединяет две точки окружности, значит, она является хордой. Поэтому длины и углы такой фигуры можно изучать через свойства окружности.

○ Порядок вершин важен

Вершины располагаются по окружности в определённой последовательности, а стороны соединяют соседние точки. Благодаря этому фигура не «ломается» и сохраняет замкнутый вид внутри окружности.

○ Подходит для разных фигур

Такое определение одинаково работает для треугольника, четырёхугольника, пятиугольника и любого другого многоугольника. Главное условие одно: все вершины должны лежать на одной окружности.



Как выглядит вписанный многоугольник на чертеже



□ Окружность и вершины

На рисунке сначала видно окружность, а затем точки на её границе — это вершины многоугольника. Между ними проводят отрезки, которые образуют стороны фигуры.

□ Стороны и диагонали

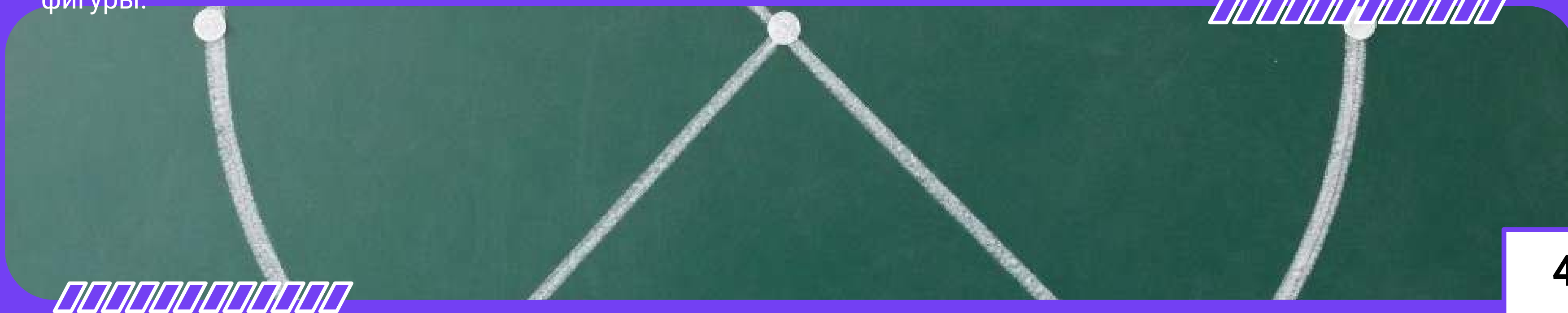
Соседние вершины соединяются сторонами, а любые две несоседние вершины — диагоналями. И стороны, и диагонали являются хордами, потому что их концы лежат на окружности.

□ Центр не мешает

Центр окружности может находиться внутри многоугольника, но это не означает, что фигура обязательно правильная. Важно не положение центра, а расположение всех вершин на одной окружности.

□ Проверка по рисунку

Чтобы убедиться, что многоугольник вписан, нужно проверить одну вещь: все ли его вершины лежат на одной и той же окружности. Если хотя бы одна точка не подходит, условие нарушено.



Вписанный четырёхугольник и его главный признак

01

Главное условие

Четырёхугольник считается вписанным, если все его четыре вершины лежат на одной окружности. Это условие удобно проверять по углам, не выполняя построение всей окружности.

02

Сумма противоположных углов

Для любого вписанного четырёхугольника сумма противоположных углов равна 180° . Это значит, что один угол сразу помогает найти второй, если они расположены напротив друг друга.

03

Простой расчёт

Если угол А равен 110° , то противоположный ему угол С равен 70° , потому что вместе они дают 180° . Такие задачи решаются быстро и без лишних действий.

04

Признак проверки

Если в четырёхугольнике сумма пары противоположных углов равна 180° , это сильный признак того, что около него можно описать окружность. Свойство часто используют в доказательствах.

Основные угловые свойства, связанные с окружностью



Основные свойства окружности и вписанных углов из школьного курса геометрии

Связи между дугами, хордами и углами позволяют решать большинство задач на окружность.

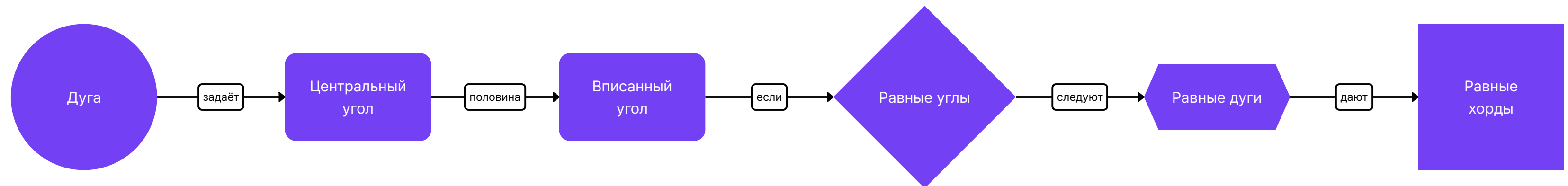
Элемент	Свойство	Связь
Центральный угол	Равен дуге	$\sphericalangle = \text{дуга}$
Вписанный угол	Половина дуги	$\sphericalangle = \frac{1}{2} \text{ дуги}$
Два вписанных угла	На одну дугу	Равны
Вписанный четырёхугольник	Противоположные углы	180°
Равные хорды	Стягивают дуги	Дуги равны

Чаще всего нужно переходить от одной фигуры к другой: дуга задаёт угол, а угол помогает восстановить дугу или хорду.



Как связаны дуга, хорда и углы

Последовательность свойств, на которых строятся решения задач по окружности.

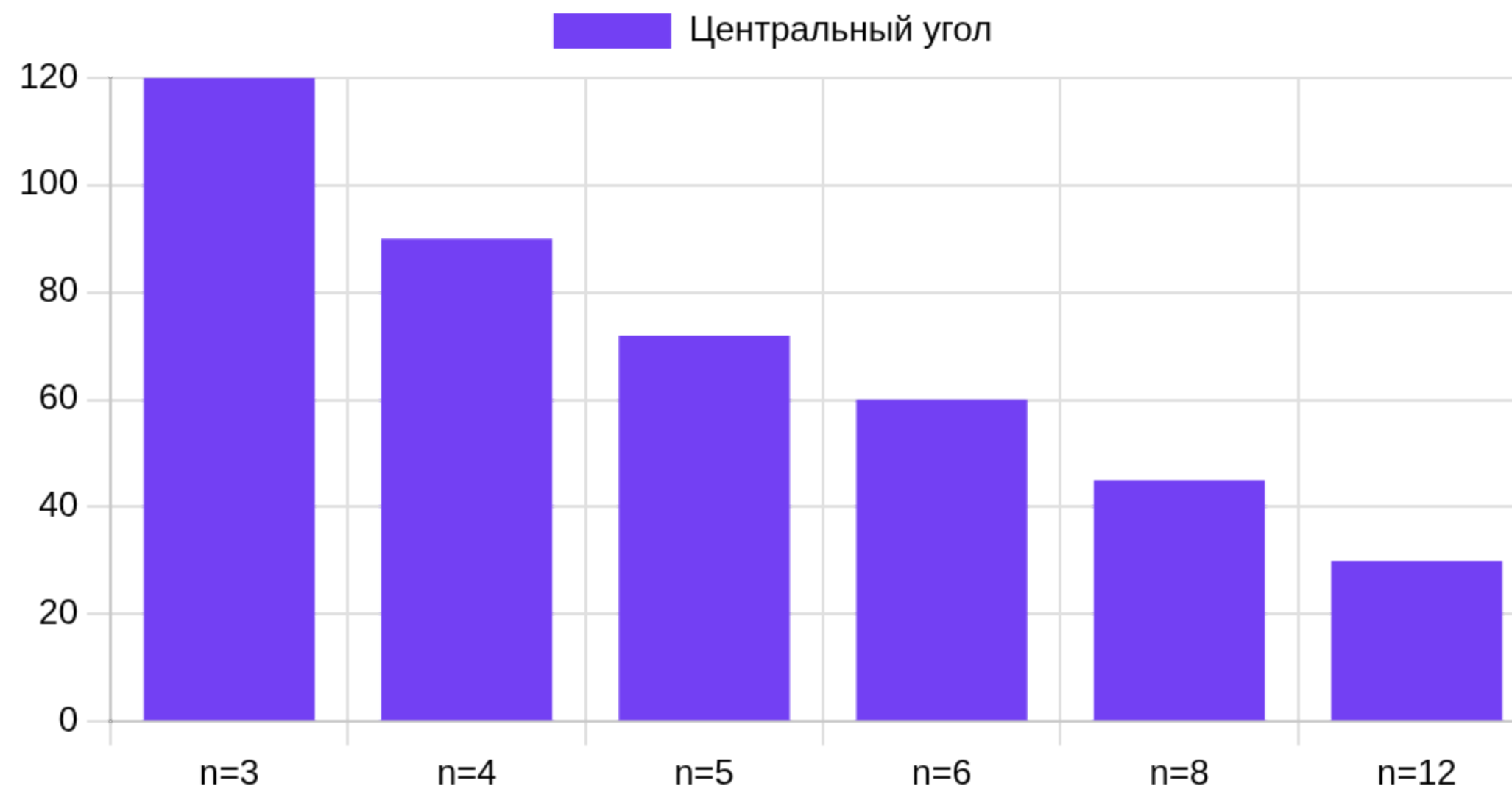


Центральные углы правильных вписанных многоугольников



Здесь показано, как деление окружности на равные части определяет вид правильной фигуры. Формула $360^\circ/n$ работает для любого числа сторон.

Расчёт по формуле центрального угла
правильного n-угольника: $360^\circ/n$



Чем больше сторон, тем меньше центральный угол, а форма многоугольника становится ближе к окружности.

Правильный вписанный многоугольник

1. Равные стороны и углы

Правильный вписанный многоугольник отличается тем, что все его стороны равны, и все углы тоже равны. Такая фигура выглядит особенно симметрично и удобно изучается через окружность.

2. Равные дуги

Его вершины делят окружность на одинаковые дуги. Поэтому каждая часть окружности между соседними вершинами имеет одинаковую меру, а фигура сохраняет полную симметрию.

3. Формула центрального угла

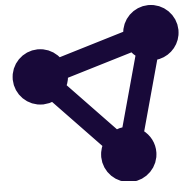
Центральный угол одного сектора равен $360^\circ/n$, где n — число сторон. Эта формула сразу показывает, какую часть круга занимает каждая сторона многоугольника.

4. Полезные примеры

Для шестиугольника центральный угол равен 60° , а для квадрата — 90° . Такие примеры помогают быстро проверять ответы и понимать, как устроена правильная фигура.

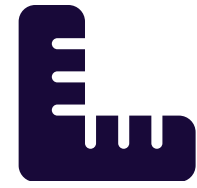


Треугольник, вписанный в окружность



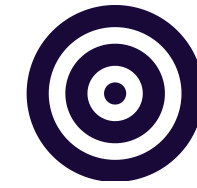
Любой треугольник

Любой треугольник можно вписать в окружность. Эта окружность называется описанной около треугольника и проходит через все три его вершины.



Центр окружности

Центр описанной окружности находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Эта точка одинаково удалена от всех вершин.



Прямоугольный случай

В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы. Это свойство часто используют в задачах на построение и измерение.

Четырёхугольник и теорема Птолемея

01

Условие вписанности

Если все вершины четырёхугольника лежат на одной окружности, к нему можно применить теорему Птолемея. Это сразу связывает диагонали и стороны и помогает работать без дополнительных построений.

02

Формула Птолемея

Для вписанного четырёхугольника произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон: $ef = ac + bd$. Формула особенно полезна, когда известны три стороны и одна диагональ.

03

Практический смысл

Теорема Птолемея часто служит ключом к нахождению неизвестных длин в более сложных задачах. Она дополняет угловые свойства окружности и показывает, как геометрия помогает выполнять точные вычисления.

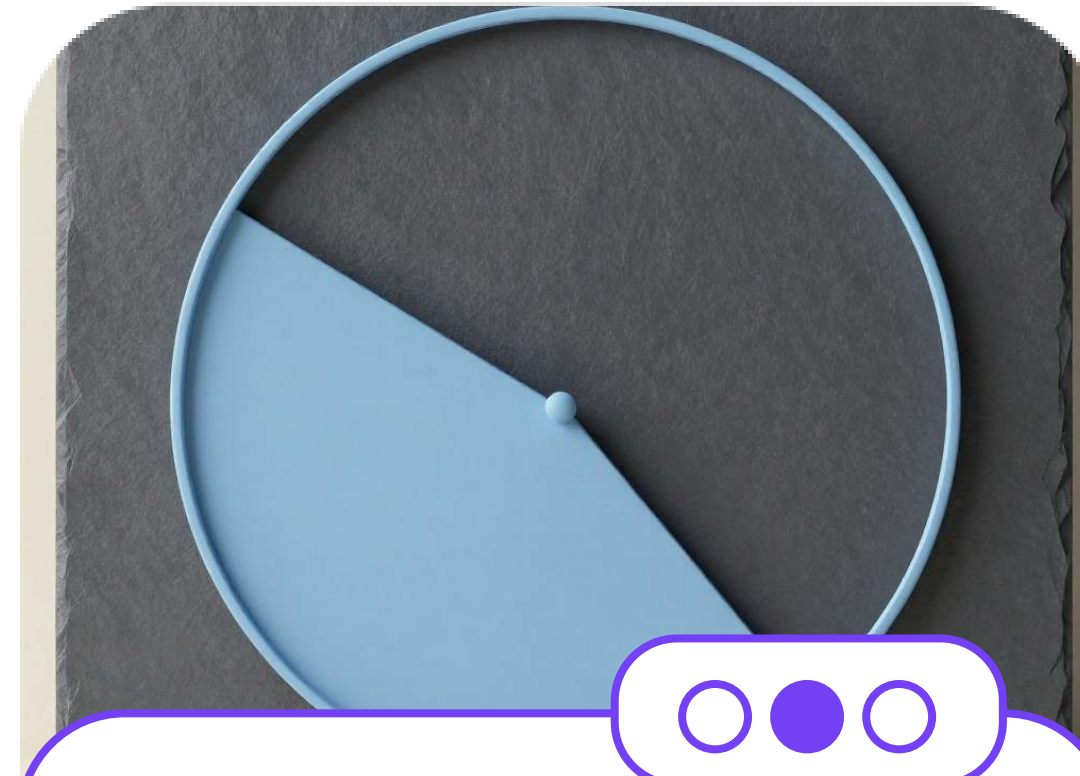


Построение правильного шестиугольника



Шесть одинаковых шагов по окружности

Построение начинается с окружности и выбранного радиуса циркуля. Затем этим же раствором последовательно откладывают хорду на окружности шесть раз, и точки соединяют по порядку. Получается аккуратный правильный шестиугольник, у которого все стороны равны.



Почему сторона равна радиусу

Для шестиугольника каждый центральный угол равен 60° , поэтому соседние вершины на окружности разделены одинаковыми дугами. Если взять радиус окружности как длину хорды, то он точно совпадёт со стороной многоугольника, что делает построение особенно удобным.



Геометрия, которую легко увидеть

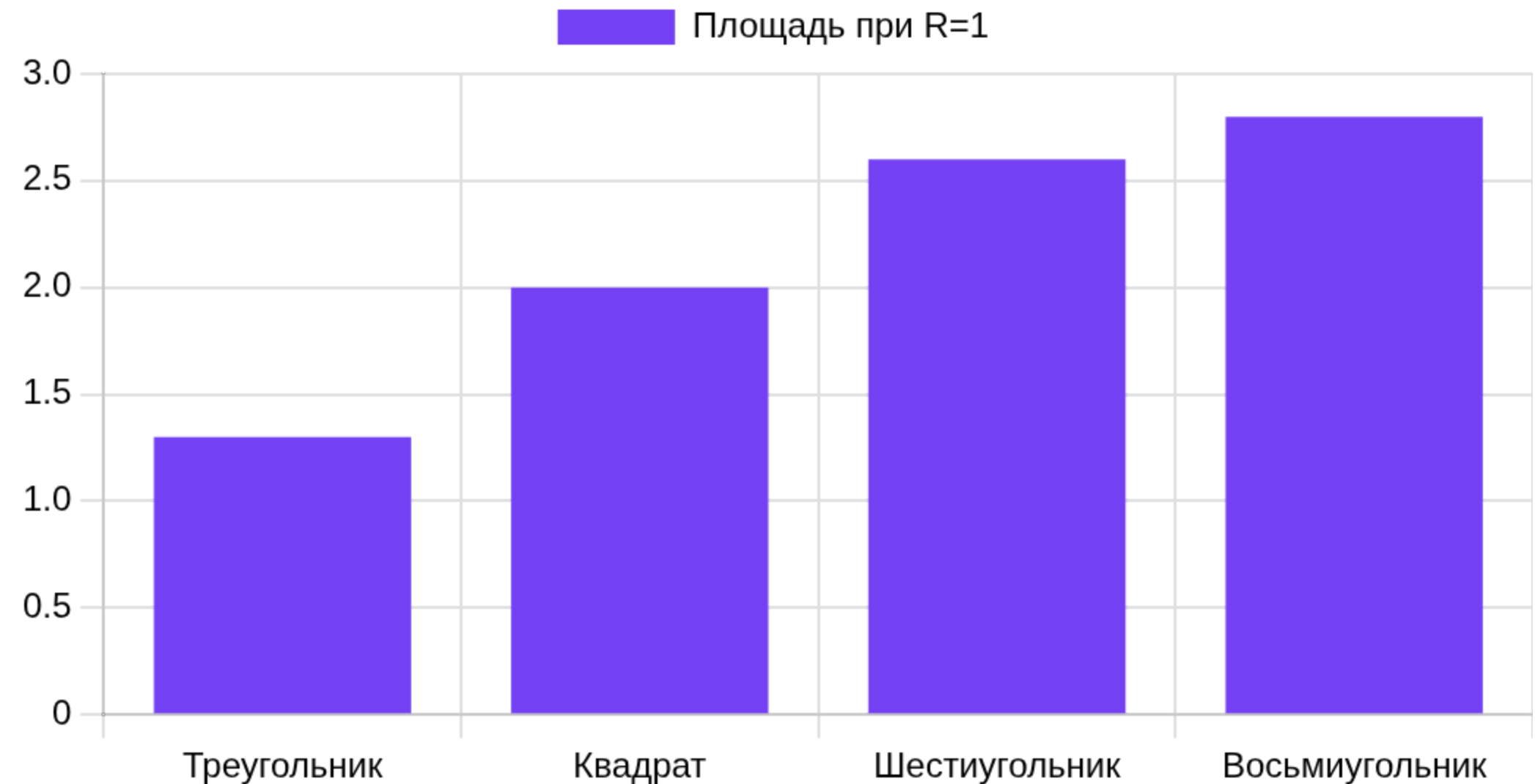
На рисунке хорошо заметно, что вершины шестиугольника образуют ровную цепочку на окружности, а сама фигура выглядит симметричной и устойчивой. Такое построение помогает сразу увидеть связь между кругом, хордой и правильным многоугольником.

Как изменяется площадь правильных вписанных фигур при одном и том же радиусе



Все фигуры вписаны в окружность одного радиуса, поэтому сравнение показывает только влияние числа сторон на площадь.

Расчёт по формуле площади правильного n-угольника при $R=1$: $S = n/2 \cdot R^2 \cdot \sin(360^\circ/n)$.



Чем больше сторон, тем больше площадь и тем ближе фигура к кругу. Правильный шестиугольник уже заметно превосходит квадрат и треугольник.

Формулы для правильного n-угольника

Центральный угол

У правильного n-угольника все центральные углы равны, поэтому каждый из них вычисляют по формуле $360^\circ/n$. Это позволяет сразу понять, на сколько равных частей разделена окружность.

Периметр фигуры

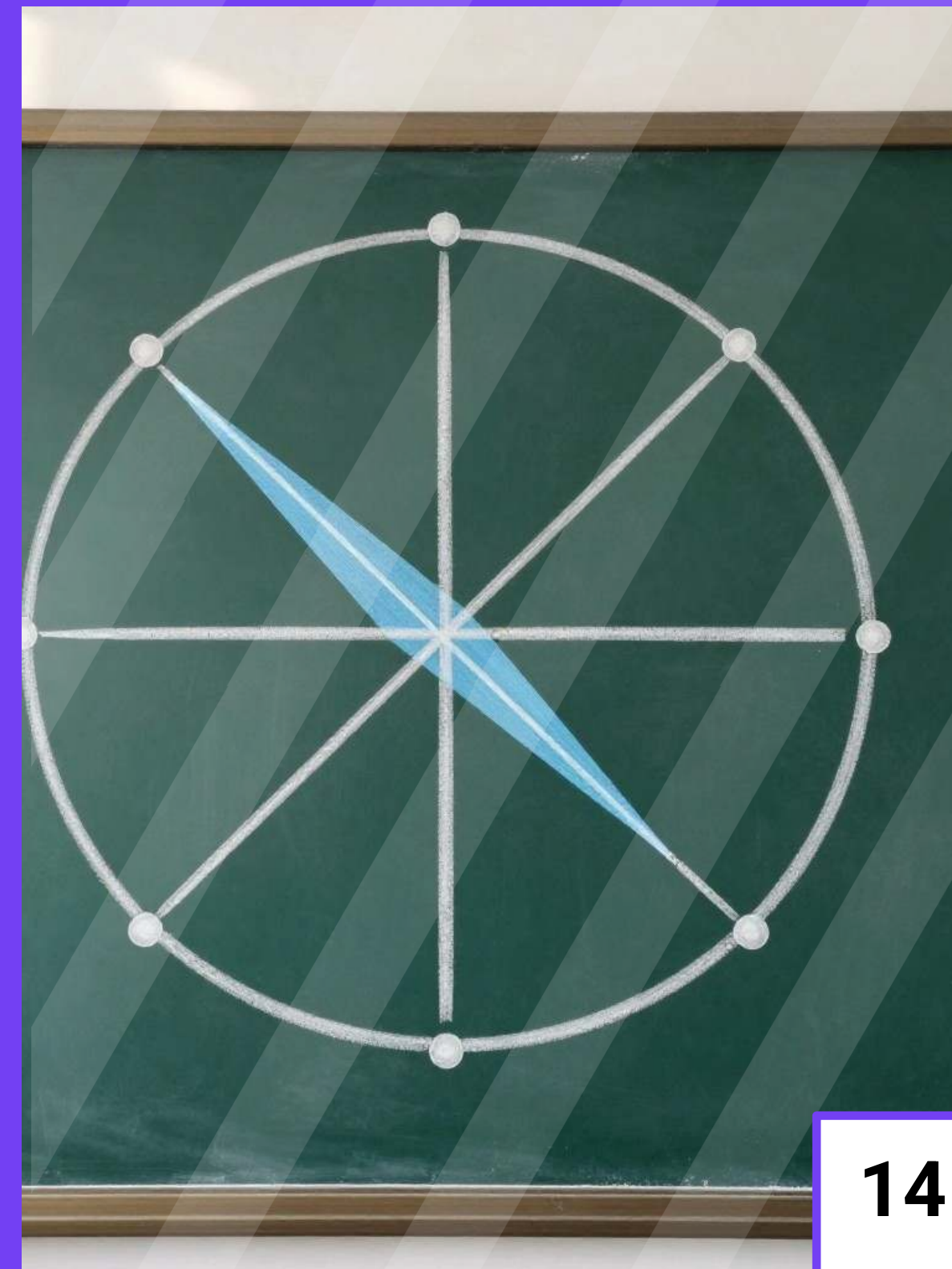
Периметр правильного многоугольника легко найти, если известна длина стороны: $P = n \cdot a$. В такой записи число сторон и длина одной стороны сразу дают общий результат.

Площадь через апофему

Площадь правильного многоугольника находят по формуле $S = (P \cdot r)/2$, где r — апофема. Эта формула показывает, что площадь зависит и от периметра, и от расстояния до центра.

Связь всех величин

Формулы связывают стороны, углы и радиус окружности в одну систему. Поэтому при решении задач часто достаточно найти один элемент, чтобы затем восстановить остальные без лишних построений.



Примеры правильных вписанных многоугольников

Геометрические свойства правильных многоугольников, вписанных в окружность

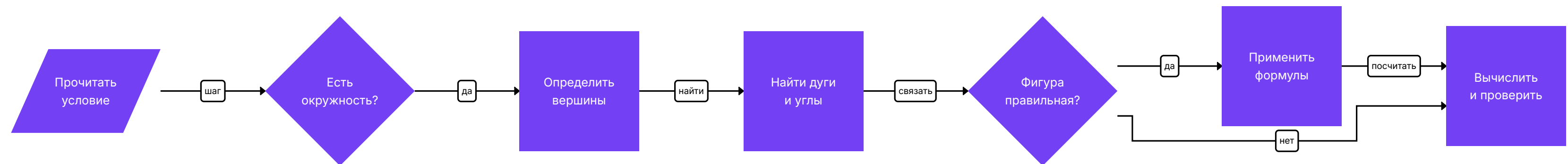
Фигура	Стороны	Угол	Особенность
Равносторонний треугольник	3	120°	Все равны
Квадрат	4	90°	Диагонали — диаметры
Шестиугольник	6	60°	Сторона = радиус
Восьмиугольник	8	45°	Ближе к кругу

Таблица показывает, как число сторон связано с центральным углом и особенностями разных правильных фигур.

С ростом числа сторон уменьшается центральный угол, а фигура становится всё более похожей на окружность. Правильность упрощает вычисления и сравнение фигур.

Алгоритм решения задач на вписанные многоугольники

Последовательность действий при работе с окружностью и вписанными фигурами

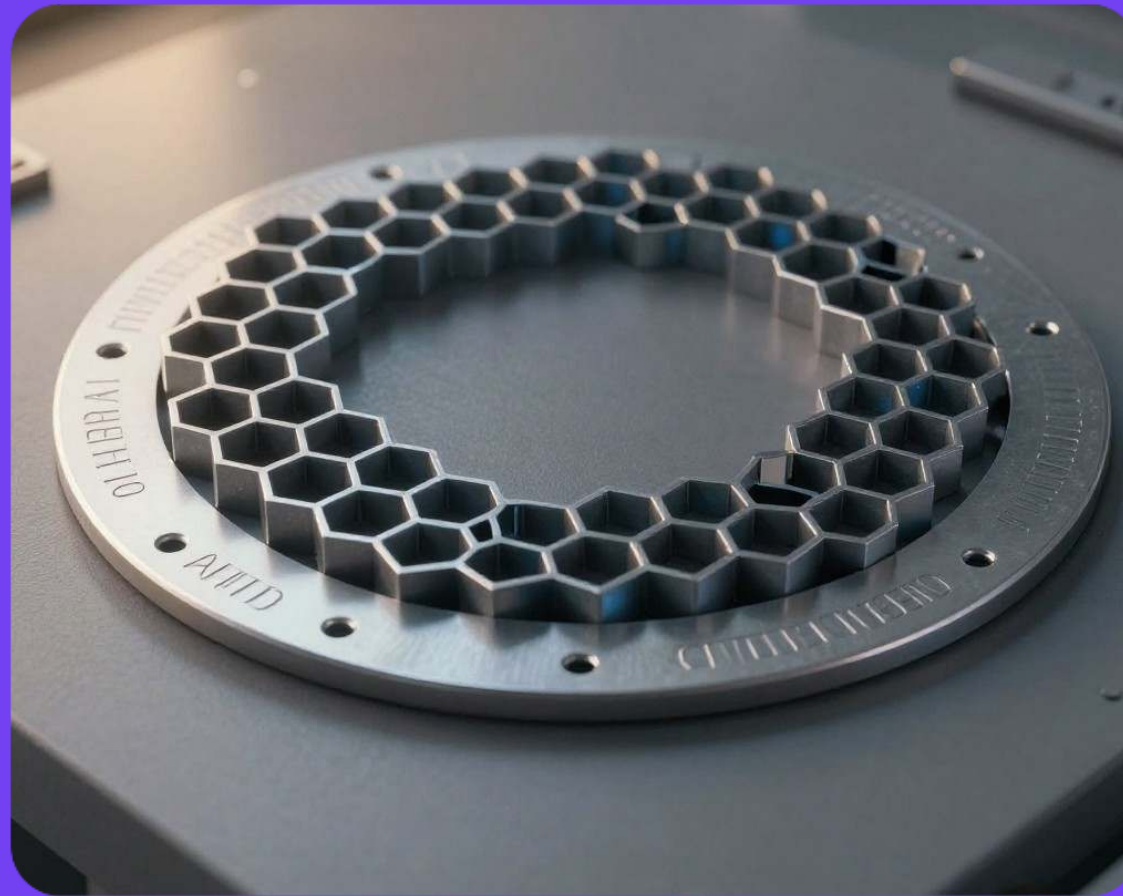


Где встречаются вписанные многоугольники в жизни



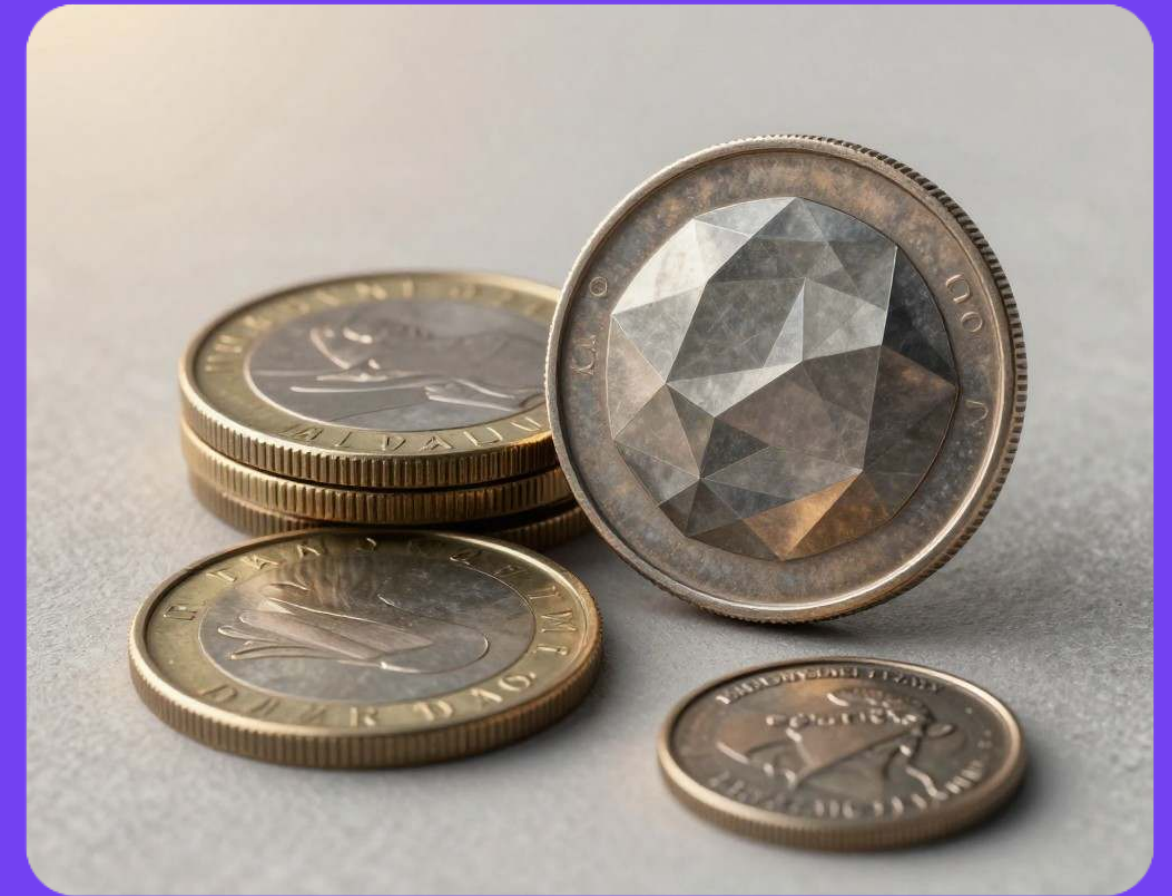
Орнаменты и архитектура

На фасадах зданий, в витражах и декоративных решётках часто можно увидеть фигуры, похожие на вписанные многоугольники. Они создают ощущение порядка, симметрии и равновесия. Такие узоры особенно выразительны, когда линии аккуратно повторяют форму окружности.



Природные и технические формы

Шестиугольная форма известна по сотам, а также часто используется в инженерных решениях. Она помогает плотно заполнять пространство и выглядит устойчиво. Связь с окружностью делает такие конструкции удобными для расчётов и проектирования.



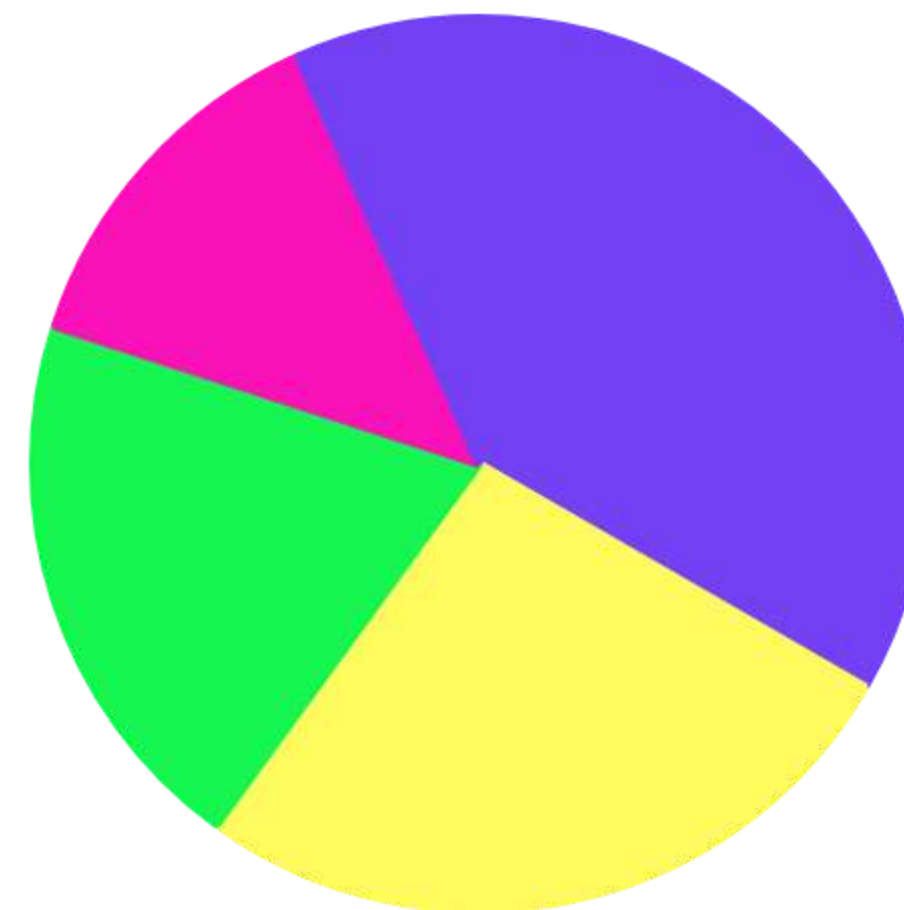
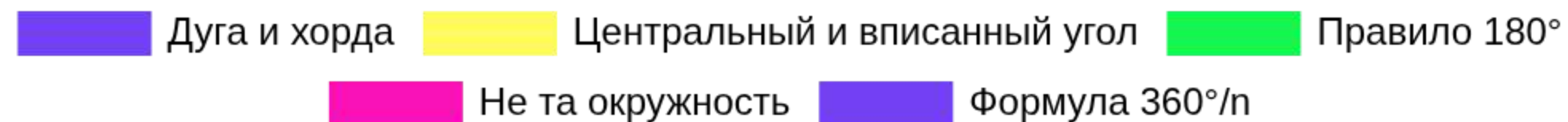
Циферблаты, эмблемы, монеты

На циферблатах, монетах и эмблемах нередко встречаются многоугольники, расположенные внутри круга. Это делает изображение легко узнаваемым и симметричным. Даже небольшие элементы дизайна становятся точнее, если их строят на основе окружности.

Типичные ошибки в задачах по теме



Диаграмма показывает, какие ошибки встречаются чаще всего при решении задач на окружность и вписанные фигуры.



Учебная классификация типичных ошибок при изучении темы; иллюстративное ранжирование

Чаще всего ошибки связаны с путаницей в базовых понятиях. Внимательная проверка условий помогает избежать неверных вычислений.

Главные выводы для запоминания



○ Вписанный многоугольник

Все его вершины лежат на одной окружности, а каждая сторона является хордой. Именно это условие отличает вписанный многоугольник от любой другой фигуры на чертеже.

○ Вписанный угол

Вписанный угол всегда равен половине дуги, на которую он опирается. Поэтому, если известна дуга, угол можно найти сразу, без дополнительных построений и измерений.

○ Вписанный четырёхугольник

У такого четырёхугольника сумма противоположных углов равна 180° . Это простой и очень полезный признак, который помогает проверять, можно ли описать окружность вокруг фигуры.

○ Правильные фигуры

В правильном многоугольнике все вершины делят окружность на равные дуги. Формула $360^\circ/n$ сразу даёт центральный угол и помогает быстро решать задачи.





Окружность делает геометрию яснее



Вписанные многоугольники объединяют дуги, хорды и углы в одной удобной модели. Благодаря симметрии окружности задачи решаются точнее, а свойства фигур становятся заметнее и понятнее.

