

# Окружность, вписанная в правильный многоугольник

Изучаем симметрию, радиус и площадь через одну красивую фигуру.





Вписанная окружность делает правильный многоугольник удобным для чертежей, орнаментов и схем: все стороны равны, центр один, а расстояния до сторон одинаковы, поэтому построения получаются точными и аккуратными.

Где эта фигура помогает

# Что называют вписанной окружностью

## Внутри фигуры

Вписанная окружность полностью находится внутри многоугольника и касается каждой его стороны ровно в одной точке, не выходя за пределы фигуры.

## Одинаковые расстояния

Расстояние от центра окружности до любой стороны одинаково. Именно это расстояние и является радиусом вписанной окружности, поэтому оно задаёт размер всей конструкции.

## Есть у правильного многоугольника

У правильного многоугольника такая окружность существует всегда: стороны и углы расположены симметрично, поэтому можно найти единственный центр, равноудалённый от всех сторон.

## Связь с симметрией

Чем точнее сохраняется осевая симметрия, тем легче увидеть, где проходит окружность и почему она касается всех сторон без исключения.



# Центр, радиус и точки касания

## Центр $O$

На чертеже центр вписанной окружности обычно обозначают буквой  $O$ . От него до каждой стороны можно провести одинаковые отрезки, поэтому именно он определяет положение окружности.

## Радиус $r$

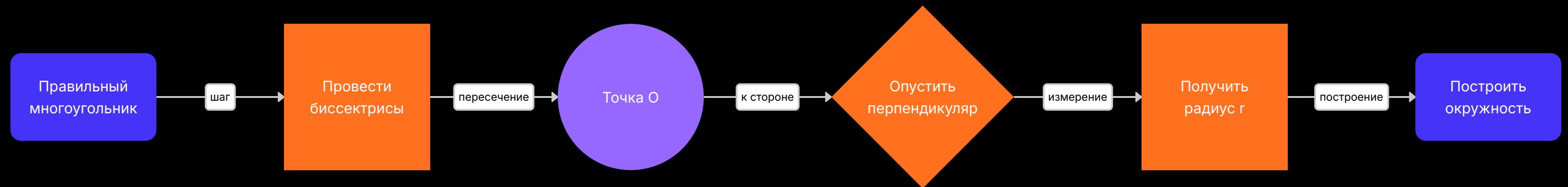
Радиус — это отрезок от центра до точки касания. Он перпендикулярен стороне и показывает, на каком расстоянии окружность лежит от каждой стороны многоугольника.

## Точки касания

Каждая сторона имеет свою точку касания с окружностью. Для правильного многоугольника эти точки расположены симметрично, а значит, окружность единственна и не может быть сдвинута.

# Как построить вписанную окружность

Пошаговое построение для правильного многоугольника



# Почему центр находится на пересечении биссектрис

01

Биссектриса делит угол

Биссектриса делит угол на две равные части. Любая точка на ней находится на одинаковом расстоянии от обеих сторон угла, поэтому это удобная линия для поиска центра.

02

Все углы равны

У правильного многоугольника все внутренние углы одинаковые. Значит, их биссектрисы имеют одинаковое направление относительно каждой вершины и могут встретиться в одной общей точке.

03

Общая точка центра

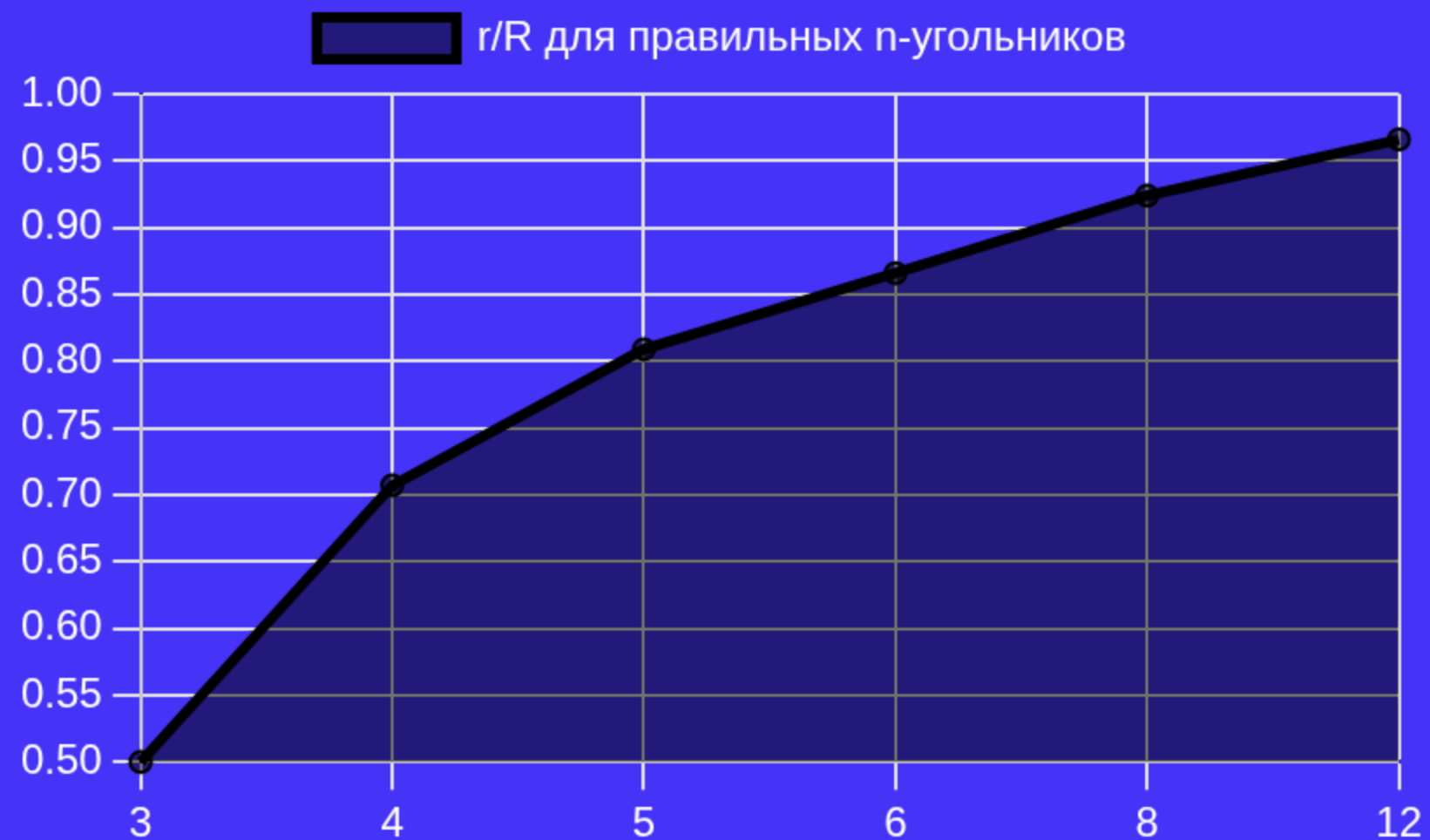
Точка пересечения биссектрис оказывается равноудалённой от всех сторон. Именно поэтому она подходит на роль центра вписанной окружности и определяет её положение в фигуре.

04

Почему это надёжно

Если центр найден по биссектрисам, окружность обязательно коснётся каждой стороны. Такой способ не зависит от случайного выбора стороны и работает для любого правильного многоугольника.

# Как меняется отношение радиусов при увеличении числа сторон



Геометрическая формула  $r/R = \cos(180^\circ/n)$  для правильных многоугольников; вычисления по ней.

Для правильных многоугольников отношение  $r/R$  связано только с числом сторон и не зависит от размера фигуры.

Чем больше сторон, тем ближе значение  $r/R$  к 1, а сама фигура всё сильнее напоминает круг.

# Сравнение правильных многоугольников

Таблица показывает, как меняются угол, симметрия и радиус вписанной окружности у разных правильных многоугольников.

С ростом числа сторон увеличивается и число осей симметрии, а фигура постепенно становится похожей на окружность.

| n | Угол | Оси | r/a                        |
|---|------|-----|----------------------------|
| 3 | 60°  | 3   | $\sqrt{3}/6$               |
| 4 | 90°  | 4   | $1/2$                      |
| 5 | 108° | 5   | $1/(2\text{tg}36^\circ)$   |
| 6 | 120° | 6   | $\sqrt{3}/2$               |
| 8 | 135° | 8   | $1/(2\text{tg}22,5^\circ)$ |

Свойства правильных многоугольников и стандартные геометрические формулы.

# Апофема и радиус вписанной окружности



## Перпендикуляр к стороне

Апофема — это отрезок, проведённый от центра многоугольника перпендикулярно к его стороне. В правильной фигуре он показывает кратчайшее расстояние до стороны.



## Помогает найти площадь

Апофема входит в формулу площади правильного многоугольника. Если известны периметр и радиус вписанной окружности, площадь можно вычислить быстро и без лишних построений.



## Совпадает с радиусом

Для вписанной окружности апофема и радиус имеют одинаковую длину. Поэтому, найдя апофему, мы сразу узнаём радиус окружности, касающейся всех сторон.



## Меньше описанного радиуса

Апофема всегда меньше радиуса описанной окружности. Это удобно помнить: вписанная окружность лежит внутри фигуры, а описанная проходит через её вершины.

# Прямоугольный треугольник в центре фигуры

## Треугольник у центра

Если соединить центр с вершиной многоугольника и с точкой касания, получится прямоугольный треугольник. Такой рисунок помогает увидеть связи между сторонами и радиусом.

## Катеты и гипотенуза

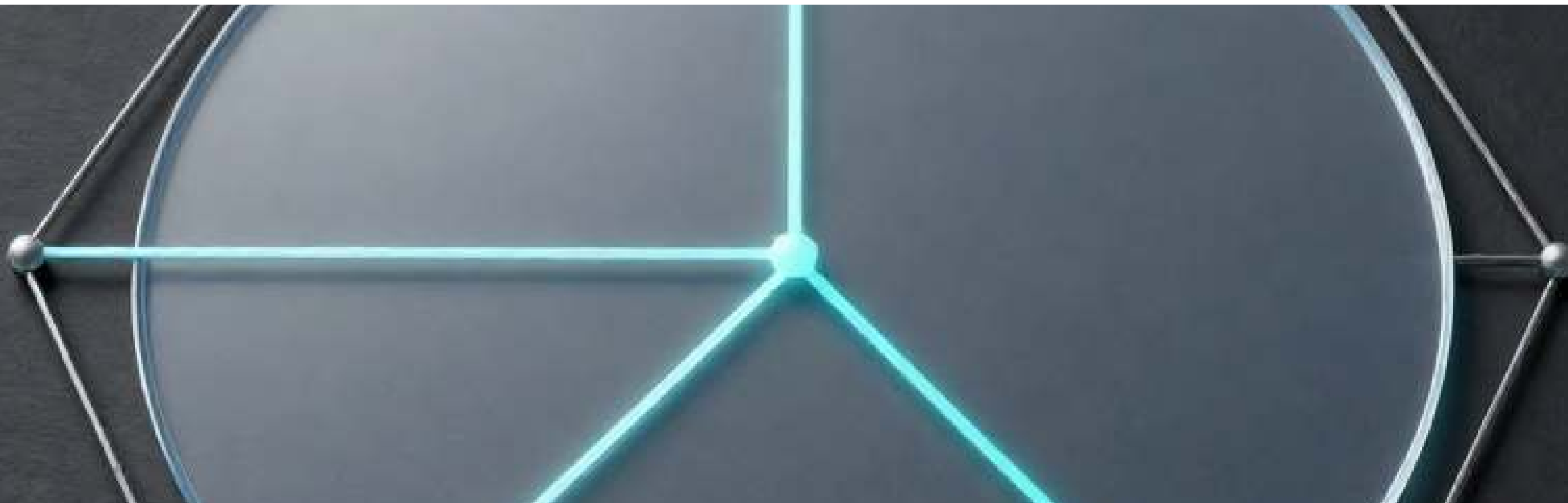
В этом треугольнике один катет равен радиусу  $r$ , а другой — половине стороны  $a/2$ . Гипотенуза идёт от центра к вершине и соответствует радиусу описанной окружности.

## Вывод формул

Именно из такого треугольника получают формулы для радиуса вписанной окружности. Связь между катетами позволяет выразить  $r$  через сторону и число сторон многоугольника.

## Проверка чертежа

Если на построении расстояния от центра до стороны совпадают с радиусом, значит, окружность построена верно. Прямоугольный треугольник даёт удобную проверку без сложных измерений.



Формулы правильного n-угольника  
из школьной геометрии

# 180°

входит в формулы радиуса через  
половину центрального угла.

Именно этот угол помогает выразить  
радиус через сторону и число сторон  
правильного многоугольника.

# Площадь правильного многоугольника через радиус

■ Площадь при одинаковом периметре  $P = 40$

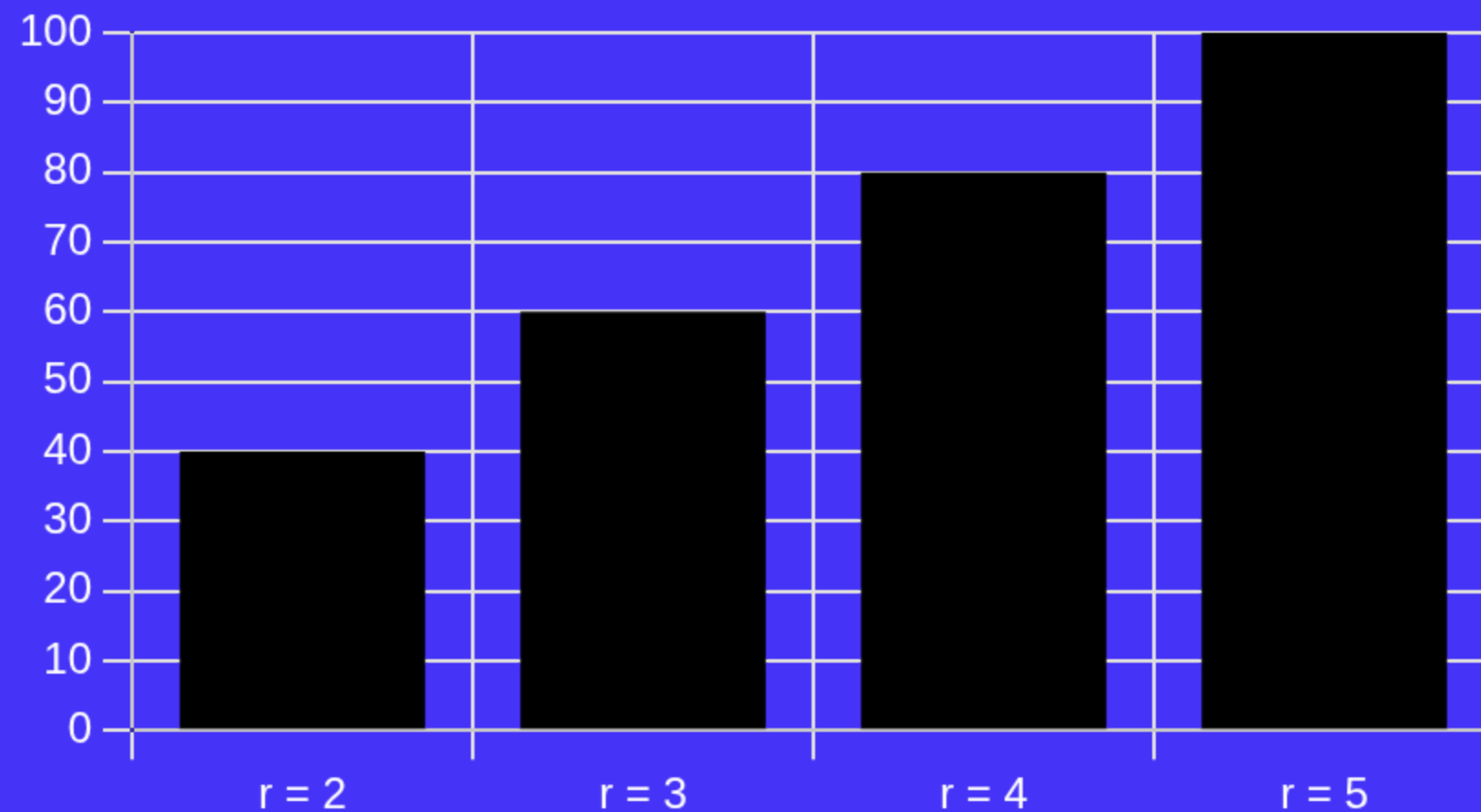


Иллюстрация по формуле  $S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r$

При одинаковом периметре площадь зависит только от апофемы: чем она больше, тем больше фигура «разворачивается» в ширину.

Рост радиуса напрямую увеличивает площадь, поэтому фигуры с большей апофемой занимают больше места при том же периметре.

## Свойства квадрата в школьной геометрии

1/2

сторона квадрата составляет радиус  
вписанной окружности.

Это самый простой случай: центр  
окружности совпадает с центром  
квадрата, а касание происходит  
в серединах сторон.

# Пример: правильный шестиугольник

Угол  $120^\circ$

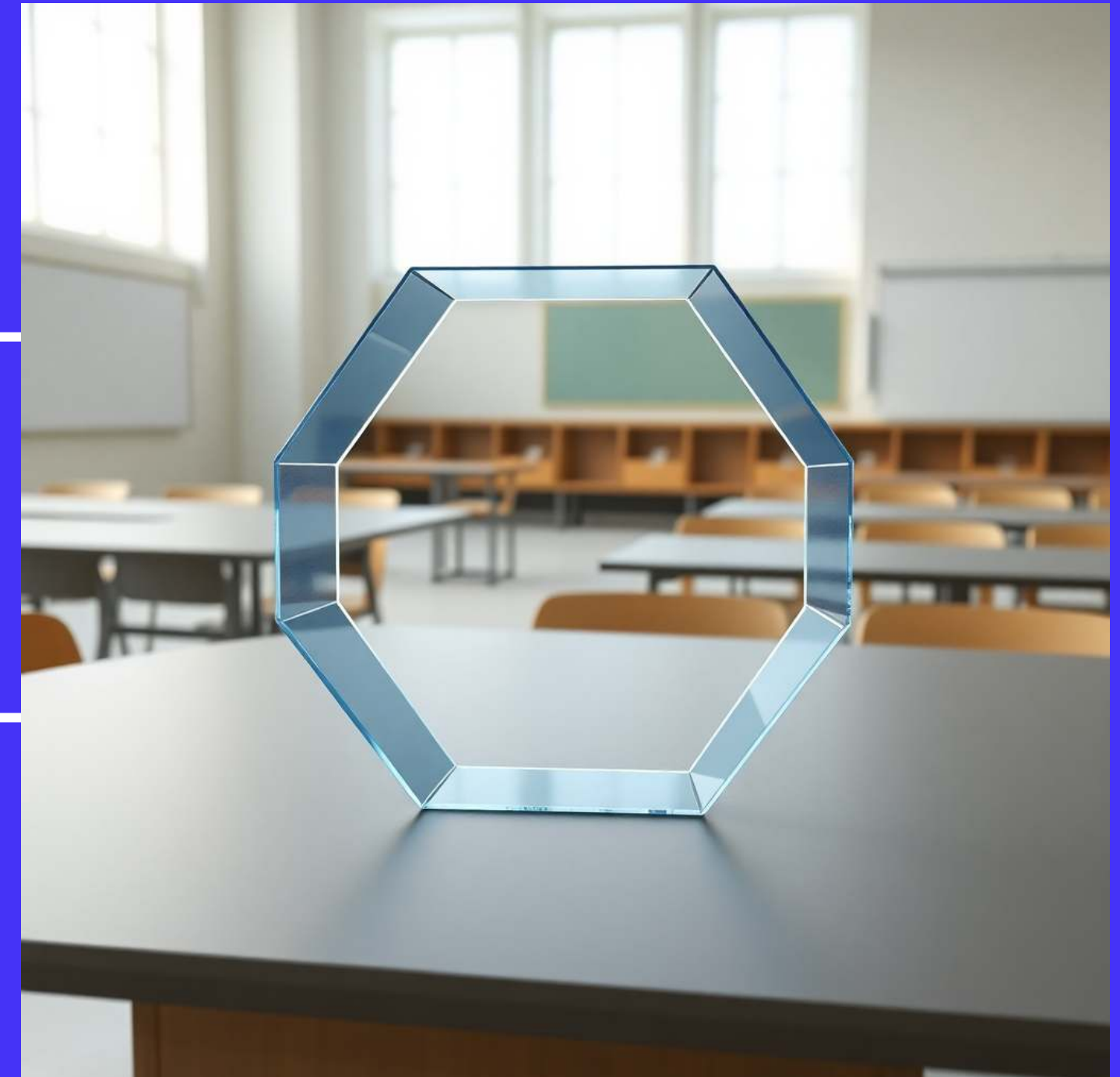
- Каждый внутренний угол правильного шестиугольника равен  $120^\circ$ , поэтому его вершины расположены очень регулярно. Такая форма удобно делит плоскость на равные части и хорошо подходит для симметричных построений.

Шесть равных треугольников

- Центр шестиугольника соединяется с вершинами и образует шесть одинаковых равносторонних треугольников. Из-за этого расстояния до всех сторон равны, а вписанная окружность получается естественно и точно.

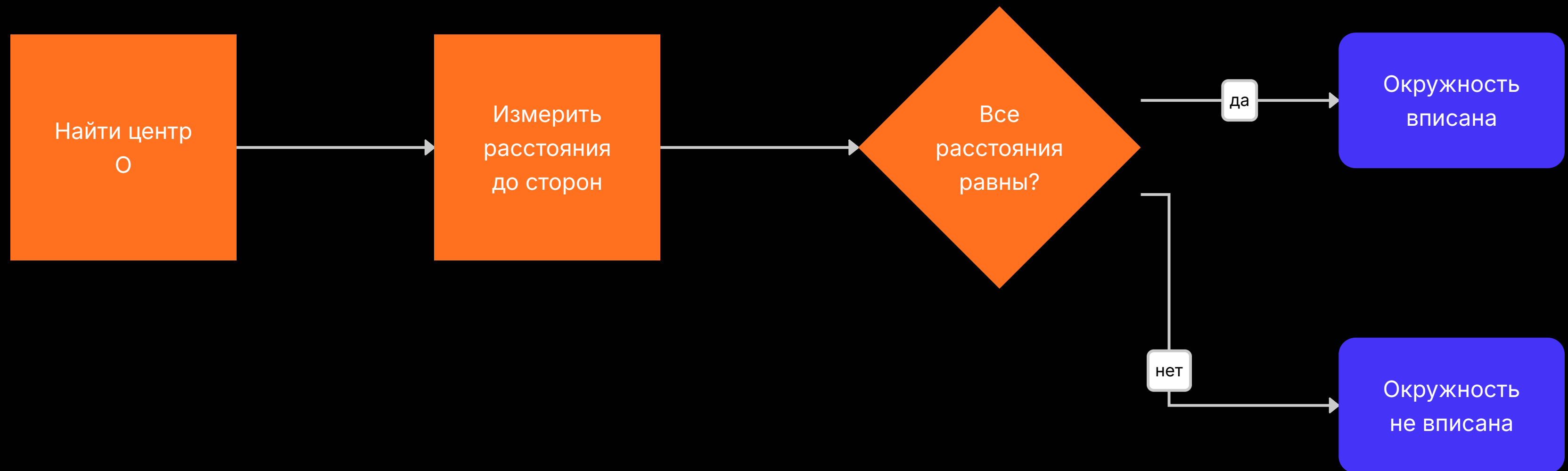
Радиус как высота

- Радиус вписанной окружности совпадает с перпендикуляром от центра к стороне. В шестиугольнике это высота каждого центрального треугольника, поэтому измерять и проверять её особенно удобно.



# Проверка вписанной окружности

Пошаговая проверка по равенству расстояний от центра до всех сторон



# Примеры применения правильных многоугольников

Таблица показывает, где важны точная симметрия и аккуратное деление пространства.

Во всех примерах правильная форма помогает распределять пространство равномерно и делать конструкцию визуально аккуратной.

| Пример      | Форма         | Зачем симметрия | Роль окружности |
|-------------|---------------|-----------------|-----------------|
| Архитектура | шестигранник  | точный узор     | равные отступы  |
| Мозаика     | квадрат       | без щелей       | единый центр    |
| Шестерёнки  | многоугольник | ровный ход      | проверка формы  |

Примеры из окружающих геометрических объектов

# Симметрия помогает видеть главное

## Центр находится сам

Если у фигуры много осей симметрии, их пересечение сразу подсказывает положение центра. На чертеже это экономит время: не нужно искать его по нескольким отдельным точкам и лишним построениям.



## Поворот не меняет вид

Правильный многоугольник после поворота выглядит так же, как и прежде. Поэтому вписанная окружность сохраняет одинаковое положение относительно всех сторон, а точки касания распределяются равномерно.

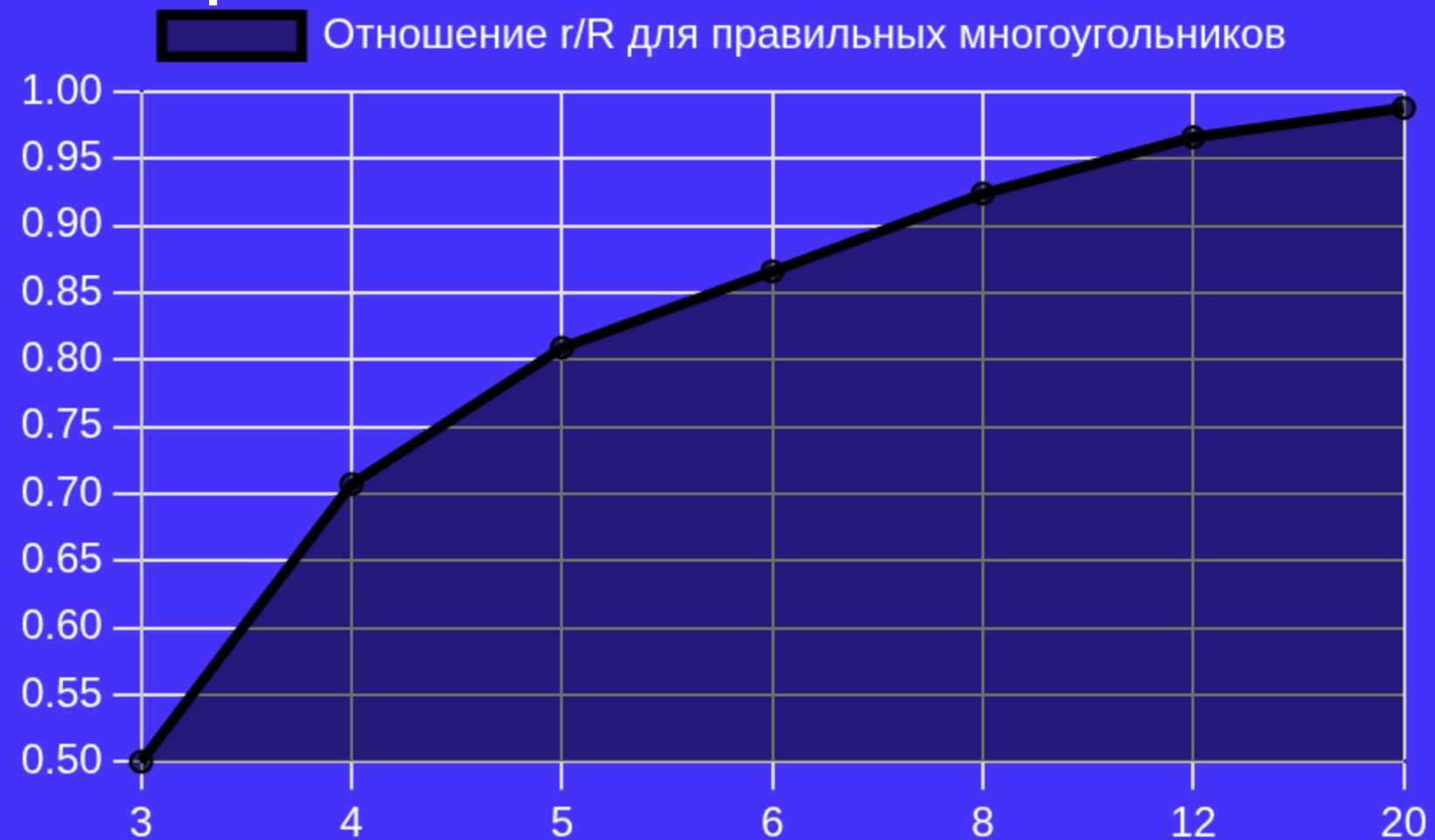


## Проверка становится проще

Когда фигура симметрична, достаточно измерить одно расстояние и сравнить его с другими. Если все перпендикуляры от центра к сторонам равны, окружность действительно вписана без сомнений.



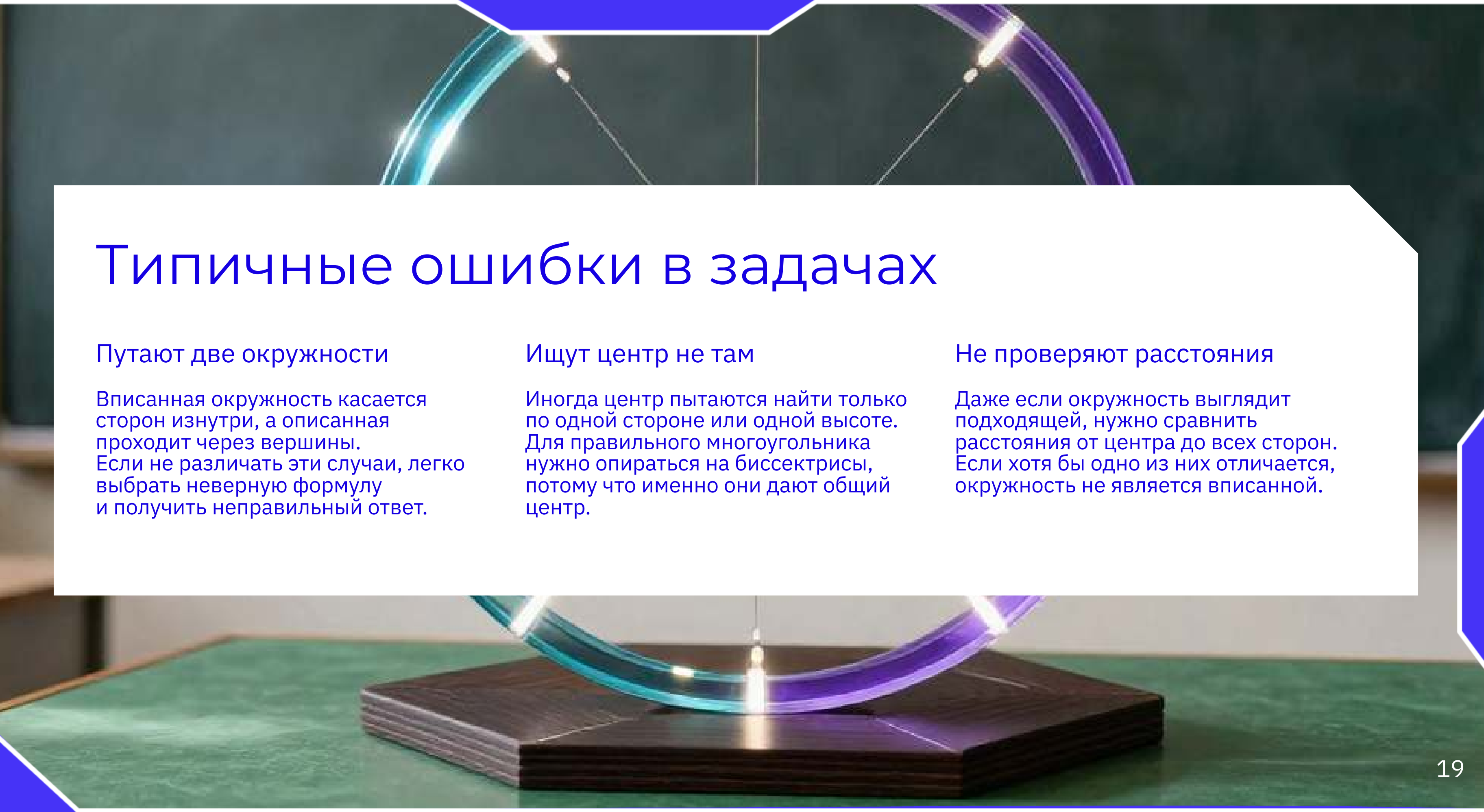
# Как меняется форма при увеличении числа сторон



Вычислено по формуле  $r/R = \cos(180^\circ/n)$

Значения получены по формуле  $r/R = \cos(180^\circ/n)$  и показывают постепенное приближение к окружности.

Чем больше сторон, тем выше отношение  $r/R$  и тем меньше заметны углы: контур становится почти круглым.



# Типичные ошибки в задачах

## Путают две окружности

Вписанная окружность касается сторон изнутри, а описанная проходит через вершины. Если не различать эти случаи, легко выбрать неверную формулу и получить неправильный ответ.

## Ищут центр не там

Иногда центр пытаются найти только по одной стороне или одной высоте. Для правильного многоугольника нужно опираться на биссектрисы, потому что именно они дают общий центр.

## Не проверяют расстояния

Даже если окружность выглядит подходящей, нужно сравнить расстояния от центра до всех сторон. Если хотя бы одно из них отличается, окружность не является вписанной.



Вписанная окружность есть у каждого правильного многоугольника, её центр находится на пересечении биссектрис, а радиус равен апофеме и помогает находить площадь фигуры.

Что важно запомнить