

Тригонометрические функции и решение треугольников

Углы и стороны треугольника связаны через синус, косинус и тангенс.



Как измерять недоступное с помощью треугольника

Тригонометрия помогает находить высоты, расстояния и неизвестные элементы треугольника там, где прямое измерение неудобно или невозможно. В этой теме важно научиться выбирать нужную формулу и проверять ответ по смыслу задачи.



Прямоугольный треугольник как основа темы

Один прямой угол

В таком треугольнике один угол всегда равен 90° , а два других — острые. Их сумма обязательно составляет 90° , поэтому любой неизвестный угол можно связать с уже найденным.

1

Главные стороны

Сторона напротив прямого угла называется гипотенузой, а две другие — катетами. Гипотенуза всегда длиннее каждого катета, поэтому именно с ней удобно связывать многие вычисления.

2

Угол определяет отношения

Для одного и того же острого угла отношения сторон остаются одинаковыми, даже если треугольники разного размера. Это свойство позволяет вводить тригонометрические функции как устойчивые числовые характеристики угла.

3

Основа решения задач

Именно в прямоугольном треугольнике можно находить неизвестные стороны и углы по нескольким известным данным. Поэтому он служит главным инструментом для практических задач по тригонометрии.

4

Определения синуса, косинуса и тангенса



Синус угла

Синус острого угла — это отношение противолежащего катета к гипотенузе. Он показывает, какая часть гипотенузы приходится на сторону, лежащую напротив выбранного угла.



Косинус угла

Косинус равен отношению прилежащего катета к гипотенузе. Эта величина связывает угол с катетом, который образует его вместе с гипотенузой.



Тангенс угла

Тангенс — это отношение противолежащего катета к прилежащему. Его удобно использовать, когда в задаче известны оба катета или нужно найти угол по сторонам.



Почему формулы работают

Если два прямоугольных треугольника имеют одинаковый острый угол, они подобны. Поэтому отношения их соответствующих сторон совпадают и не зависят от размеров фигур.

Как ведут себя $\sin$, $\cos$ и $\tg$ для острого угла

На одном и том же промежутке углов функции меняются по-разному, поэтому выбор формулы зависит от известных сторон.

Синус растёт, косинус убывает, а тангенс увеличивается особенно быстро; при 45° синус и косинус равны.

Школьные табличные значения тригонометрических функций для острых углов

Как быстро выбрать нужную формулу



Напротив к гипотенузе

Если в условии есть противолежащий катет и гипотенуза, нужен синус. Это самое прямое соответствие, когда известна сторона напротив угла и самая длинная сторона треугольника.



Рядом к гипотенузе

Когда дан прилежащий катет вместе с гипотенузой, удобно использовать косинус. Такая запись помогает сразу увидеть, какие элементы уже известны и что именно требуется найти.



Напротив к рядом

Если известны оба катета, помогает тангенс. Он связывает две стороны без участия гипотенузы и часто позволяет найти угол или проверить правильность вычислений.

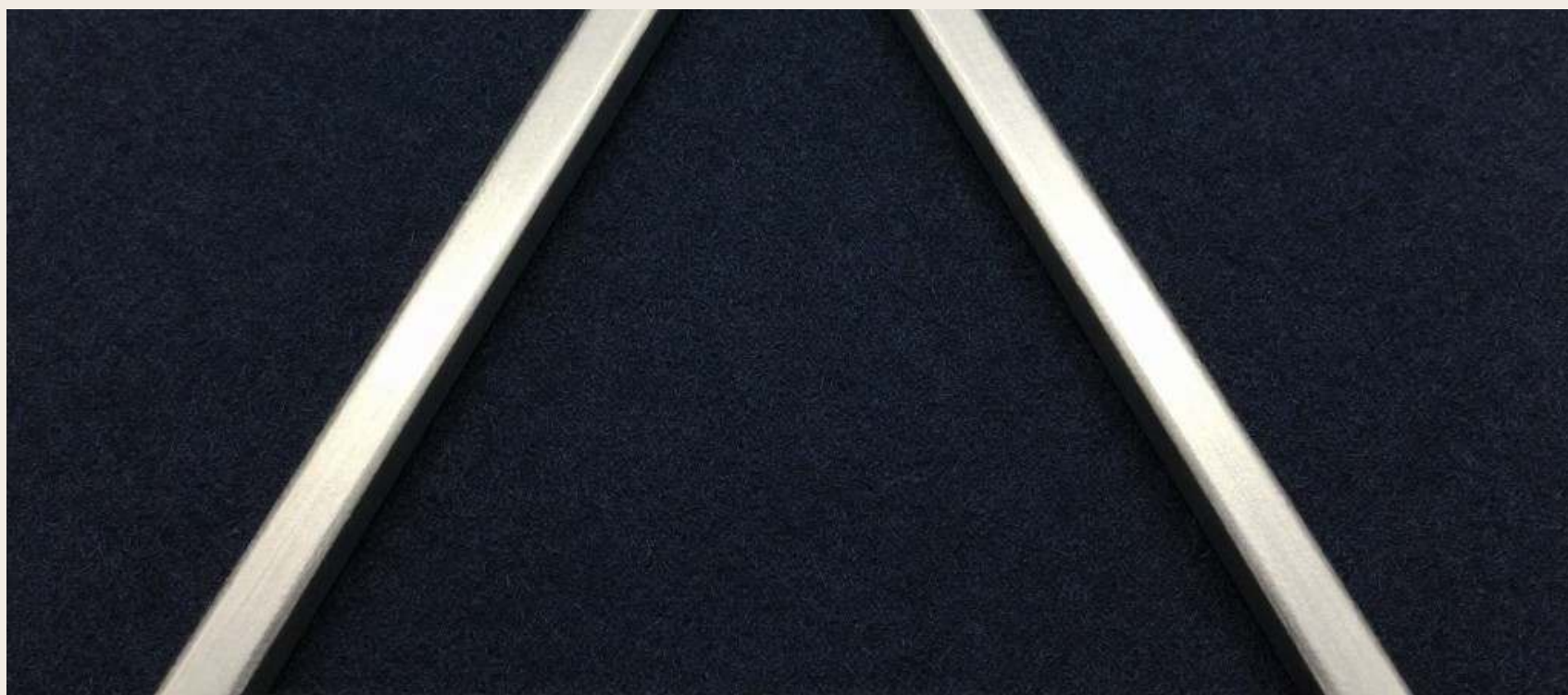
Значения тригонометрических функций для углов 30°, 45° и 60°

Угол	sin	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Эти значения нужно знать наизусть: они часто встречаются в задачах и ускоряют вычисления без калькулятора.

Для трёх часто встречающихся углов значения выражаются через простые дроби и корни, что удобно для устных и письменных решений.

Особые прямоугольные треугольники $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ и $30^\circ-60^\circ-90^\circ$



Треугольник, где всё симметрично

В треугольнике $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ два острых угла равны, поэтому катеты тоже равны. Если один катет известен, второй не нужно искать отдельно, а гипотенуза находится сразу по соотношению с корнем из двух.

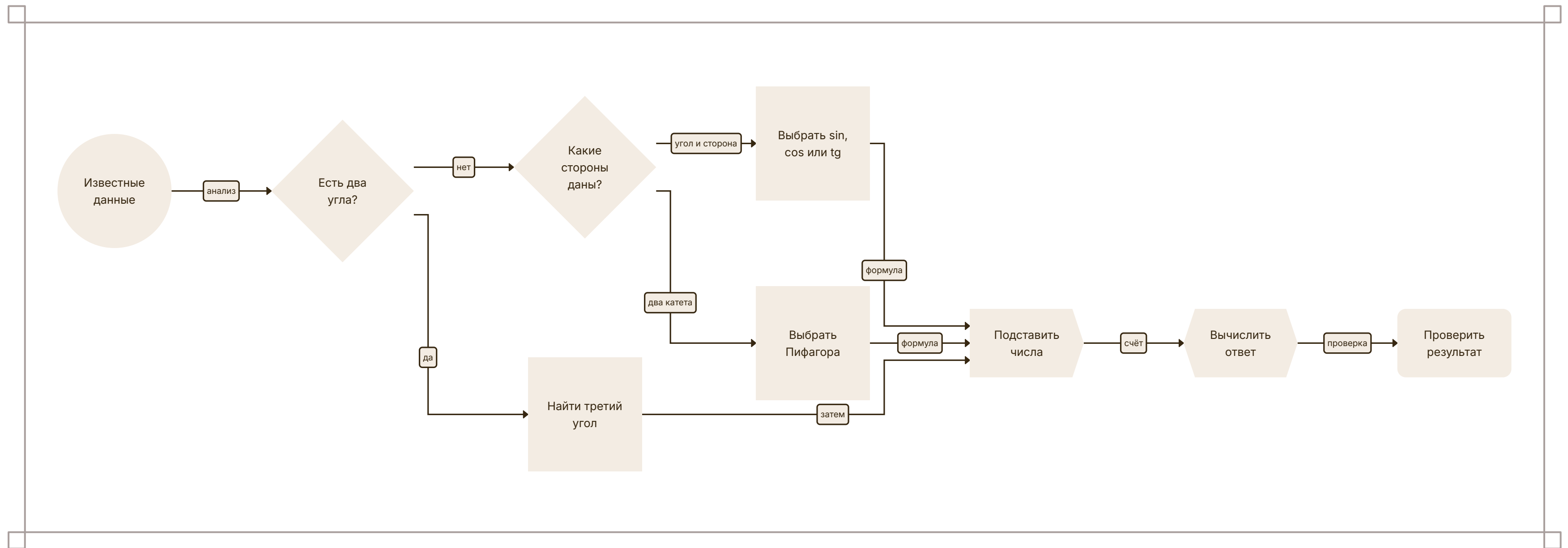


Треугольник с двумя разными катетами

В треугольнике $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ длины сторон связаны особенно удобно: меньший катет задаёт всю фигуру. По нему легко восстановить гипотенузу и больший катет, умножив на 2 и на $\sqrt{3}$ соответственно.

Алгоритм решения прямоугольного треугольника

Последовательность действий для выбора формулы, вычисления и проверки ответа





2

известные стороны позволяют вычислить третью
без прямого измерения.

Школьный курс геометрии 9 класса

В прямоугольном треугольнике теорема Пифагора особенно полезна, когда заданы две стороны. Она дополняет тригонометрию и помогает проверить полученный ответ.

Почему отношения сторон не меняются при подобии

При одинаковом угле соответствующие стороны меняются пропорционально, поэтому отношения остаются теми же. Это и делает тригонометрические функции устойчивыми к размеру фигуры.

Если угол одинаков, масштаб треугольника не влияет на $\sin$, $\cos$ и tg : важна только форма, а не длина сторон.

Геометрия: свойства подобных прямоугольных треугольников, школьный курс 9 класса

Решение треугольника по двум данным элементам

1

1. Считываем данные

Определяем, какие стороны и углы уже известны, и сразу отмечаем, чего не хватает для полного решения.

2

2. Находим недостающий угол

Если известны два угла, третий вычисляем по сумме углов треугольника. В прямоугольном треугольнике острые углы в сумме дают 90° .

3

3. Выбираем формулу

По известным элементам решаем, что удобнее применить: синус, косинус, тангенс или теорему Пифагора.

4

4. Считаем и проверяем

Подставляем значения, выполняем вычисления и сравниваем ответ с условием: сторона должна получиться подходящего размера и типа.

Какой способ выбрать для нахождения неизвестной стороны

Что известно	Что использовать
2 катета	Пифагор
Угол + катет напротив	$\sin$
Угол + катет рядом	$\cos$
Оба катета	tg

Короткая памятка помогает быстро подобрать формулу по данным условия задачи.

Выбор метода зависит не от привычки, а от того, какие элементы уже даны в условии.

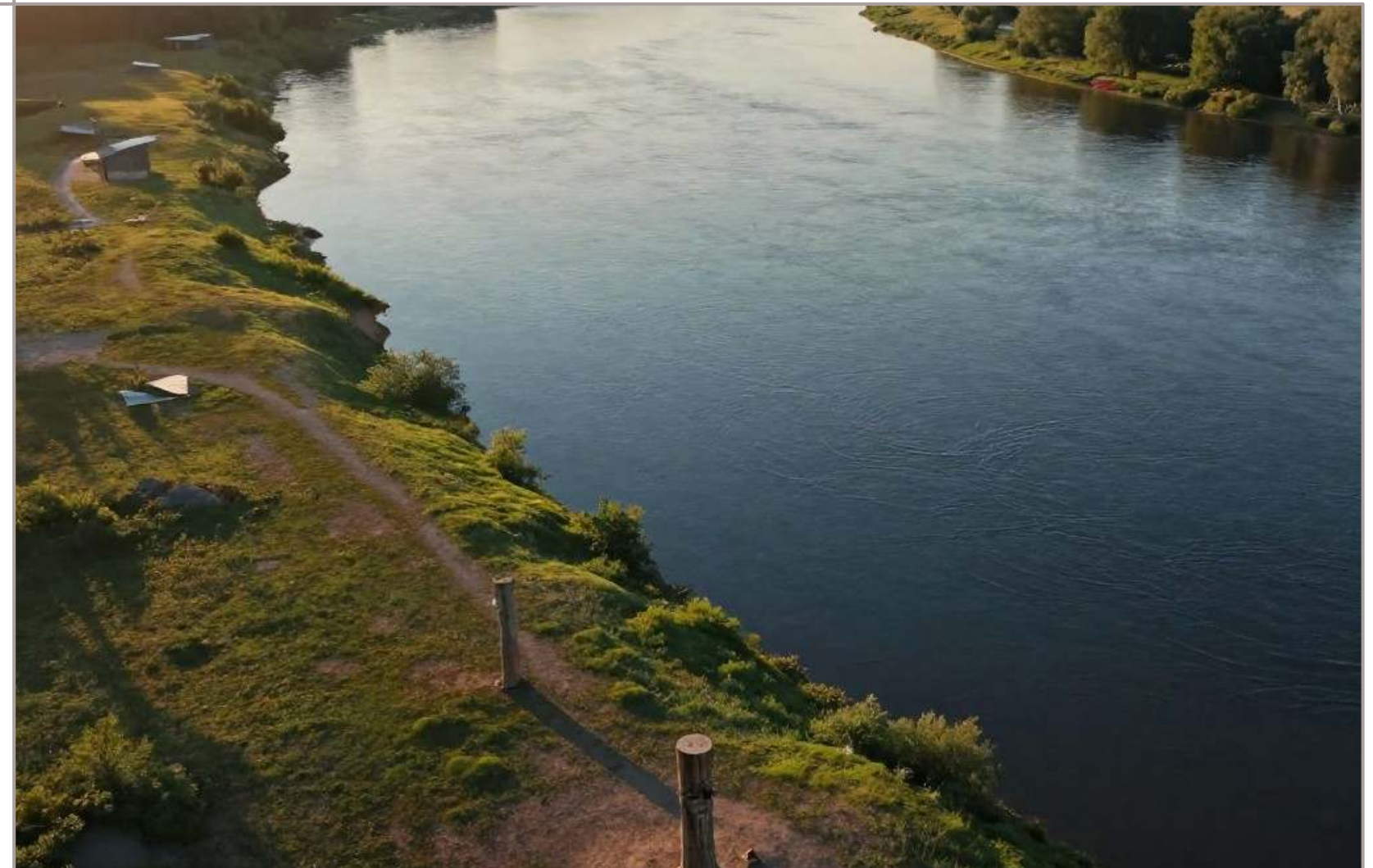
Школьный курс геометрии 9 класса

Где тригонометрия помогает измерять на расстоянии



Высота дерева без лестницы

Ученик стоит на известном расстоянии от дерева и измеряет угол возвышения до верхушки. Получается прямоугольный треугольник, где можно найти высоту, даже не поднимаясь вверх. Такой способ особенно удобен на местности, где прямой доступ невозможен.



Ширина реки с берега

На одном берегу отмечают точку наблюдения и измеряют угол до ориентира на противоположной стороне. Затем по известной стороне и углу вычисляют ширину реки. Этот приём показывает, как геометрия помогает там, где рулетка бесполезна.

Типичные ошибки при решении задач

1

Путают катеты

Часто ученик принимает прилежащий катет за противолежащий и выбирает неверную формулу. Чтобы избежать ошибки, сначала нужно назвать угол, а затем определить положение каждой стороны относительно него.

3

Спешат с округлением

Раннее округление может заметно исказить результат, особенно в многошаговых вычислениях. Лучше считать точно до конца, а округлять только в финальном ответе.

2

Берут не ту функцию

Если в условии известны гипотенуза и катет, тангенс не поможет. Перед вычислением важно проверить, какая пара элементов действительно участвует в синусе, косинусе или тангенсе.

4

Забывают проверку

Ответ должен соответствовать смыслу задачи: сторона не может быть больше гипотенузы, а угол прямоугольного треугольника обязан быть острым. Проверка сразу выявляет нелепые результаты.



Связь угла и значений тригонометрических функций

Один и тот же угол по-разному отражается в трёх функциях: каждая показывает свою сторону отношения в треугольнике.

Чем больше острый угол, тем выше $\sin$, ниже $\cos$ и тем быстрее растёт tg .

Табличные значения тригонометрических функций для острых углов, школьный курс геометрии



5 см

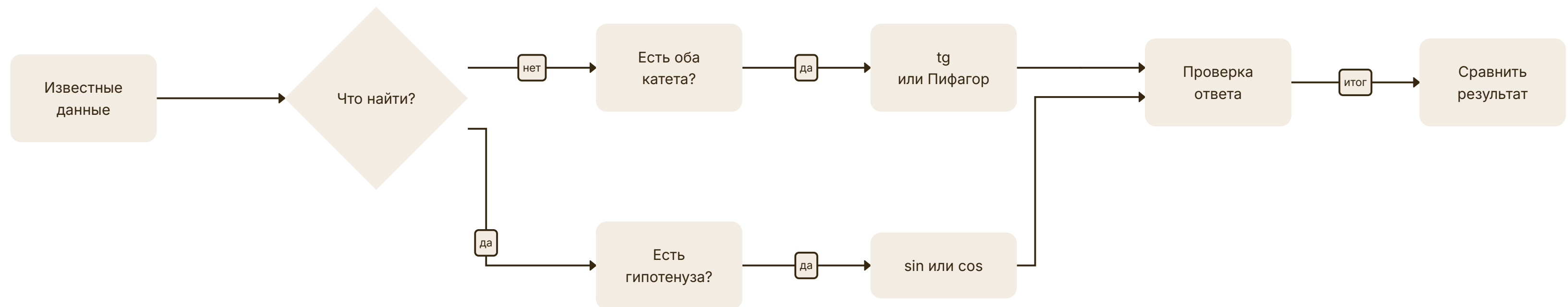
— это длина противолежащего катета в треугольнике с углом 30° и гипотенузой 10 см.

Расчёт по условию примера из слайда

Такой результат получается сразу из значения $\sin 30^\circ$. Один угол и одна сторона уже позволяют восстановить остальные элементы треугольника без лишних построений.

Выбор тригонометрической функции по условию задачи

Последовательность помогает подобрать формулу по известным данным и проверить результат.



Что нужно помнить при решении задач по теме

Правило	Что помнить
Прямой угол	90° внутри
$\sin$, $\cos$, tg	только острые
30° , 45° , 60°	частые значения
Проверка	обязательна

Краткая памятка по основным правилам помогает не теряться при вычислениях и проверке.

Главное — правильно распознать вид треугольника, затем выбрать подходящую формулу и обязательно проверить ответ.



Главный вывод: тригонометрия делает треугольник измеримым

Тригонометрия превращает углы и стороны в удобные отношения, по которым можно находить неизвестные элементы. В задачах и в жизни она помогает измерять то, что нельзя увидеть или потрогать напрямую.