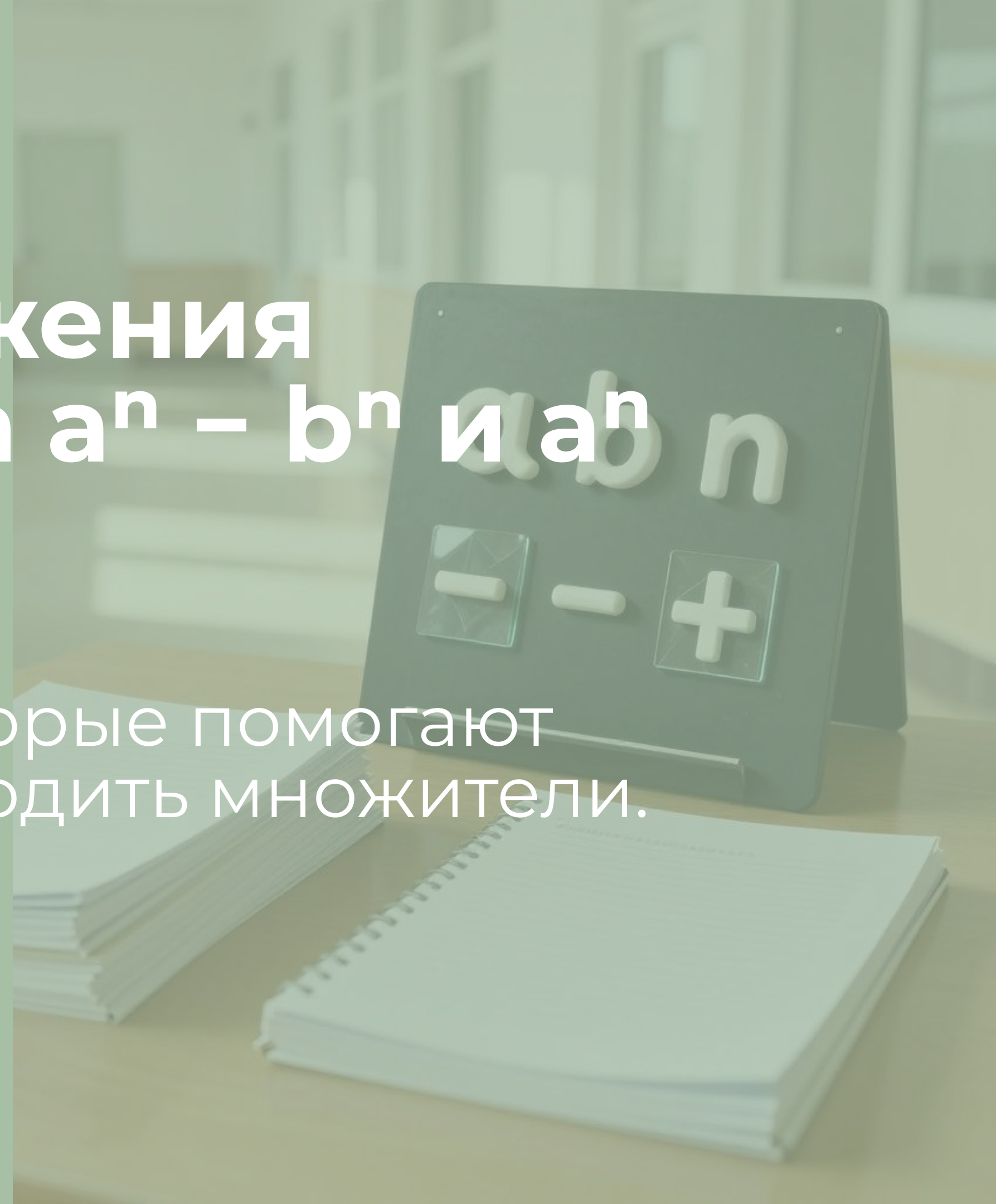
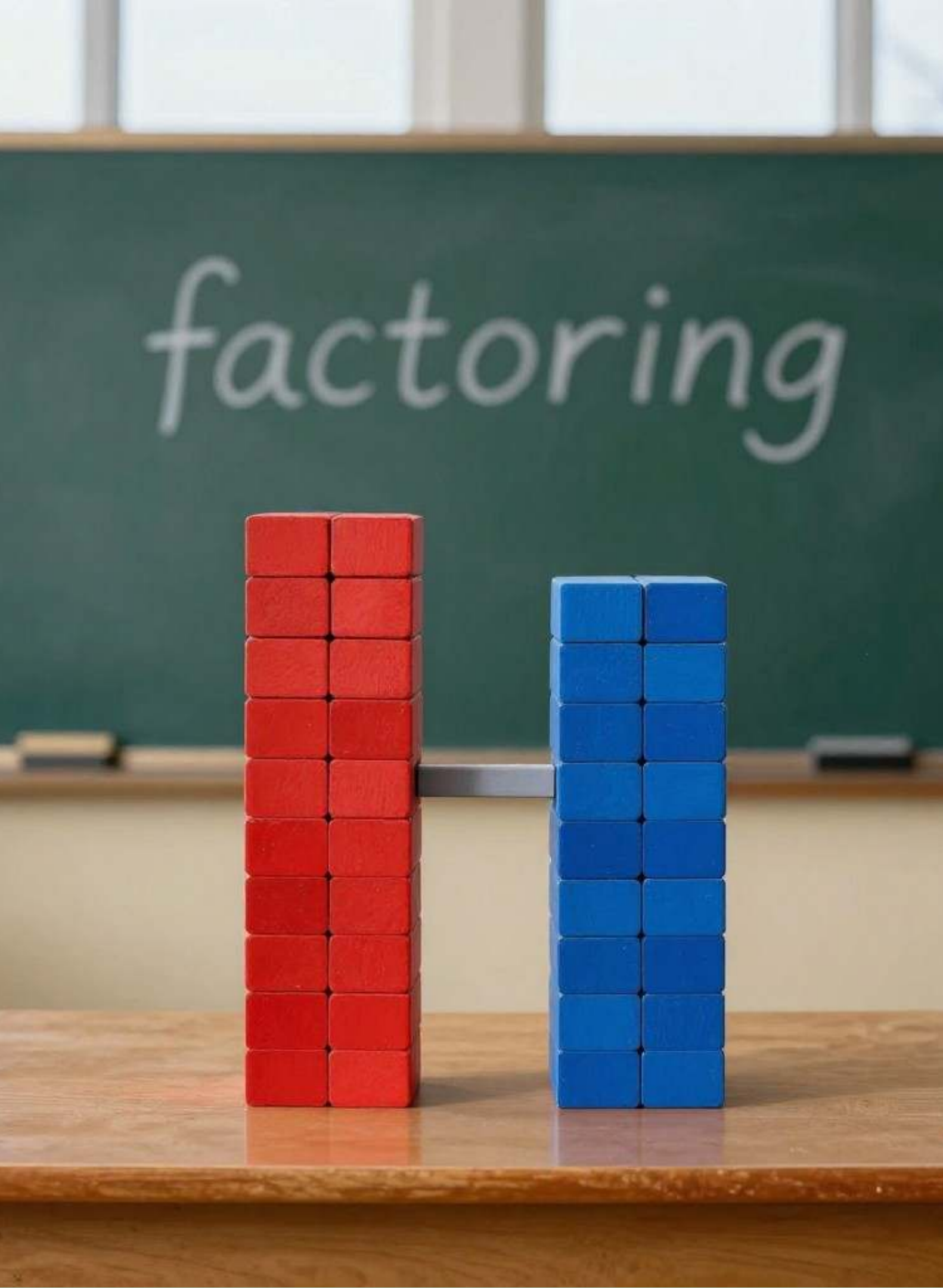


Формулы разложения выражений вида $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$

Разбираем формулы, которые помогают раскрывать скобки и находить множители.





Как разложение на множители помогает в алгебре

Эти формулы ускоряют упрощение выражений, сокращение дробей и решение уравнений. Они опираются на распределительное свойство умножения и на закономерности изменения знаков в скобках.

Основная формула для разности степеней

01 Запись формулы

Для любых натуральных n разность степеней раскладывается так: $a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

02 Структура второй скобки

Во второй скобке всегда ровно n слагаемых. Каждый следующий член получается так: степень a уменьшается на 1, а степень b увеличивается на 1.

03 Область применения

Формула работает при $n = 2, 3, 4, 5$ и любом другом натуральном показателе. Её удобно использовать, когда нужно быстро разложить многочлен на множители.

04 Как запомнить

Если в выражении есть разность одинаковых степеней, первым множителем почти всегда будет $a - b$, а дальше идёт «лестница» из промежуточных членов.

Почему эта формула работает

Раскрытие скобок

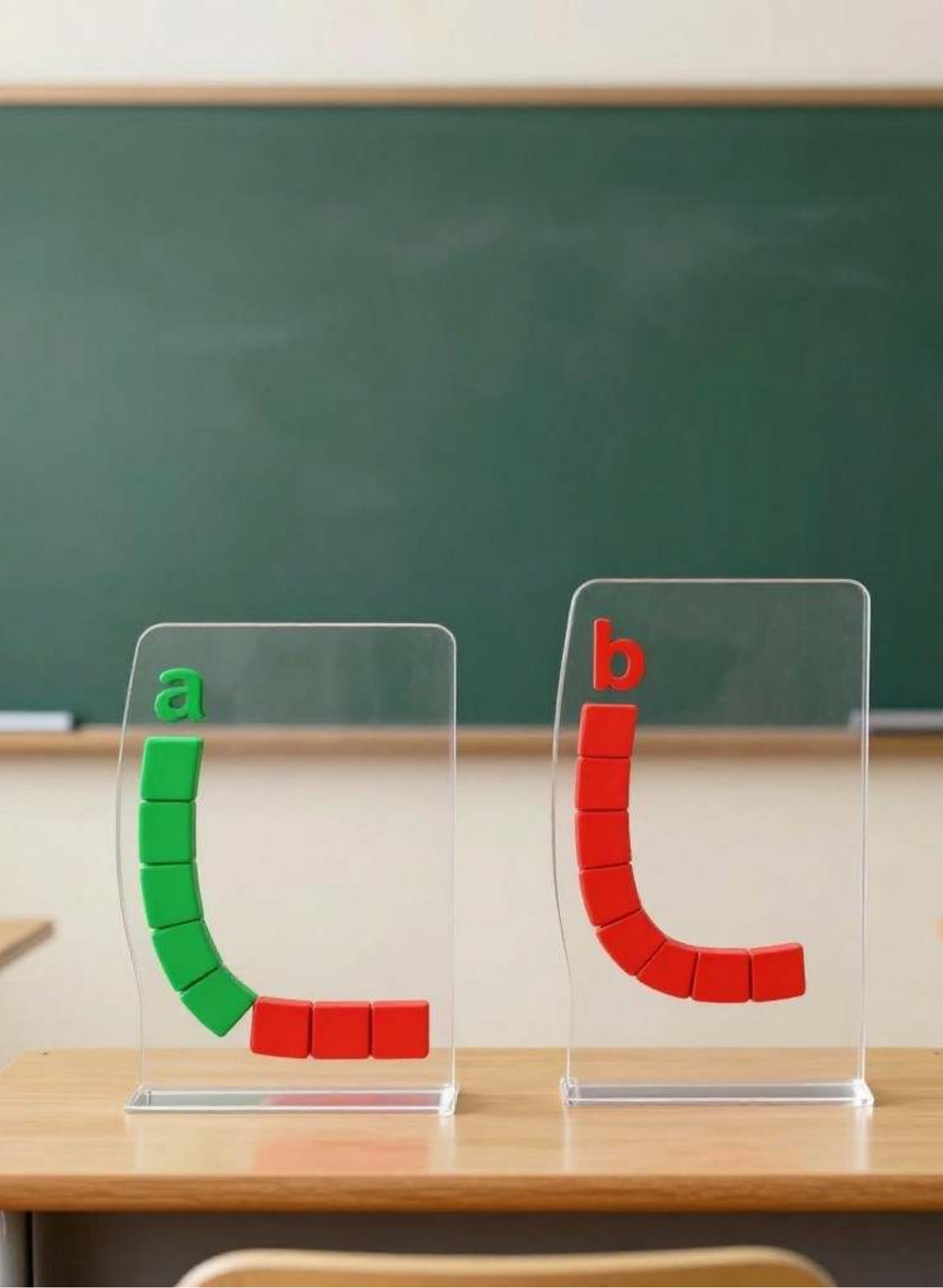
При умножении $(a - b)$ на сумму степеней каждый член первой скобки распределяется по всей второй скобке. Поэтому появляются и положительные, и отрицательные слагаемые.

Взаимное сокращение

Средние члены в полученном произведении совпадают по виду, но имеют разные знаки. Они попарно уничтожаются, и в результате остаются только a^n и $-b^n$.

Проверка на примере

Для случая $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ легко увидеть, как сокращаются ab и $-ab$, а также a^2b и $-a^2b$. Именно так получается нужная разность кубов.





Примеры разности степеней

В таблице показано, как общая формула работает на конкретных выражениях.

Сначала выделяется разность одинаковых степеней, затем записываются промежуточные члены в правильном порядке.

Выражение	Разложение	Показатель
$x^3 - 8$	$(x - 2) (x^2 + 2x + 4)$	3
$27y^3 - 1$	$(3y - 1) (9y^2 + 3y + 1)$	3
$16m^4 - n^4$	$(2 m - n) (8 m^3 + 4m^2n + 2mn^2 + n^3)$	4

Школьные примеры по теме разложения на множители

Частные случаи: квадрат и куб



Разность квадратов

При $n = 2$ получается очень короткая формула: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Её часто используют для быстрого устного счёта и сокращения выражений.



Разность кубов

При $n = 3$ возникает формула $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Она встречается особенно часто, потому что степень в записи ещё остаётся небольшой.



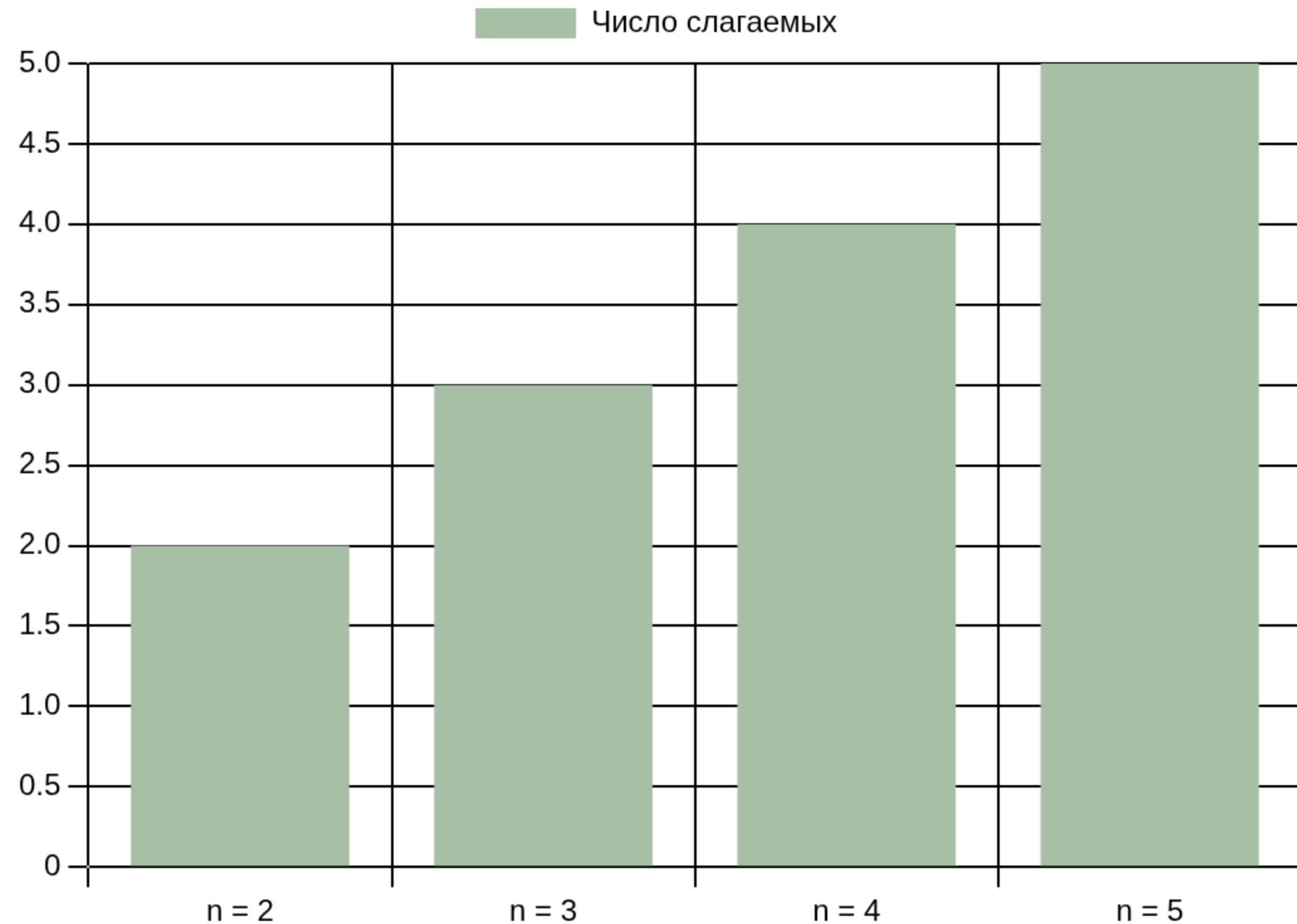
Почему это удобно

Оба случая легко узнавать в задачах, а значит, можно быстрее находить множители, упрощать дроби и проверять вычисления без длинных преобразований.

Сколько слагаемых появляется в скобках

Чем больше показатель степени, тем длиннее вторая скобка. Это помогает заранее понимать, сколько членов нужно записать.

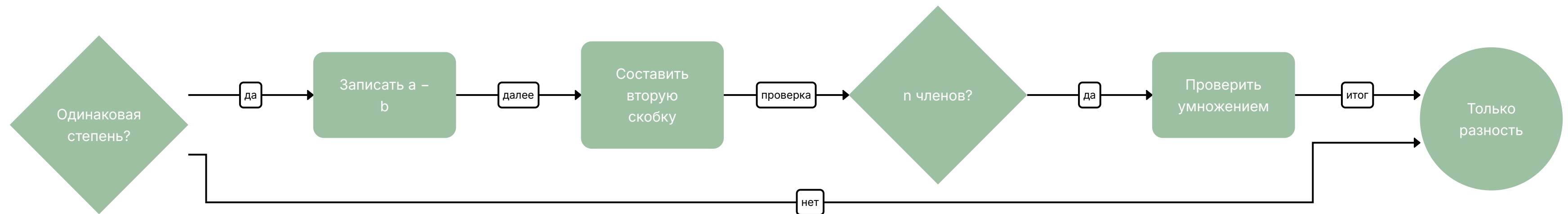
Число слагаемых в правой части формулы разности степеней всегда совпадает с показателем n .



Обобщённая формула $a^n - b^n$ для натуральных n

Алгоритм разложения $a^n - b^n$

Последовательность действий при применении формулы разности степеней



Формула для суммы степеней при нечётном показателе

01 Запись формулы

Если n нечётное, сумма степеней раскладывается так: $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$.

02 Чередование знаков

Во второй скобке знаки меняются по очереди: плюс, минус, плюс, минус. Это помогает не спутать формулу суммы с формулой разности степеней.

03 Ограничение по n

В школьном курсе такая запись используется только при нечётном показателе. Для чётного n готовой формулы с целыми коэффициентами обычно не применяют.

Примеры суммы степеней

Выражение	Разложение	Условие
$x^3 + 27$	$(x + 3) (x^2 - 3x + 9)$	$n = 3$
$8a^3 + b^3$	$(2a + b) (4a^2 - 2ab + b^2)$	$n = 3$
$m^5 + n^5$	$(m + n) (m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4)$	$n = 5$

Примеры показывают, как выглядит формула, когда показатель степени нечётный.

Во всех примерах разложение возможно только потому, что показатель степени нечётный, а в первой скобке появляется сумма $a + b$.

Школьные примеры по формуле суммы степеней

Почему сумма раскладывается только при нечётном n



Подстановка $-b$

Если в выражение $a^n + b^n$ подставить $a = -b$, то при нечётном n получается ноль. Значит, выражение делится на сумму $a + b$ без остатка.

Чётность меняет знак

Когда n нечётное, степень сохраняет знак числа, поэтому для противоположных значений a и b возникает взаимное уничтожение слагаемых. При чётном n этого свойства уже нет.

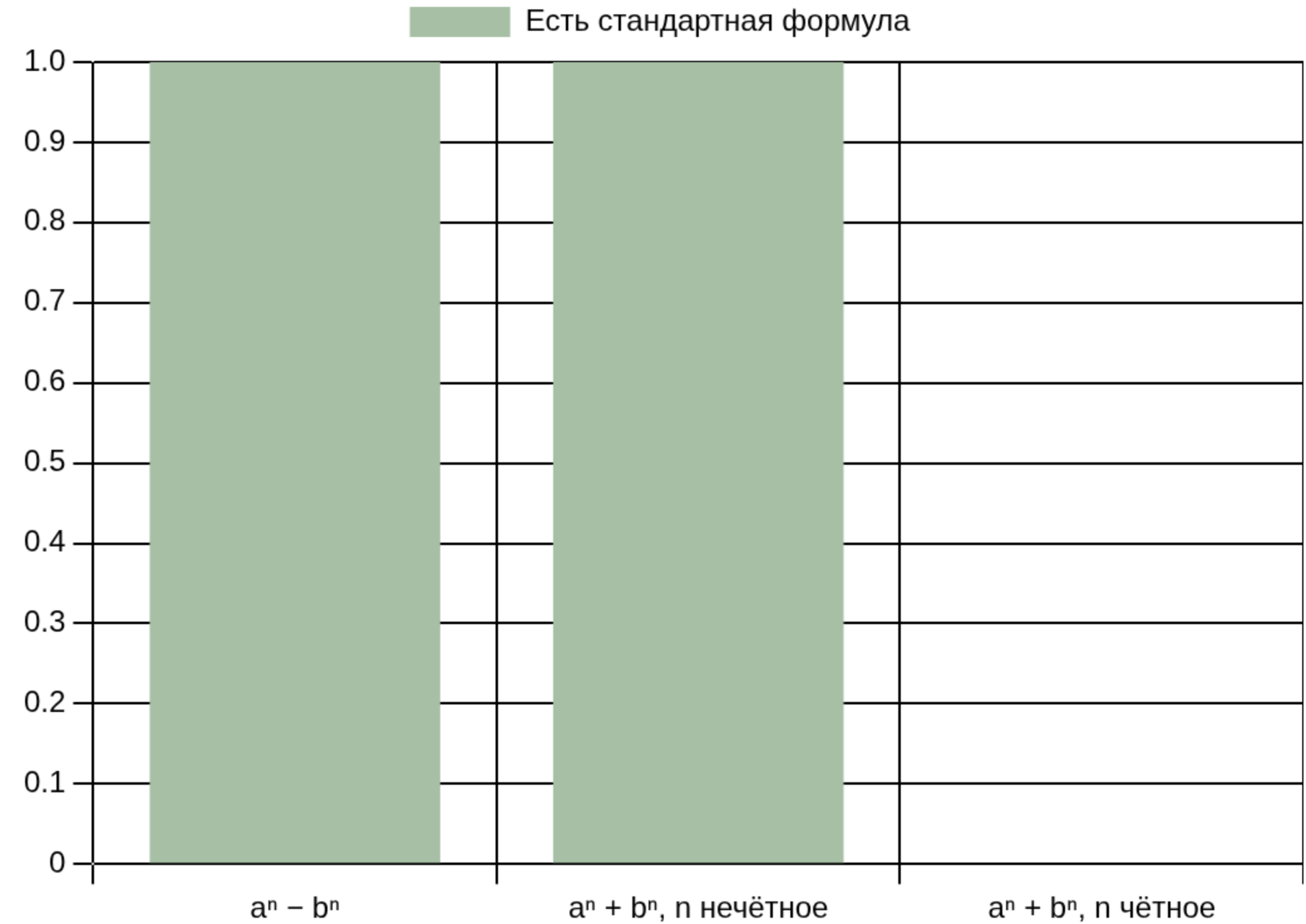
Нет общего множителя

Для чётной степени выражение $a^n + b^n$ не обращается в ноль при $a = -b$, поэтому множитель $a + b$ не обязан входить в разложение в стандартном виде.

Сравнение двух формул

Обе формулы начинаются с простого анализа знака между степенями, но для суммы дополнительно важна чётность показателя.

Разность степеней раскладывается всегда, а сумма степеней — только при нечётном n ; при чётном n стандартной формулы нет.



Учебная формула алгебры, школьный курс

Проверка разложения умножением

Раскрываем скобки

После раскрытия произведения нужно внимательно записать все слагаемые и сравнить их с исходным выражением. Если формула верна, лишние члены должны сократиться.

Смотрим на середину

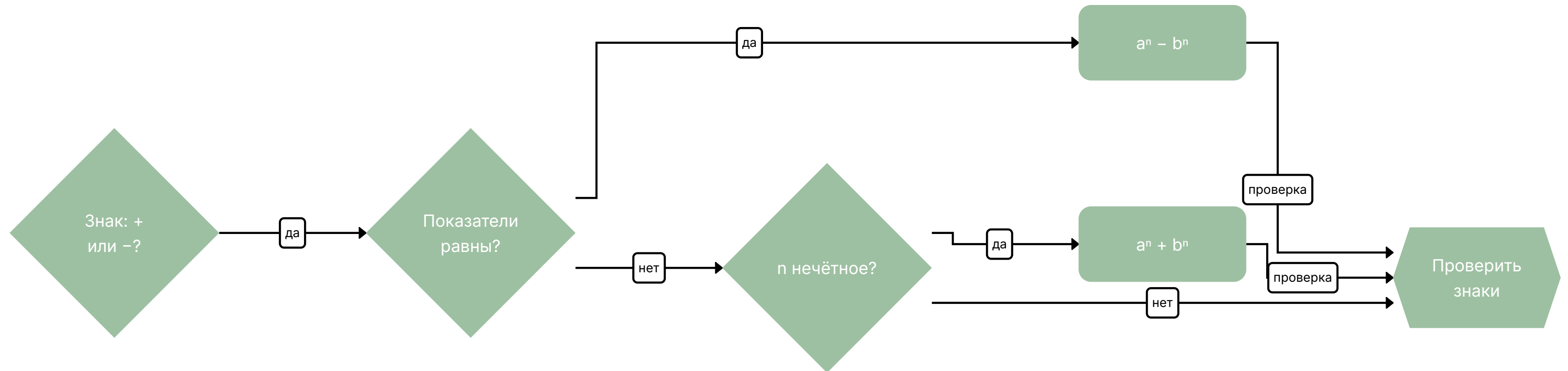
В разности степеней внутренние члены взаимно уничтожаются попарно, поэтому остаются только крайние слагаемые a^n и $-b^n$. Это удобный способ проверить правильность разложения.

Контроль знаков

Для суммы степеней при нечётном n проверка особенно полезна: один неверный знак сразу нарушает сокращение. Поэтому раскрытие скобок помогает избежать ошибок в степенях и знаках.

Выбор формулы разложения

Алгоритм помогает определить нужную формулу по знаку и чётности показателя степени.

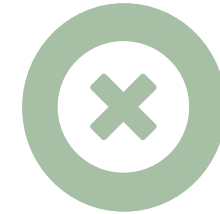


Типичные ошибки при разложении



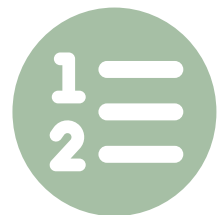
Сбившийся знак

Чаще всего ошибаются во второй скобке: ставят минус там, где должен быть плюс, или наоборот. Из-за этого при раскрытии скобок не получается нужная разность или сумма.



Неверная чётность

Нельзя применять формулу суммы степеней к выражениям вида $a^4 + b^4$. При чётном показателе степени стандартное разложение с множителем $a + b$ в школьном курсе не используется.



Слишком мало членов

В формуле разности степеней в правой скобке всегда ровно n слагаемых. Если их меньше, разложение будет неполным и проверка умножением сразу покажет ошибку.



Нет проверки

Даже верная на вид запись требует проверки раскрытием скобок. Этот шаг помогает заметить перепутанные степени, пропущенные члены и неверное чередование знаков.



Правильные и неправильные записи

Сравнение показывает, как знак и чётность показателя влияют на вид разложения.

Знак во второй скобке зависит от типа формулы, а для суммы степеней решающим становится нечётный показатель степени.

Случай	Запись	Оценка
Куб разности	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$	верно
Куб разности	$(a-b)(a^2-ab+b^2)$	неверно
Чётная сумма	x^4+16	без формулы

Школьные формулы разложения на множители

Применение формул в уравнениях и дробях

Поиск корней

Если выражение уже разложено на множители, корни уравнения можно увидеть сразу. Например, из $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ видно, что $x = 2$ обращает его в ноль.

Сокращение дробей

Разложение помогает быстро сокращать дроби, когда одинаковый множитель стоит в числителе и знаменателе. Это делает преобразования короче и понятнее, особенно в школьных задачах.

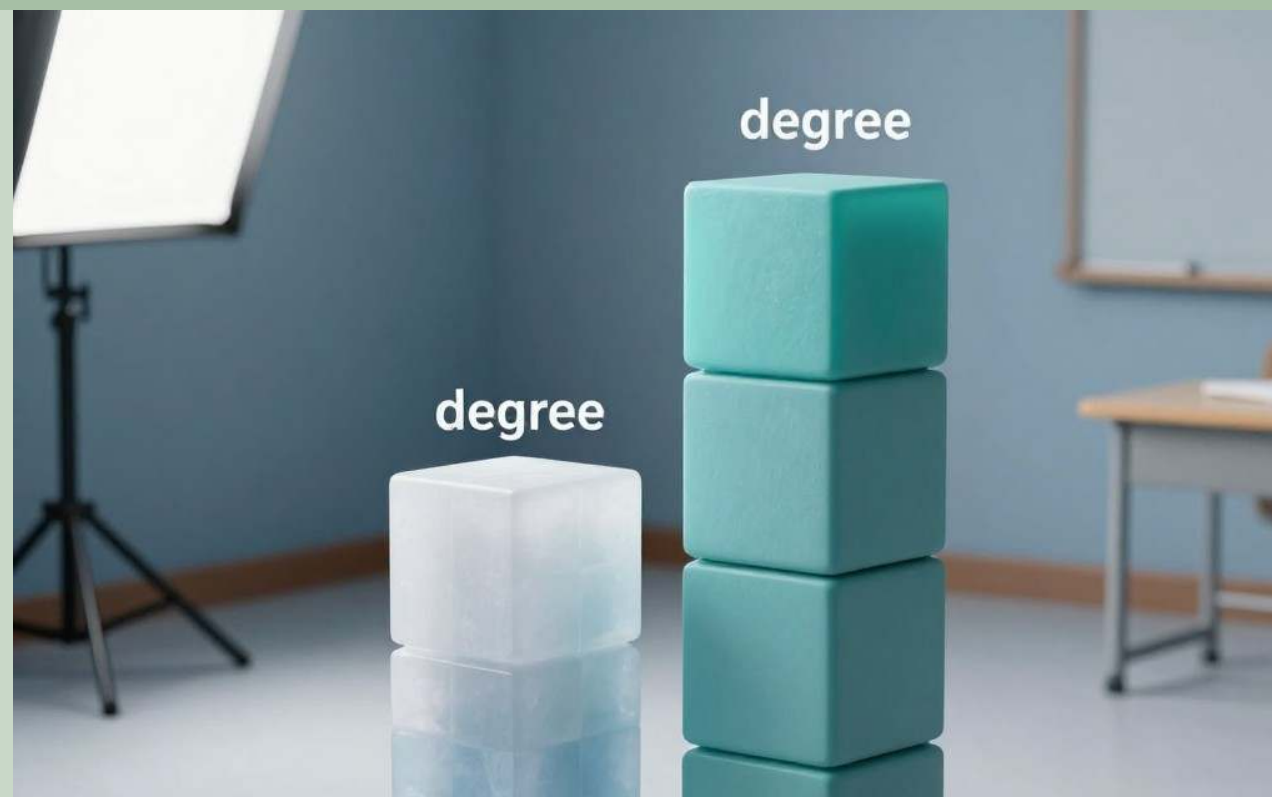
Удобные замены

Выражение $27 - y^3$ можно записать как $(3 - y)(9 + 3y + y^2)$. После этого проще упрощать выражения и выполнять дальнейшие преобразования без лишних вычислений.

Связь с другими темами алгебры

От распределительного свойства к формуле

Формулы разложения строятся на распределительном свойстве умножения: каждый множитель в первой скобке умножается на каждый член второй. Если внимательно раскрыть скобки, становится понятно, почему в правильной записи одни члены складываются, а другие взаимно уничтожаются.



Переход к многочленам

Эти формулы — часть большой темы о разложении многочленов на множители. Они опираются на уже известный случай $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ и подготавливают к более сложным преобразованиям.



Связь со степенью

Показатель степени задаёт не только размер выражения, но и число членов в разложении. Поэтому понимание степеней помогает заранее предсказать вид второй скобки и проверить, не пропущено ли слагаемое.

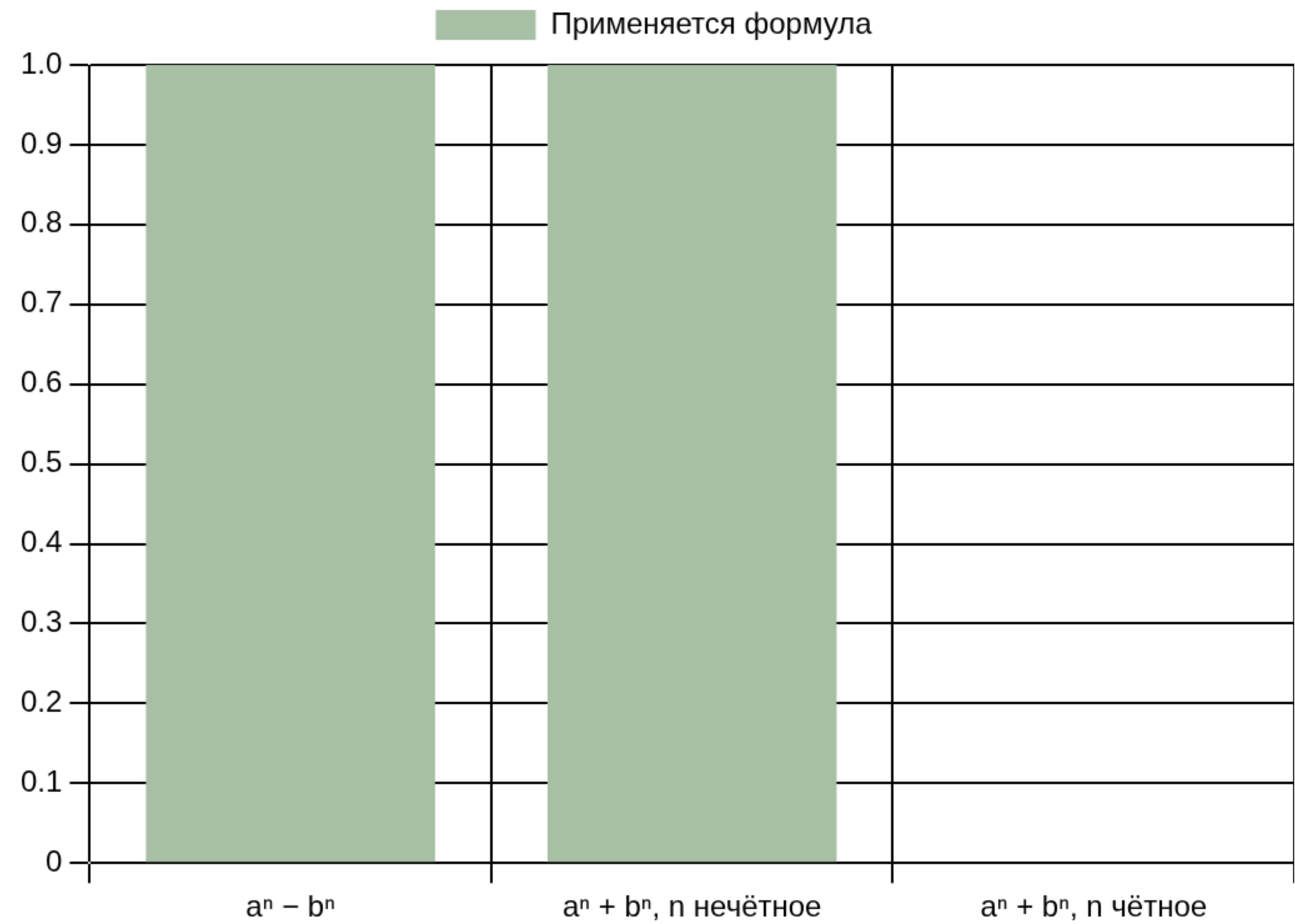




Когда какая формула применяется

Сначала определяют знак между степенями, затем проверяют чётность показателя. Это сокращает число ошибок при выборе разложения.

Универсальна только формула разности степеней; для суммы степеней нужна нечётная степень, иначе стандартное разложение не подходит.



Школьный курс алгебры

Итог: как не ошибиться с формулами

Запомнить нужно главное: разность степеней раскладывается всегда, а сумма степеней — только при нечётном показателе. Если проверять знак, чётность и раскрывать скобки, ошибки почти исчезают.