

Свойства вписанных и описанных четырехугольников

Разберем признаки, свойства и применение в задачах.



Четырехугольники и окружность

Связь многоугольника с окружностью помогает находить углы и стороны, доказывать свойства фигур и решать геометрические задачи точнее и быстрее.



Что такое вписанный четырехугольник

1

Определение

Вписанным называют четырехугольник, у которого все четыре вершины лежат на одной окружности. Такую окружность называют описанной около четырехугольника.

2

Главный признак

Если сумма двух противоположных углов четырехугольника равна 180° , то он является вписанным. Это самый удобный признак для проверки и доказательства.



Признаки вписанного четырехугольника

Признак	Формулировка	В задаче
Углы	$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$	Доказать вписанность
Вторая пара	$\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$	Проверить фигуру
Окружность	Через вершины	Сделать вывод

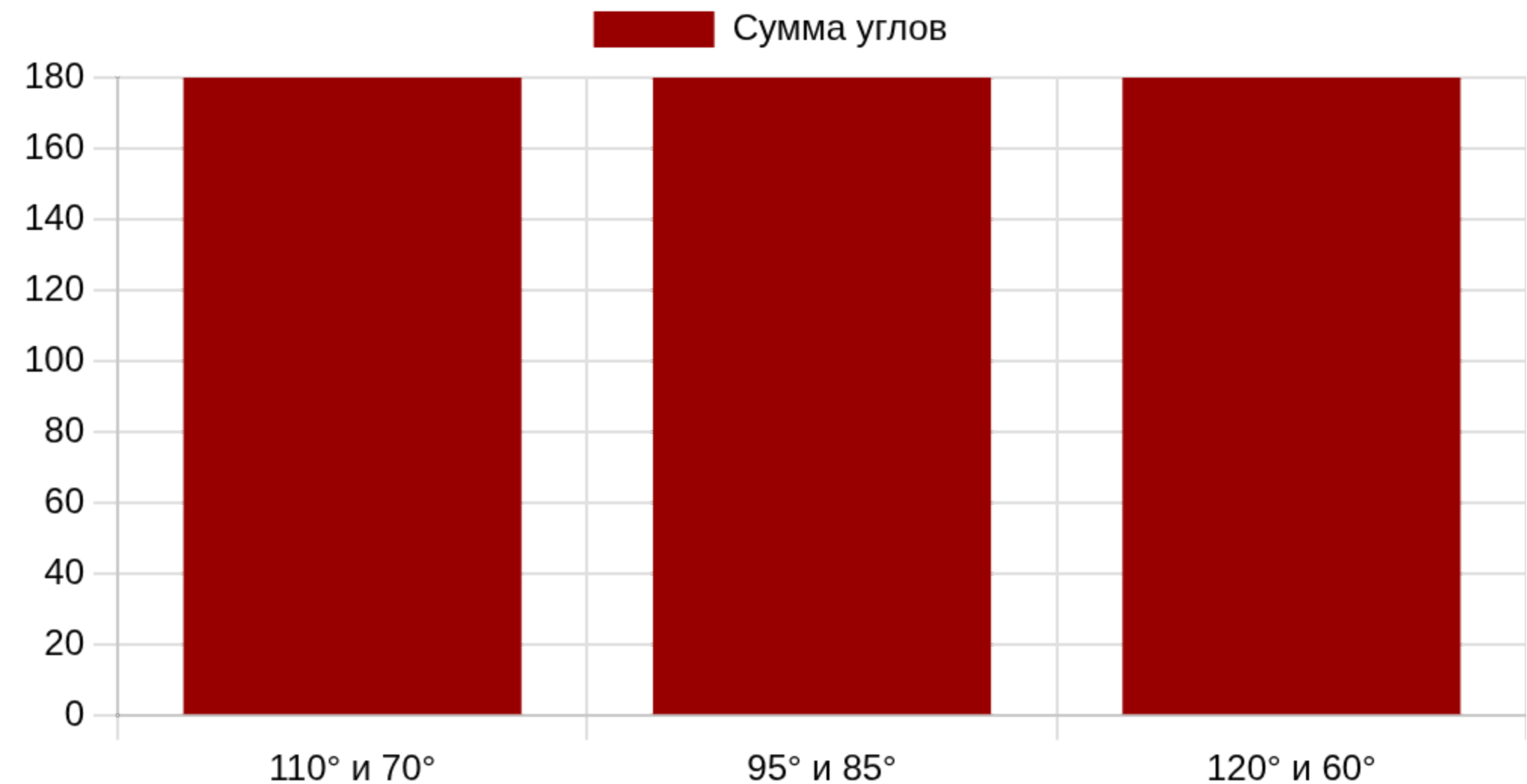
Основные способы установить, что четырехугольник вписан, и как использовать это в задаче.

Для распознавания вписанного четырехугольника чаще всего достаточно проверить одну пару противоположных углов.

Сумма противоположных углов равна 180°

На диаграмме показаны пары углов, которые вместе образуют развернутый угол — именно такое соотношение характерно для вписанного четырехугольника.

Если противоположные углы дают 180° , четырехугольник можно считать вписанным.



Иллюстративные значения для учебного примера

Примеры вписанных четырехугольников

Прямоугольник

Прямоугольник всегда вписан: все его углы по 90° , а противоположные углы в сумме дают 180° . Это делает его удобным примером для проверки признака.

Квадрат

Квадрат тоже является вписанным четырехугольником, потому что он наследует свойства прямоугольника. Его углы равны, а противоположные пары снова дают 180° .

Равнобедренная трапеция

Равнобедренная трапеция часто оказывается вписанной, если углы при каждом основании равны. На рисунках ее легко распознать по симметрии и окружности через вершины.



Что такое описанный четырехугольник

1. Определение

Описанным называют четырехугольник, вокруг которого можно провести окружность, касающуюся всех его сторон. Такая окружность называется вписанной в четырехугольник.

2. Радиусы и касательные

В точках касания радиус окружности всегда перпендикулярен стороне. Это свойство помогает строить чертежи и находить неизвестные элементы фигуры.

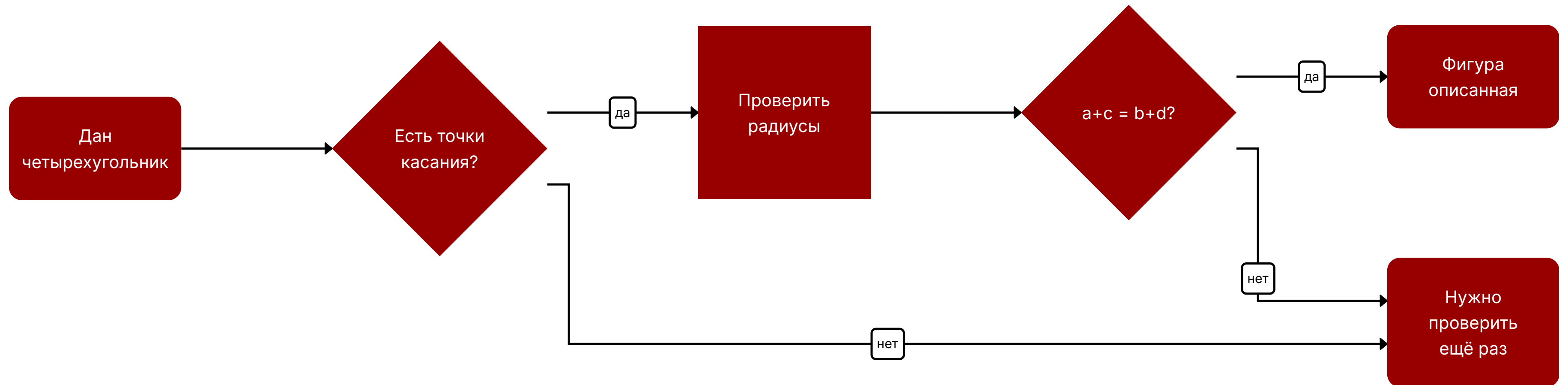
3. Зачем это нужно

Если в задаче есть касательные и окружность, полезно искать прямые углы в точках касания. Так проще доказать нужное свойство или вычислить длину стороны.



Проверка описанного четырехугольника

Алгоритм основан на сравнении сторон и свойствах касательных к окружности.



Главный признак описанного четырехугольника

Стороны	Условие	Вывод
а и с	$a+c$	Проверка
b и d	$b+d$	Проверка
а, с, b, d	$a+c=b+d$	Четырехугольник описан

Свойства описанных четырехугольников, курс геометрии 9 класса

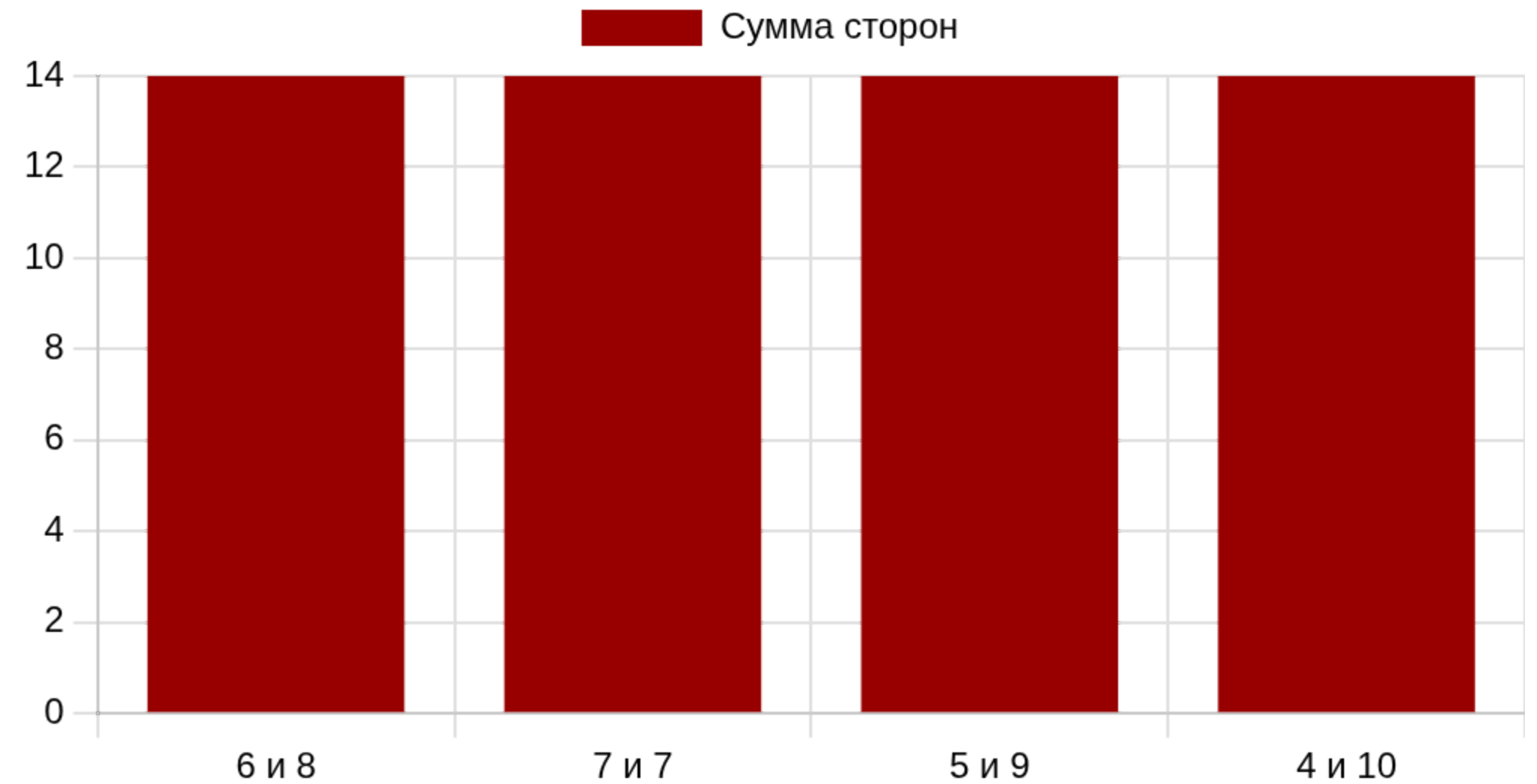
Сравнение противоположных сторон показывает, когда вокруг четырехугольника можно провести вписанную окружность.

Равенство сумм противоположных сторон — основной критерий описанного четырехугольника.

Сравнение сумм противоположных сторон

Пары сторон разные, но их суммы совпадают. Именно это соотношение важно при проверке описанного четырехугольника.

Не равенство отдельных сторон, а равенство их сумм подтверждает описанность.



Иллюстративные значения для учебного примера

Касательные и их свойства

Равные отрезки касательных



Если из одной внешней точки проведены две касательные, то их отрезки до точек касания равны. Это удобный способ находить неизвестные длины в описанном четырехугольнике без лишних вычислений.

Радиус и касательная



Радиус, проведенный в точку касания, всегда перпендикулярен касательной. Поэтому в задачах сразу появляются прямые углы, а затем — равные или дополнительные элементы, связанные с окружностью.

Практика в задачах



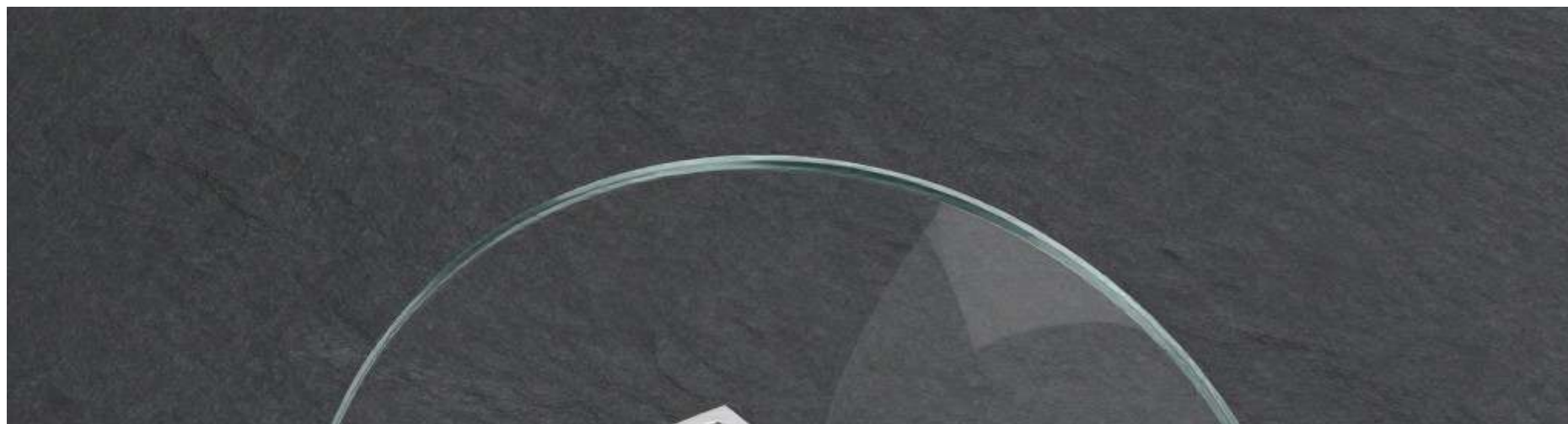
Эти свойства особенно полезны, когда нужно выразить стороны через одинаковые отрезки или доказать равенство частей фигуры. Они часто превращают сложный чертеж в понятную схему с опорой на окружность.

Особые случаи: трапеция, прямоугольник, ромб



Равнобедренная трапеция и окружность

Равнобедренная трапеция часто связана с вписанным четырехугольником: ее углы при каждом основании равны, поэтому противоположные углы могут дополнять друг друга до 180° . На рисунке легко увидеть, как окружность проходит через все вершины.



Прямоугольник как частный пример

Прямоугольник всегда можно вписать в окружность, потому что все его углы прямые. Из этого сразу следует, что противоположные углы дают 180° , а значит фигура подходит под признак вписанного четырехугольника.

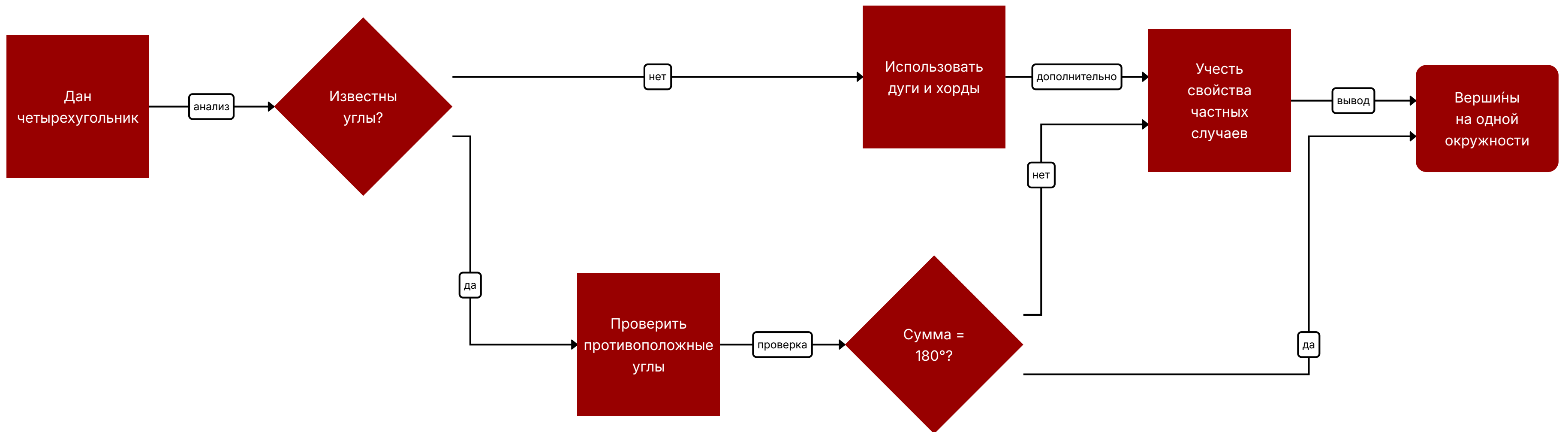


Ромб и касающаяся окружность

Ромб может стать описанным четырехугольником, если в него можно вписать окружность. Тогда суммы противоположных сторон совпадают, а равенство сторон и свойство касательных помогают увидеть симметрию фигуры на чертеже.

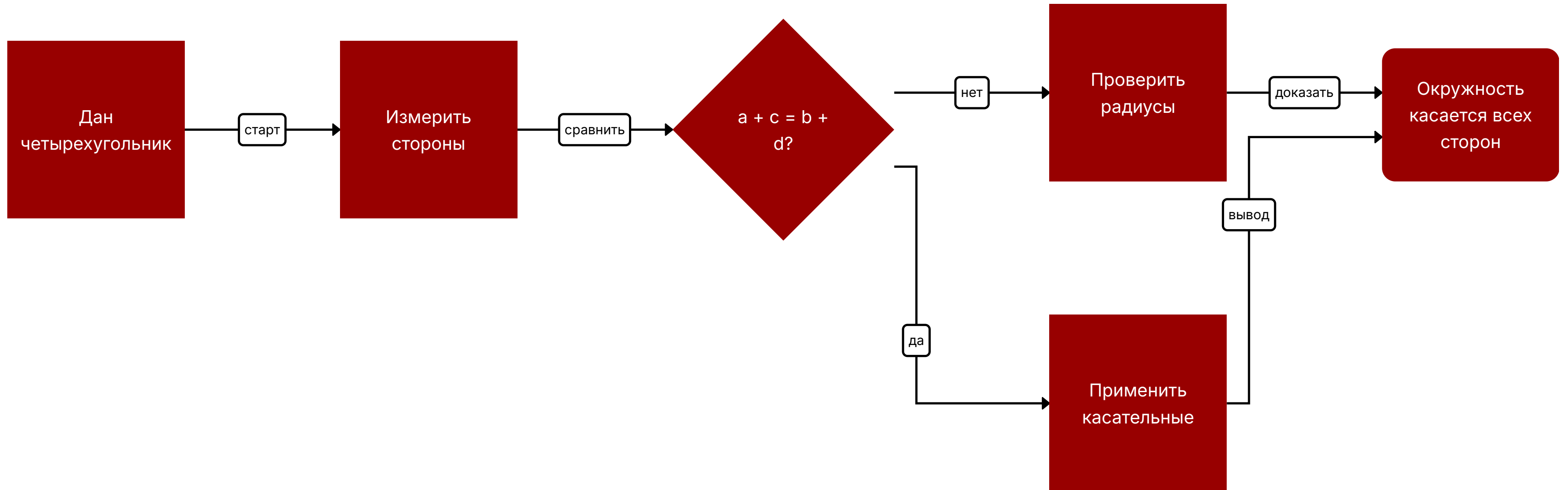
Алгоритм доказательства вписанности

Последовательность проверки углов, дополнительных сведений и специальных свойств четырехугольника



Алгоритм доказательства описанности

Последовательность проверки сторон, сумм и касательных свойств окружности



Типичные ошибки при решении задач

Путают два вида фигур

Иногда вписанный и описанный четырехугольники считают одним и тем же. На самом деле у них разные признаки: у одного связаны вершины, у другого — стороны и касательная окружность.

Проверяют не те элементы

Ошибка возникает, когда сравнивают соседние углы или стороны вместо противоположных. Для верного вывода нужно работать именно с теми парами, которые указаны в признаке.

Слишком широкие выводы

Нельзя утверждать, что любой ромб автоматически вписан или описан. Такое верно только при выполнении нужного условия, поэтому важно проверять данные задачи, а не полагаться на внешнее сходство.

Пропускают условие задачи

Иногда ученик видит окружность на рисунке и сразу делает вывод. Но в геометрии нужно доказать связь словами, формулой или равенством, а не только опираться на изображение.

Сравнение свойств вписанных и описанных четырехугольников

Вид	Связь	Признак	Пример
Вписанный	Вершины на окружности	$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$	Прямоугольник
Описанный	Стороны касаются окружности	$a + c = b + d$	Четырехугольник с вписанной окружностью
Общее	Окружность связана с фигурой	Признак дает вывод	Задачи на доказательство

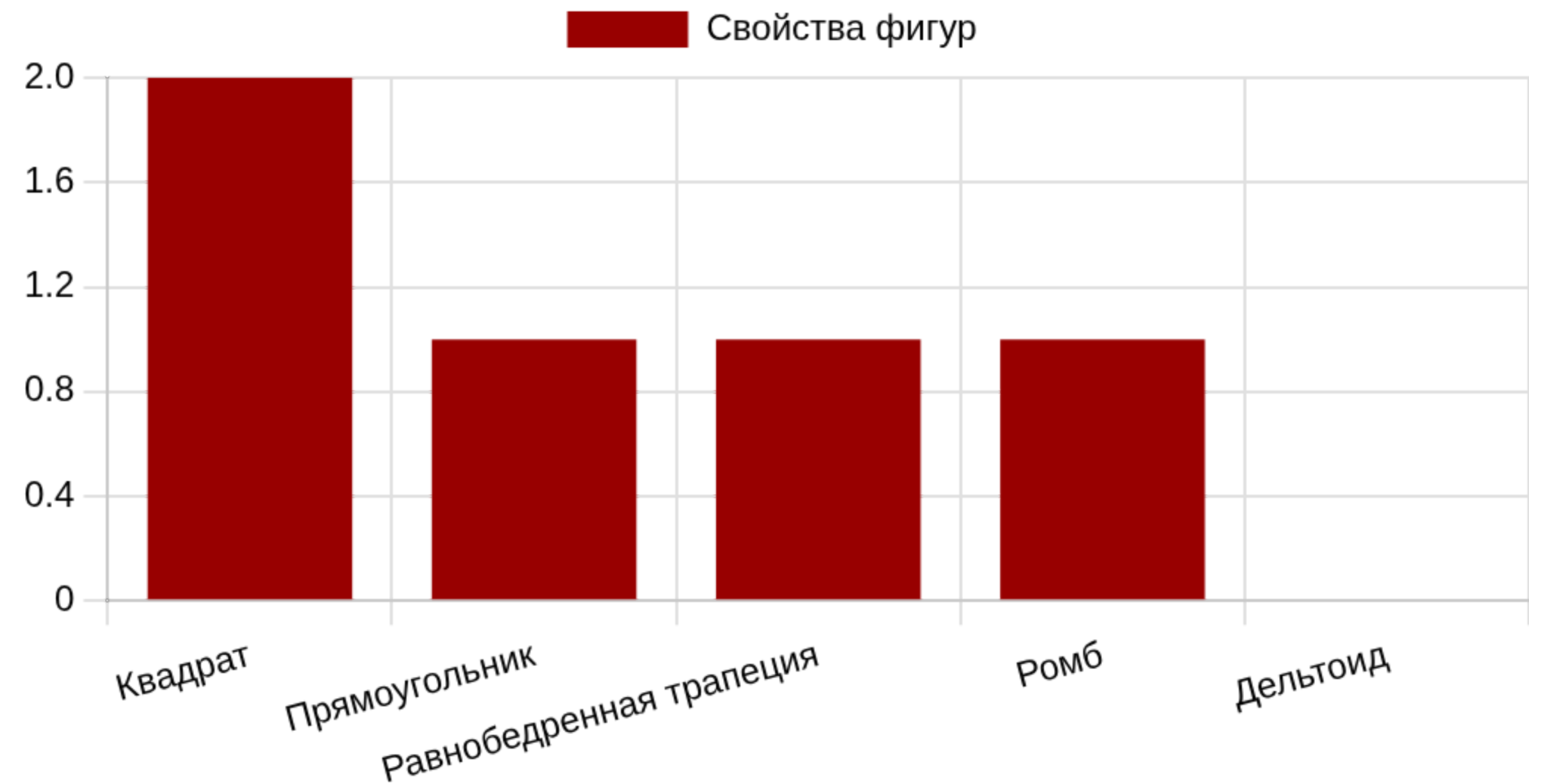
Краткое сопоставление помогает не путать признаки и быстрее выбирать способ решения задачи.

Главное различие — в том, что окружность связывается либо с вершинами, либо со сторонами; именно это определяет нужный признак.

Где свойства встречаются чаще всего

На схеме показаны типичные фигуры, с которыми удобно работать на уроке. Они помогают быстрее узнавать, где применимы признаки вписанности и описанности.

Квадрат и прямоугольник чаще связывают с вписанностью, а равнобедренная трапеция — с проверкой углов. Для ромба и дельтоида признаки нужно уточнять отдельно.



Учебные примеры по теме; дата не требуется

Применение свойств в задачах



Поиск неизвестных углов

Если в чертеже есть окружность, можно использовать сумму противоположных углов или прямой угол между радиусом и касательной. Так неизвестные углы находятся быстрее и точнее.



Нахождение длин сторон

Для описанных четырехугольников удобно сравнивать суммы противоположных сторон и равные касательные из одной точки. Это позволяет выразить неизвестные отрезки через уже известные.



Доказательства без лишних шагов

Свойства сокращают решение: вместо длинных вычислений достаточно показать нужное равенство или перпендикулярность. Поэтому такие задачи становятся более понятными и аккуратными.

Главные формулы и опорные факты

1

Вписанный четырехугольник

Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма двух противоположных углов равна 180° . Это основной признак, который используют для проверки и доказательства вписанности.

2

Описанный четырехугольник

Для четырехугольника, описанного около окружности, суммы противоположных сторон равны. Именно это равенство помогает находить неизвестные длины и подтверждать существование вписанной окружности.

3

Радиус и касательная

Радиус, проведенный к точке касания, всегда перпендикулярен касательной. Благодаря этому в задачах можно сразу выделять прямые углы и строить дополнительные выводы.

4

Равные касательные

Если из одной точки проведены две касательные к окружности, то их отрезки до точек касания равны. Этот факт часто делает решение короче и нагляднее.



Тема, которую важно помнить

Вписанные и описанные четырехугольники легко узнать по связи с окружностью: у одного важны вершины, у другого — стороны. Эти признаки помогают уверенно решать задачи и делать точные геометрические выводы.
