

Сложение вероятностей: основные формулы и смысл

Как находить вероятность хотя бы одного из двух событий?





Почему эта тема важна в 11 классе

Сложение вероятностей связывает школьную теорию с реальными решениями: от анализа экспериментов до статистики. Здесь особенно важно не перепутать «или» и «и», не удвоить общие исходы и выбрать верную формулу.

Событие, исход и вероятность

1 Случайный опыт

Случайный опыт может завершиться разными исходами, и заранее неизвестно, какой именно выпадет. Именно множество возможных исходов задаёт пространство, с которым работает теория вероятностей.

2 Событие как множество

Событие — это часть исходов опыта, то есть подмножество множества всех результатов. Если исход попадает в это подмножество, событие считается произошедшим.

3 Числовая оценка

Вероятность события обозначают $P(A)$. При равновозможных исходах её находят по формуле $P(A)=m/n$, где m — число благоприятных исходов, n — число всех исходов.

4 Границы вероятности

Невозможное событие имеет вероятность 0, а достоверное — 1. Поэтому любая корректная вероятность лежит на отрезке от 0 до 1 и не выходит за его пределы.

Объединение событий на диаграмме Венна



Смысл объединения

Объединение $A \cup B$ означает, что произошло A , или B , или оба события сразу. Это самый естественный случай, когда нас интересует хотя бы один из двух результатов.

Что показывает диаграмма

На диаграмме Венна объединение занимает обе окружности целиком. Видно, что в ответ входят и отдельные части, и общая область пересечения.

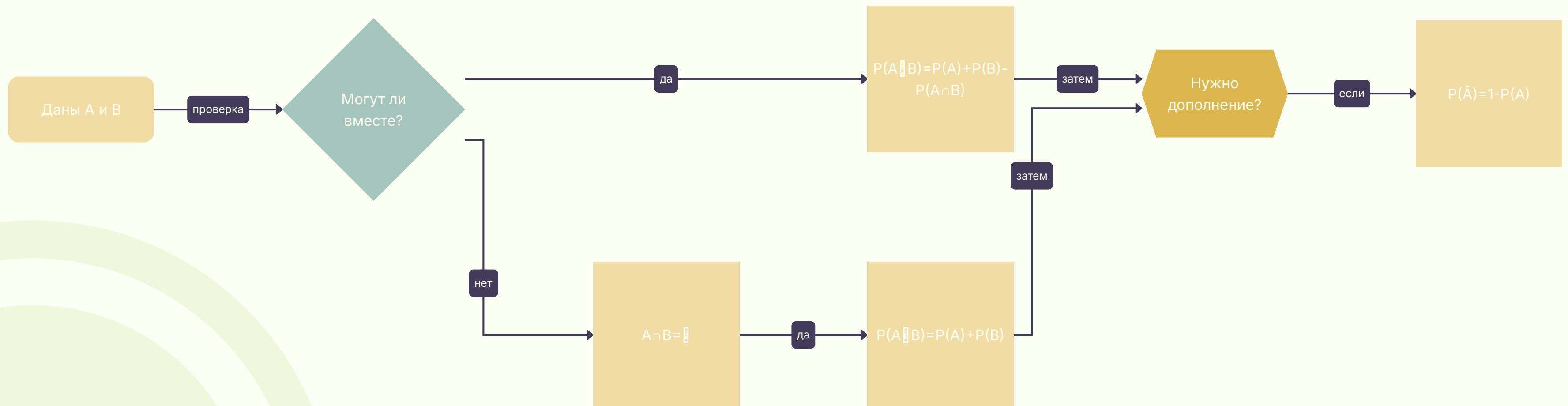


Почему важно пересечение

Пересекающаяся часть соответствует общим исходам. Если не учитывать её отдельно, одни и те же результаты будут посчитаны дважды, и итог окажется завышенным.

Выбор формулы для объединения событий

Последовательность проверки условий помогает избежать двойного счёта и выбрать корректную формулу.



2

**выпада и «2», и «5»
одновременно
невозможны на одном
броске кубика.**

Когда события не могут произойти вместе, их объединение считается простым сложением вероятностей без вычитания пересечения.

Формулы для несовместных и совместных событий

Условие	Формула	Смысл
Несовместны	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	Общих исходов нет
Совместны	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	Общая часть вычитается
$P(A \cap B) = 0$	Переход к первой формуле	Двойного счёта нет

Сравнение показывает, какую формулу применять в зависимости от того, есть ли общие исходы.

Если пересечения нет, формулы совпадают по результату; если оно есть, его обязательно нужно вычесть.

Школьная теория вероятностей

Почему простая сумма может завышать результат

Диаграмма показывает, что сумма отдельных вероятностей не учитывает общий участок событий. Именно поэтому для пересекающихся случаев нужен дополнительный вычет.

0,9 выглядит больше, чем корректное объединение 0,7; разница объясняется двойным учётом общей части.



Учебный пример для иллюстрации двойного счёта

Совместные события и пересечение

1

Общая область

Совместные события могут происходить одновременно, поэтому пересечение $A \cap B$ включает все исходы, подходящие сразу обоим событиям. Именно эта область требует отдельного учёта при вычислении объединения.

2

Исправление формулы

Формула $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ убирает двойной счёт общих исходов. Она даёт точный результат, когда события частично совпадают.

3

Связь с общим правилом

Эта запись является частным случаем правила включений и исключений для двух множеств. Оно показывает, как правильно объединять пересекающиеся части без искажений.

Пример с учащимися класса



Даны данные

В классе 30 учеников: 18 занимаются спортом, 12 — музыкой, а 5 посещают обе секции. Эти числа удобно переводятся в вероятности через деление на 30.

Вычисление объединения

Для событий A и B получаем $P(A)=18/30$, $P(B)=12/30$ и $P(A \cap B)=5/30$. Тогда $P(A \cup B)=(18+12-5)/30=25/30=5/6$.

Почему это важно

Пример показывает, что общих учеников нельзя считать дважды. Если просто сложить 18 и 12, получится завышенный результат, не соответствующий смыслу события.

Использование события-дополнения



Сначала проще найти отрицание

Если прямой подсчёт объединения сложен, выгодно определить, что ни одно из событий не произошло. Затем достаточно применить правило дополнения и получить искомую вероятность через вычитание из единицы.



Удобно при длинном перечислении

Метод особенно полезен, когда неблагоприятных исходов меньше, чем благоприятных. Тогда считать «неудачные» случаи быстрее и надёжнее, чем перечислять все варианты события А или В по отдельности.



Помогает избежать лишних вычислений

Событие-дополнение сокращает путь к ответу в задачах на серию испытаний, риск или поиск хотя бы одного успеха. Часто именно такой подход делает решение коротким и прозрачным.

Вероятность хотя бы одного успеха в серии попыток

При независимых попытках одинаковая вероятность успеха на каждом шаге позволяет быстро оценить общий шанс через вероятность ни одного успеха.

С ростом числа попыток вероятность хотя бы одного успеха заметно увеличивается, потому что уменьшается шанс, что неудача повторится во всех испытаниях.



Иллюстративный расчёт для $p=0,3$ в каждой независимой попытке.

Типичные ошибки при применении формул

Ошибка	Последствие	Что делать
Пересечение дважды	Результат завышен	Вычитать общую часть
Неверный тип событий	Неверная формула	Проверять условие
Игнорировать дополнение	Решение длиннее	Искать через 1-Р
Путать «или» и «и»	Меняется смысл	Уточнять событие

Частые ошибки связаны не с вычислениями, а с неверным выбором формулы и неправильным пониманием события.

Большинство ошибок возникает из-за невнимания к смыслу события. Проверка условий перед вычислением защищает от завышения ответа и логических неточностей.

Сводка типичных ошибок по теме «Сложение вероятностей».

Вероятность как число на отрезке от 0 до 1

Чем больше благоприятных исходов по сравнению со всеми возможными, тем ближе вероятность к единице. Такие значения описывают реальные случайные ситуации.

Промежуточные значения

0 — невозможное событие

Если событие не может произойти ни при каких исходах опыта, его вероятность равна нулю. Это нижняя граница шкалы вероятностей.

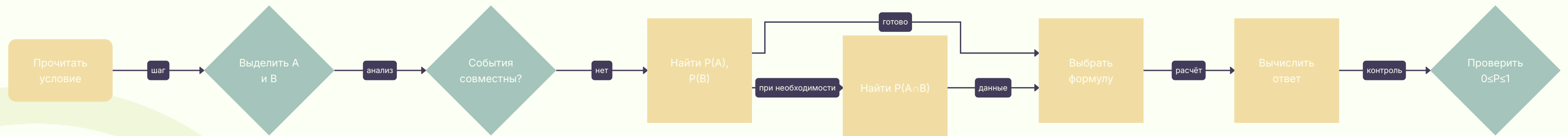
2

1 — достоверное событие

Если событие обязательно происходит, его вероятность равна единице. Поэтому при сложении вероятностей важно не выходить за пределы отрезка $[0; 1]$.

Алгоритм решения задач на сложение вероятностей

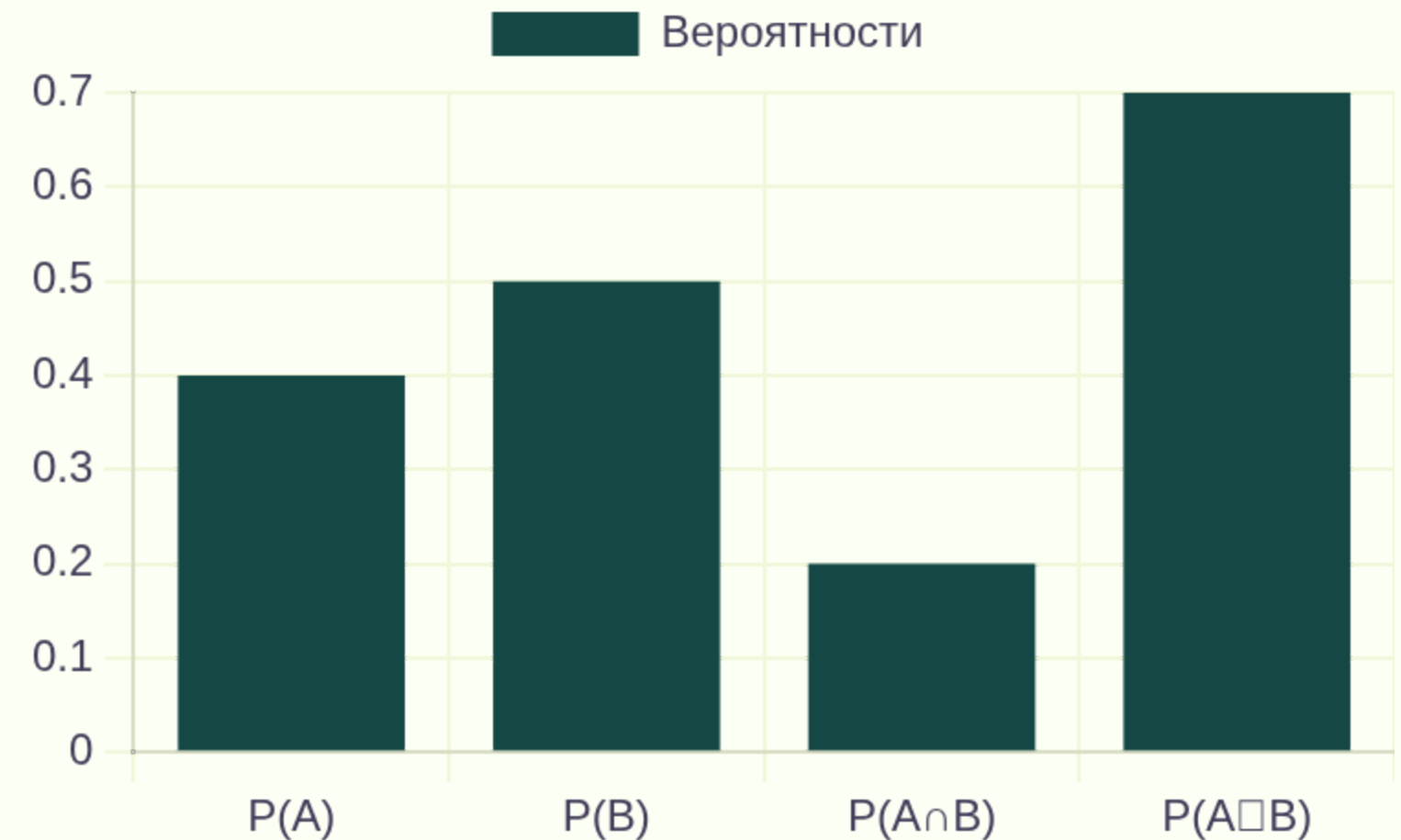
Последовательность выбора формулы зависит от смысла событий и наличия общего исхода.



Пример вычисления для совместных событий

Сумма отдельных вероятностей равна 0,9, но из неё нужно исключить общую часть, чтобы не считать одни и те же исходы дважды.

Пересечение уменьшает завышенный результат до 0,7 и делает ответ согласованным со смыслом объединения событий.



Иллюстративный пример по заданным значениям $P(A)=0,4$, $P(B)=0,5$, $P(A \cap B)=0,2$.

Независимость событий и формула сложения

1 Не путать понятия
Независимость означает, что наступление одного события не влияет на вероятность другого. Это не то же самое, что несовместность, когда оба события не могут произойти одновременно.

2 Использовать произведение для пересечения
Для независимых событий пересечение находится по правилу $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Так удобно считать результат в задачах с повторными испытаниями и случайным выбором.

3 Подставлять в формулу объединения
После нахождения пересечения получаем $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$. Эта запись часто встречается в задачах на монеты, карточки и последовательные опыты.

Применение формулы сложения в реальных ситуациях



Когда результат зависит от нескольких причин

В медицине один и тот же итог может быть связан с разными факторами: симптомами, анализами или особенностями пациента. Формула сложения помогает оценить общий шанс положительного результата, не дублируя общие случаи. Это важно, когда причины частично пересекаются.



Как спорт превращается в вероятностную задачу

В матче победа команды может прийти разными путями: через сильную атаку, удачную оборону или ошибку соперника. Вероятность общего успеха считают как объединение нескольких сценариев, учитывая возможное пересечение ситуаций в игре.



Почему это полезно в повседневных решениях

При выборе маршрута, планировании поездки или оценке риска мы часто сравниваем несколько возможных причин одного события. Умение складывать вероятности помогает не переоценивать шанс и принимать более взвешенные решения в обычной жизни.

Основные формулы по теме

Формула	Когда	Смысл
$P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$	несовместны	сумма без пересечения
$P(A \sqcup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	совместны	вычесть общую часть
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	любое событие	через дополнение
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	независимы	совместное наступление

Базовые формулы теории вероятностей.

Короткая сводка формул помогает быстро выбрать нужный приём в зависимости от типа событий.

Все ключевые случаи сводятся к четырём формулам. Главное — определить тип событий до вычислений, тогда решение получается короче и надёжнее.



Сложение вероятностей: что важно запомнить

Тема сводится к одному правилу: сначала понять смысл событий, затем выбрать формулу. Если учитывать пересечение, дополнение и независимость, вероятность можно находить точно и без лишних вычислений.