
Отображение плоскости на себя: основные движения в геометрии



Каждая точка получает образ в той же плоскости: перенос, поворот, симметрии сохраняют размеры и углы.

Где вы уже сталкивались с такими преобразованиями

Отражения и повторы помогают собирать узоры, объясняют совпадение фигур на чертежах и в архитектуре. В школьной геометрии они связаны с движениями и с построениями на координатной плоскости.



Что такое отображение плоскости



Отображение плоскости на себя — это правило, которое каждой точке плоскости ставит в соответствие ровно одну точку этой же плоскости.



Если по одному и тому же правилу переходят все точки фигуры, получается новый образ фигуры: меняется положение, но не меняется замысел преобразования.



Для движений сохраняются размеры и форма: фигуры остаются равными, а отличаться могут только направлением и местом на координатной сетке.

Какие свойства сохраняют геометрические преобразования



Свойства геометрических движений (учебный материал школьной геометрии).

- Для движений эти свойства сохраняются полностью, поэтому равенство фигур подтверждается не догадкой, а строгими признаками.
- Если преобразование сохраняет длины и углы, параллельность и площадь, его относят к движениям. При растяжении и сжатии хотя бы часть свойств меняется.

Параллельный перенос

Что происходит с фигурой

При параллельном переносе все точки фигуры сдвигаются на один и тот же вектор. Направление и величина сдвига одинаковые для любой точки, поэтому фигура не поворачивается.

Пример на координатной сетке

Например, точка может сместиться вправо на 3 клетки и вверх на 2 клетки. Такой перенос на чертежах часто показывают стрелкой-вектором, задающей направление.



Свойства параллельного переноса

01

После параллельного переноса сохраняются расстояния между точками: если две точки были на некотором расстоянии, то и их образы останутся на том же расстоянии.

02

Сохраняются и величины углов. Значит, стороны фигуры после переноса остаются направленными так же относительно друг друга, а их ориентация не меняется.

03

Площадь фигуры тоже не меняется: новая фигура получается равной исходной. Сам перенос удобнее всего задавать вектором, например $(3; 2)$.

Как выполнить параллельный перенос

Последовательность действий для построения образа фигуры



Поворот вокруг точки

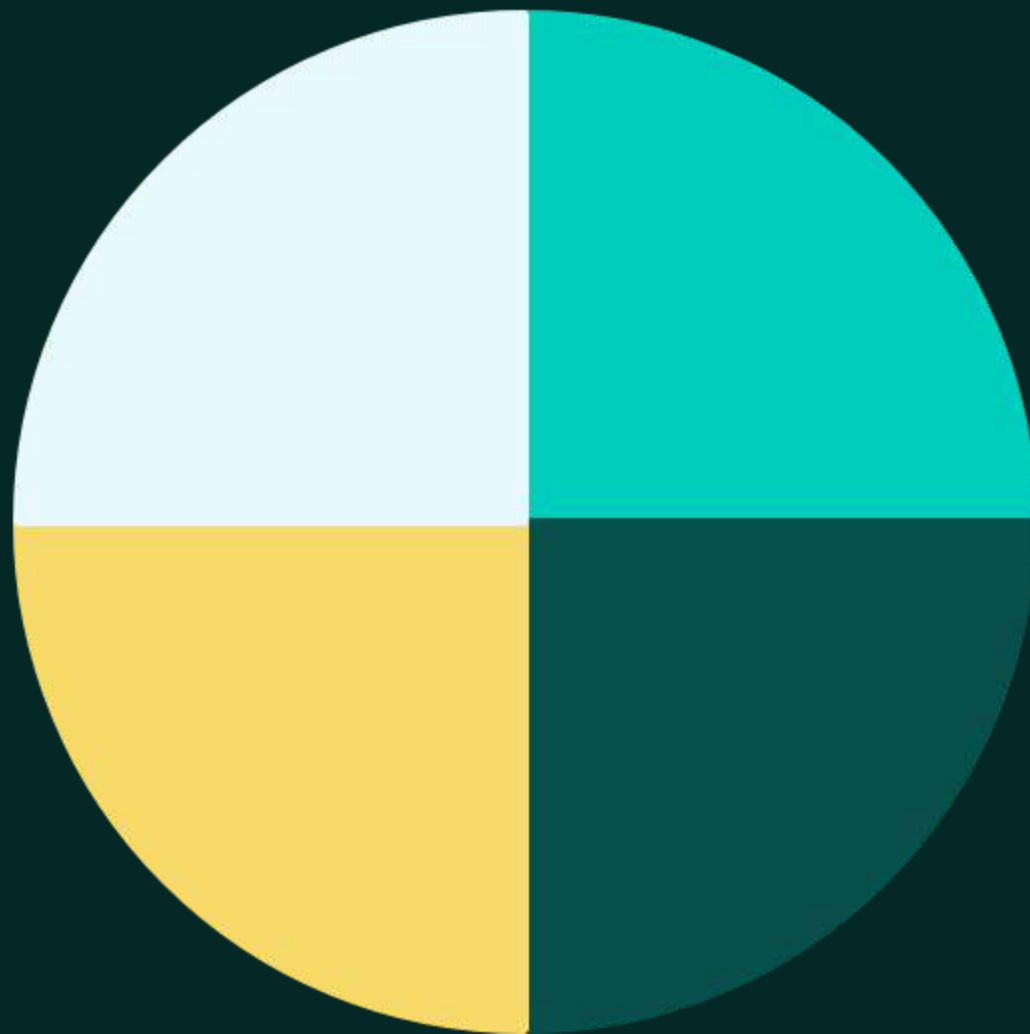
.....○ При повороте каждая точка фигуры перемещается по дуге окружности вокруг выбранного центра. Центр поворота остаётся неподвижным, а точки вращаются вокруг него.

.....○ Чтобы задать поворот, нужны три вещи: центр, угол и направление движения. Угол отсчитывают по часовой стрелке или против, в зависимости от условия задачи.

.....○ Поворот на 90° меняет ориентацию отрезка: горизонтальный становится вертикальным. Поворот на 180° разворачивает фигуру так, что направления оказываются противоположными.

Основные углы поворота и их результат

90° 180° 270° 360°



- Углы 90° и 270° особенно удобны в задачах: фигура заметно меняет положение и ориентацию.
- Большинство задач сводится к распознаванию результата поворота по углу. 180° соответствует центральной симметрии, а 360° возвращает исходное расположение.

Справочный материал по геометрическим преобразованиям (школьная программа).

Сравнение основных преобразований плоскости

Таблица помогает отличать преобразования по тому, что происходит с точками, и какие свойства сохраняются.

Если преобразование сохраняет длины и углы, его можно считать движением: именно поэтому такие преобразования дают равные фигуры.

Вид преобразования	Что происходит с точками	Какие свойства сохраняются	Пример
Параллельный перенос	Сдвиг на вектор	Длины, углы, площадь	(3;2)
Поворот	Вращение вокруг центра	Длины, углы	90°
Осевая симметрия	Отражение относительно прямой	Длины, углы	относительно оси
Центральная симметрия	Переход через центр	Длины, углы	вокруг центра

Свойства геометрических движений (учебный материал по геометрии).

Осевая симметрия: «зеркало» для фигуры



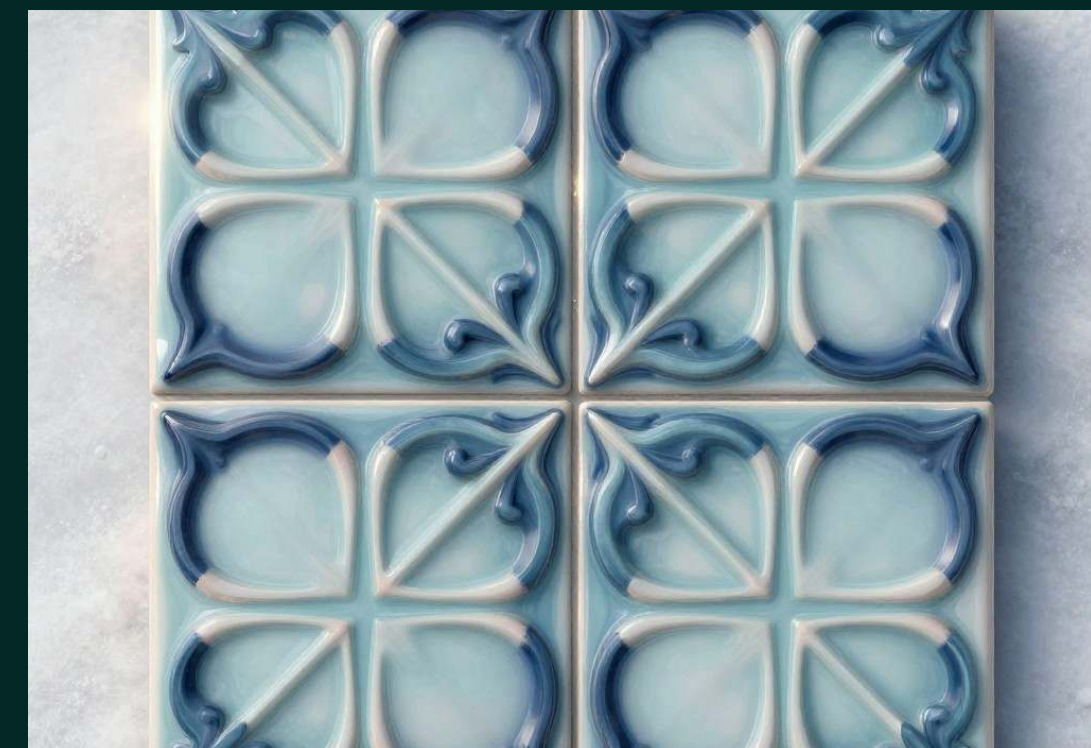
Бабочки и «половинки»

Если провести ось симметрии через тело бабочки, левая и правая стороны выглядят как зеркальные отражения. Каждая точка крыла имеет образ на той же высоте относительно оси, но по другую сторону. Поэтому контур получается «двойным», как в аккуратном отражении в зеркале.



Снежинки: узор строится вокруг оси

Снежинка кажется сложной, но её формы часто сохраняют осевую симметрию: разные лучи похожи, а «веточки» отражаются относительно воображаемой линии. В таком узоре видно, что ось как бы делит рисунок на две одинаковые части, только повернутые в зеркальном отражении.



Сердечки, буквы и плитка

Проверьте знаки, которые вы видите в оформлении: некоторые сердечки, отдельные буквы и орнаменты на плитке имеют ось симметрии. По обе стороны от оси элементы совпадают по форме и расстоянию, поэтому рисунок воспринимается ровным и «сбалансированным».

180°

При повороте на этот угол относительно центра фигура совпадает со своим образом.

Центральная симметрия — это отражение через точку: точка и её образ соединяются отрезком, а центр делит его пополам.

Свойства центральной симметрии в школьной геометрии

Сколько осей симметрии имеют знакомые фигуры

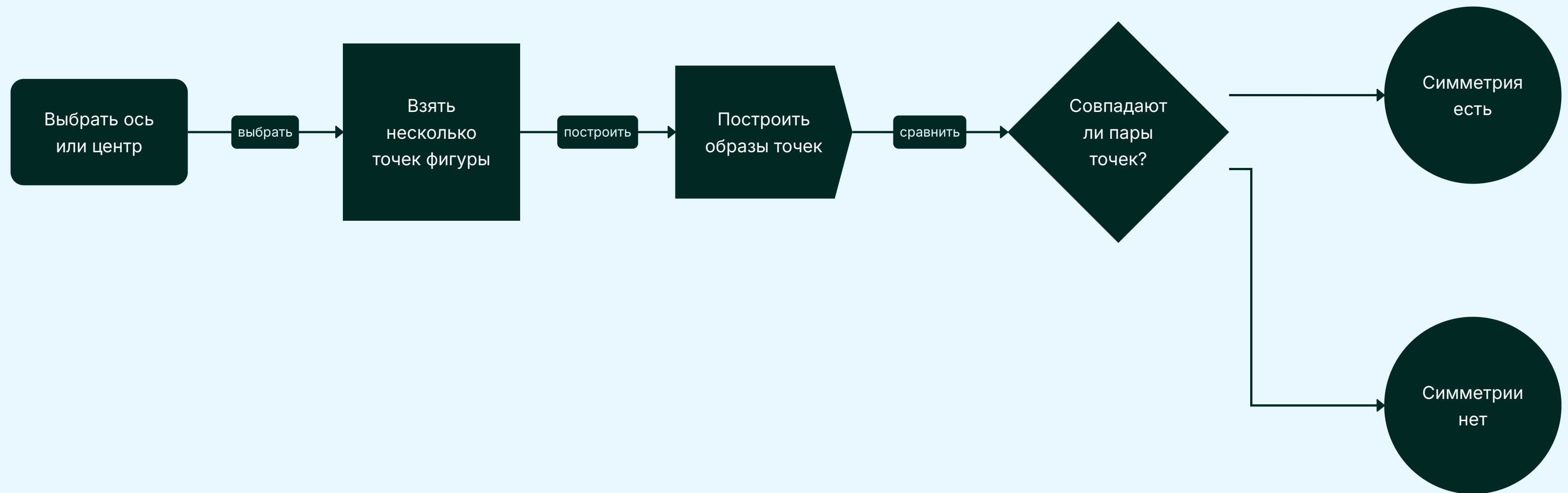


Справочные сведения из курса планиметрии (свойства симметричных фигур); учебники и методические материалы по школьной геометрии

- У окружности их бесконечно много, но на диаграмме она показана как вариант с принципиально «безграничным» числом осей.
- Чем выше симметрия фигуры, тем больше осей: у регулярных фигур число осей выше, а у «случайных» — может быть ноль.

Как проверить наличие симметрии у фигуры

Алгоритм, который опирается на сравнение расстояний до предполагаемой оси или центра



Что не относится к отображениям плоскости на себя

Растяжение меняет размеры: отрезки становятся длиннее или короче, а значит нарушается сохранение расстояний. Поэтому фигуры после растяжения обычно не равны исходным и не образуют движения.

Разрезание и склеивание разрушают целостность фигуры: меняется «состав» частей и их взаимное расположение не определяется одним правилом для всех точек.

При несохраняющих преобразованиях могут изменяться не только длины, но и форма деталей, например углы и пропорции. Тогда нельзя говорить о сохранении всех геометрических свойств.

Отображением плоскости на себя в школьном смысле считают преобразование, которое каждому месту ставит в соответствие новый «зеркальный» или «поворотный» образ без искажения. Такие проверки помогают отличать движения от изменений формы.

Примеры преобразований на координатной плоскости

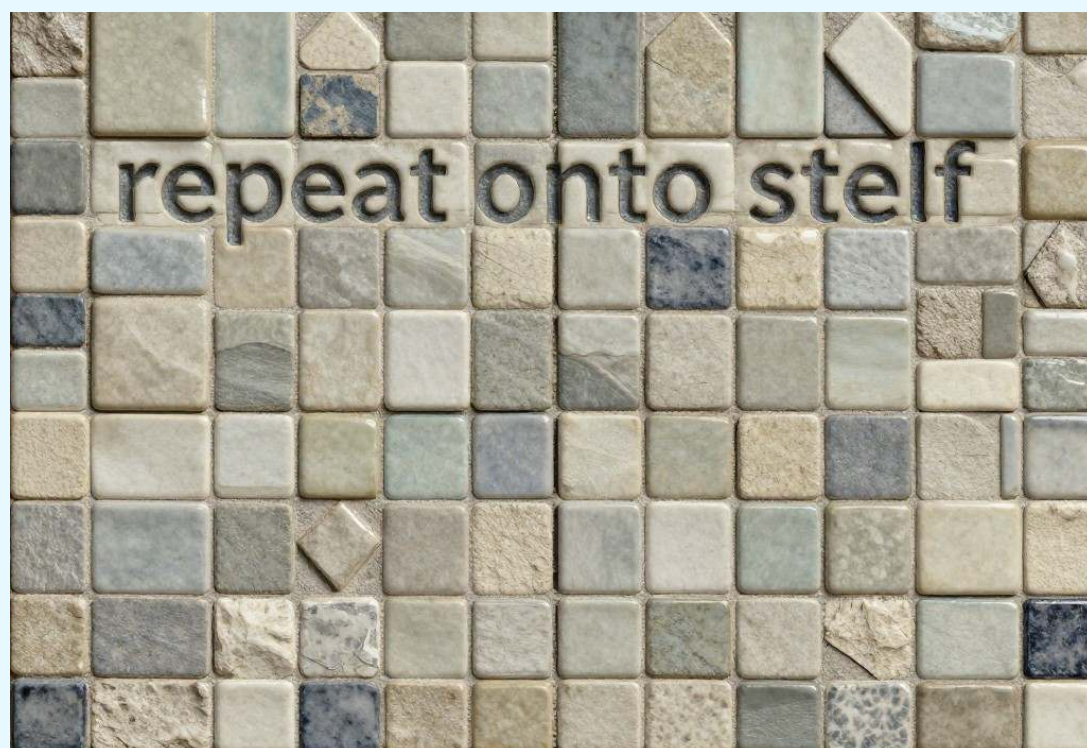
Точка	Преобразование	Образ
A(2; 1)	Перенос (3; 2)	A'(5; 3)
B(2; 1)	Симметрия относительно Oy	B'(-2; 1)
C(2; 1)	Поворот 180° вокруг (0; 0)	C'(-2; -1)

Показаны типовые правила: перенос на вектор, симметрия относительно оси Oy и поворот на 180° вокруг начала координат.

Для каждого преобразования координаты меняются по предсказуемому правилу, а значит можно быстро получать образы точек и проверять равенство фигур.

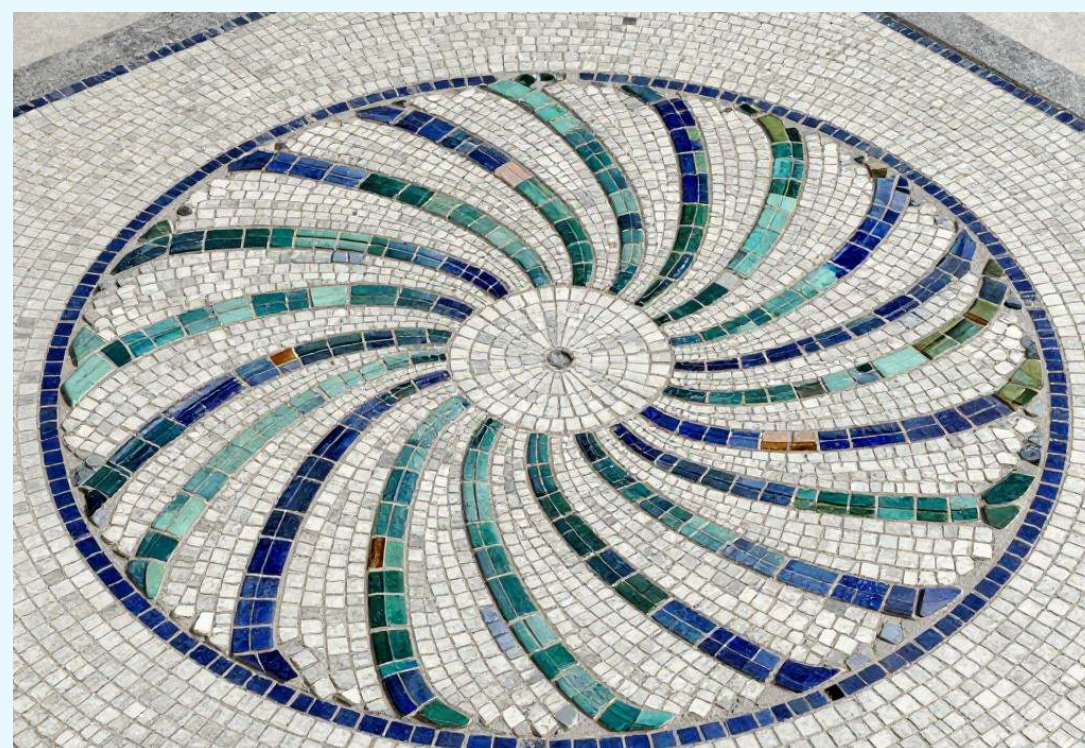
Правила координатных преобразований (школьная геометрия)

Отображения плоскости в орнаментах и мозаиках



Лоскутная повторяемость

В мозаиках из небольших фрагментов узор часто строится так, что один элемент снова и снова переходит сам в себя. Если смотреть на рисунок внимательно, заметно действие переносов и симметрий, которые «раскладывают» узор по всей плоскости.



Повороты в орнаменте

Иногда орнамент кажется «закручивающимся»: один и тот же мотив поворачивается вокруг точки или центра, а затем повторяется. Из-за поворотов элементы сохраняют форму и размеры, поэтому рисунок не искажается и выглядит цельным.



Снежный маршрут элементов

Снежинки — хороший пример, как одни и те же детали могут многократно переходить друг в друга. Похожие веточки строятся по симметричным правилам, поэтому узор расширяется по плоскости, оставаясь гармоничным и «равным самому себе».

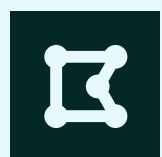
Сравнение видов отображений по ключевым признакам



Свойства геометрических движений (планиметрия); учебные материалы по теме симметрий

- Эти преобразования подходят для построения узоров именно потому, что фигуры после них остаются равными исходным.
- Различия между переносом, поворотом и симметриями связаны с тем, как перемещаются точки, при этом ключевые геометрические величины сохраняются.

Практическое значение темы



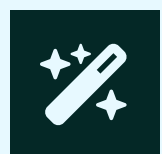
Задачи на построение

Когда вы умеете переносить, поворачивать и отражать фигуры, становится проще находить точки и проводить недостающие элементы без догадок.



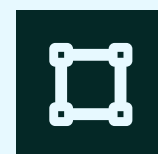
Проверка равенства фигур

Движения сохраняют длины и углы, поэтому по соответствию элементов можно доказывать равенство фигур и аккуратно оформлять решение.



Анализ симметрии

Понимание осевой и центральной симметрии помогает быстро выявлять закономерности в рисунках и отличать симметричные элементы от похожих, но не совпадающих.



Чертёж, дизайн и координаты

Эти приёмы применяются в черчении, при создании орнаментов и в работе с координатной плоскостью, когда нужно точно преобразовать точки.

Главный вывод по теме

Отображения плоскости на себя — это преобразования, при которых фигура остаётся равной самой себе по форме и размеру. Параллельный перенос, поворот и симметрии сохраняют расстояния и углы, поэтому они относятся к движениям.