

Сумма и разность кубов двух выражений

Две формулы, которые упрощают кубы и раскрывают множители.

Что стоит вспомнить перед тем, как начать

Чтобы уверенно работать с кубами, нужно помнить, что степень показывает повторное умножение, а разложение на множители превращает выражение в произведение. Эти навыки помогут быстро узнавать нужную формулу и проверять ответ.



Что такое сумма и разность кубов

— Сумма кубов

Сумма кубов записывается как $a^3 + b^3$. Здесь a и b могут быть числами, буквами или одночленами, поэтому формула подходит для самых разных выражений в алгебре.

— Разность кубов

Разность кубов имеет вид $a^3 - b^3$. Между кубами стоит знак минус, и именно он определяет, какой первый множитель и какой знак внутри второй скобки нужно выбрать.

— Не путать с кубом суммы

Выражение $a^3 + b^3$ не совпадает с $(a + b)^3$. В первом случае складываются уже готовые кубы, а во втором сначала возводится в куб вся сумма целиком.

— Два множителя

При разложении каждый кубический пример превращается в произведение двух скобок. Одна из них линейная, а другая содержит квадратный трёхчлен, который удобно раскрывать и проверять.

— Зачем это нужно

Такие формулы помогают упростить выражения, быстрее выполнить вычисления и подготовиться к решению уравнений. Они часто встречаются в школьных заданиях по преобразованию многочленов.

Две основные формулы разложения

Сравнение показывает, как устроены обе формулы и чем они отличаются.

Первый множитель повторяет знак между кубами, а второй всегда начинается и заканчивается квадратами.

Алгебраические тождества: сумма и разность кубов

Вид	1-й множитель	2-й множитель	Средний знак
a^3+b^3	$(a+b)$	a^2-ab+b^2	–
a^3-b^3	$(a-b)$	a^2+ab+b^2	+

Формула суммы кубов

1 Запись формулы

Сумма кубов раскладывается так: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
Формула работает для любых выражений a и b , если их можно подставить вместо букв.

2 Первый множитель

В первой скобке стоит сумма тех же выражений, которые были в кубах. Это удобно: знак между кубами сохраняется и переходит в первый множитель без изменений.

3

Состав второго множителя

Во второй скобке крайние члены — это квадраты a^2 и b^2 . Между ними ставится средний член $-ab$, то есть знак здесь противоположен знаку сложения.

4

Проверка раскрытием

Если раскрыть скобки, одинаковые средние слагаемые сократятся, а останутся только a^3 и b^3 . Поэтому разложение точно возвращает исходную сумму кубов.

Формула разности кубов

Запись формулы

Разность кубов раскладывается так:
 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Здесь первый множитель повторяет знак между кубами, поэтому в нём тоже стоит минус.

Положительный средний член

Во второй скобке средний член всегда положительный и равен $+ab$. Это главное отличие от формулы суммы кубов, где средний член имеет минус.

Крайние члены

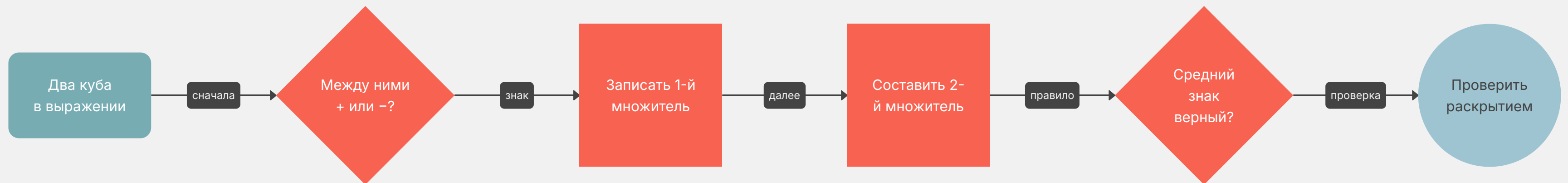
По краям квадратного трёхчлена снова стоят квадраты a^2 и b^2 . Они не меняются, поэтому обе формулы легко сравнивать между собой.

Что получается после раскрытия

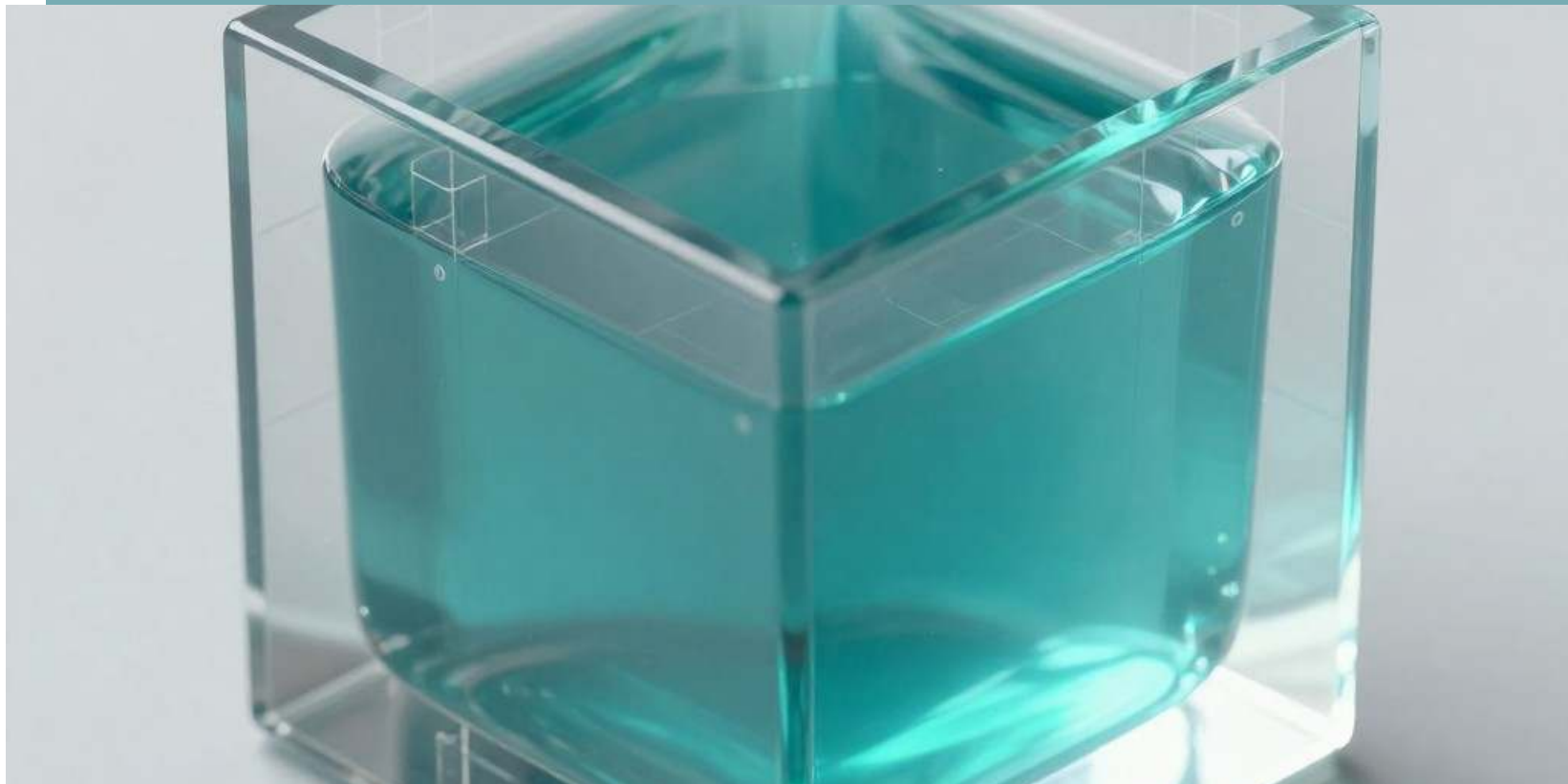
При умножении появляются пары одинаковых слагаемых с разными знаками, и они взаимно уничтожаются. В результате остаются только a^3 и $-b^3$, то есть исходная разность.

Как распознать нужную формулу

Последовательность шагов для выбора правильного разложения на множители.



Геометрический смысл куба



Куб как объём

Если ребро кубической фигуры равно a , то её объём равен a^3 .
Так число в третьей степени можно представить не только как запись, но и как измеримый объём. Это делает формулу более понятной и наглядной для школьника.



Сложное из простого

При разложении на множители большое выражение как будто собирают из более простых частей.
Иллюстрация с кубиками или слоями помогает увидеть, что одно алгебраическое выражение может состоять из связанных элементов, которые удобно рассматривать отдельно.

Чем отличаются две формулы

Обе формулы очень похожи по строению, поэтому важно смотреть именно на знак между кубами и знак в середине второй скобки.

Совпадают первый множитель и крайние члены, а различается только средний знак: минус для суммы и плюс для разности.

Сравнение формул разложения на множители



Почему формулы работают

При раскрытии скобок каждый член первой скобки умножается на каждый член второй. Именно поэтому в записи появляются все нужные слагаемые, а не только часть из них.
Распределительный закон



В ходе умножения возникают пары a^2b и $-a^2b$, а также ab^2 и $-ab^2$. Эти члены одинаковы по модулю, но имеют разные знаки, поэтому они готовы к сокращению.
Появление одинаковых членов



Когда противоположные по знаку члены стоят рядом, они взаимно уничтожаются. После этого в выражении остаются только кубы a^3 и b^3 , без лишних добавок.
Сокращение слагаемых



Поэтому разложение не приближает ответ, а даёт его точно. Если формулу выбрать верно, после раскрытия скобок получится исходная сумма или разность кубов без остатка.
Точный результат



Пример разложения суммы кубов

1

Запишем выражение

Рассмотрим сумму x^3+8 . Чтобы применить формулу, представим 8 как куб: $8=2^3$. Тогда выражение принимает вид x^3+2^3 .

2

Подставим в формулу

Для суммы кубов используем правило $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Здесь $a=x$, $b=2$, поэтому первый множитель будет $x+2$.

3

Составим второй множитель

Во втором множителе получаем x^2-2x+4 . Крайние члены — квадраты x^2 и 2^2 , а средний член равен $-x \cdot 2$.

4

Проверим ответ

Если раскрыть скобки, средние слагаемые сократятся, а останутся только x^3 и 8. Это подтверждает, что разложение записано верно.

27

В примере заменяется кубом числа 3, чтобы применить формулу разности кубов.

Это позволяет записать выражение в виде произведения и сразу сократить вычисления при раскрытии скобок.

Учебный пример: $27 = 3^3$

Типичные ошибки при разложении

Ниже показаны самые частые неточности и то, как их избежать при работе с формулами суммы и разности кубов.

Главная проверка: знак в середине второго множителя всегда противоположен знаку между кубами.

Правила разложения суммы и разности кубов

Ошибка	Как правильно
$(a+b)^3$	Это не a^3+b^3
Знак в середине	Противоположный
64 без куба	$64=4^3$
Только первый множитель	Меняются оба

Как проверить правильность ответа

1. Раскрыть скобки

Умножьте множители и посмотрите, какие члены получаются в начале и в конце. Первый должен дать a^3 , а последний — b^3 .

2. Сократить средние члены

Проверьте, что одинаковые по модулю слагаемые с разными знаками взаимно уничтожаются. Именно это убирает лишние члены и оставляет только кубы.

3. Сравнить с исходным выражением

Если после раскрытия скобок снова получилась сумма или разность кубов, разложение выполнено верно. При несоответствии нужно проверить знаки и квадраты.

Чем сумма кубов отличается от куба суммы



Похожее начало — разный смысл

Снаружи выражения могут выглядеть похоже, но правила для них разные. В сумме кубов есть только два куба, а в кубе суммы появляется ещё несколько промежуточных членов.



Где спрятана ошибка

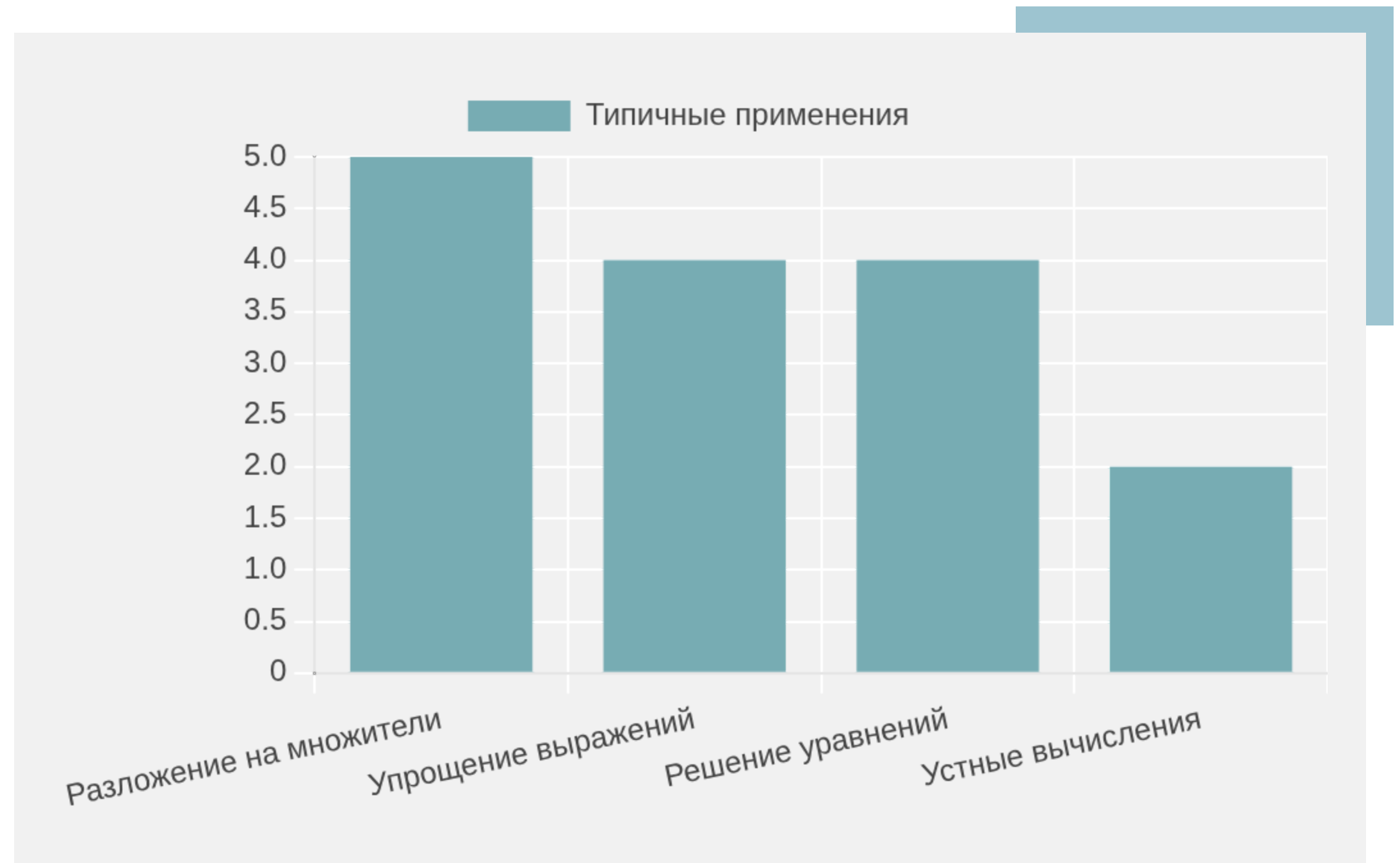
Если перепутать формулы, ответ получится неверным уже после первого раскрытия скобок. Поэтому важно запомнить: в кубе суммы обязательно присутствуют члены с коэффициентом 3, а в сумме кубов их нет.

Где формулы суммы и разности кубов полезны

Формулы особенно помогают там, где нужно быстро увидеть множители и сократить запись, не выполняя длинных преобразования по шагам.

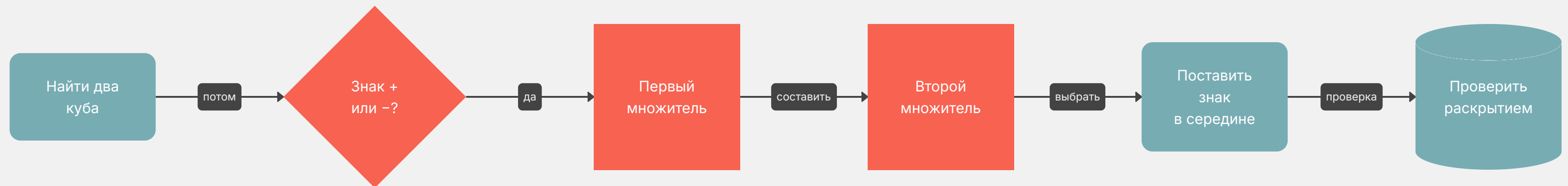
Самая заметная польза — разложение на множители; дальше формулы поддерживают упрощение, решение уравнений и проверку вычислений.

Учебная классификация типичных применений в школьной алгебре



Алгоритм разложения на множители

Последовательность действий для суммы и разности кубов в школьных примерах.



Использование формул в уравнениях

— Сначала разложить

Если в уравнении встречаются сумма или разность кубов, удобно сразу представить их как произведение множителей. Так уравнение становится короче и понятнее.

— Применить нулевое произведение

Когда произведение равно нулю, достаточно приравнять к нулю каждый множитель по отдельности. Это позволяет находить корни без лишних вычислений.

— Сократить шаги

Разложение часто заменяет длинное раскрытие скобок и помогает быстрее увидеть структуру выражения. Особенно это полезно в задачах с буквами и неизвестными.

— Проверить ответ

После нахождения корней полезно подставить их в исходное уравнение. Такая проверка показывает, что преобразования выполнены без ошибок.

Короткая памятка по формулам

Эта таблица помогает быстро вспомнить, какой знак ставить в первом и втором множителях, когда нужно разложить сумму или разность кубов.

Первый множитель повторяет исходный знак, а средний знак во втором множителе всегда ему противоположен.

Основные формулы разложения суммы и разности кубов

Вид	Первый множитель	Средний знак
a^3+b^3	$(a+b)$	–
a^3-b^3	$(a-b)$	+

Что важно запомнить

Формулы суммы и разности кубов помогают быстро раскладывать выражения на множители, упрощать вычисления и решать уравнения. Главное — уверенно узнавать вид выражения и не путать знаки.