

Функция $y = k/x$

Обратная пропорциональность,
гипербола и её свойства



Где встречается обратная пропорциональность

Когда одна величина растёт, а другая уменьшается, связь легко заметить в задачах и в жизни: от скорости и времени до площади и распределения работы. Функция $y = k/x$ помогает увидеть эту зависимость на графике и в таблице значений.



Именно две ветви образуют гиперболу,
а знак и величина k определяют
их расположение и удалённость от осей.

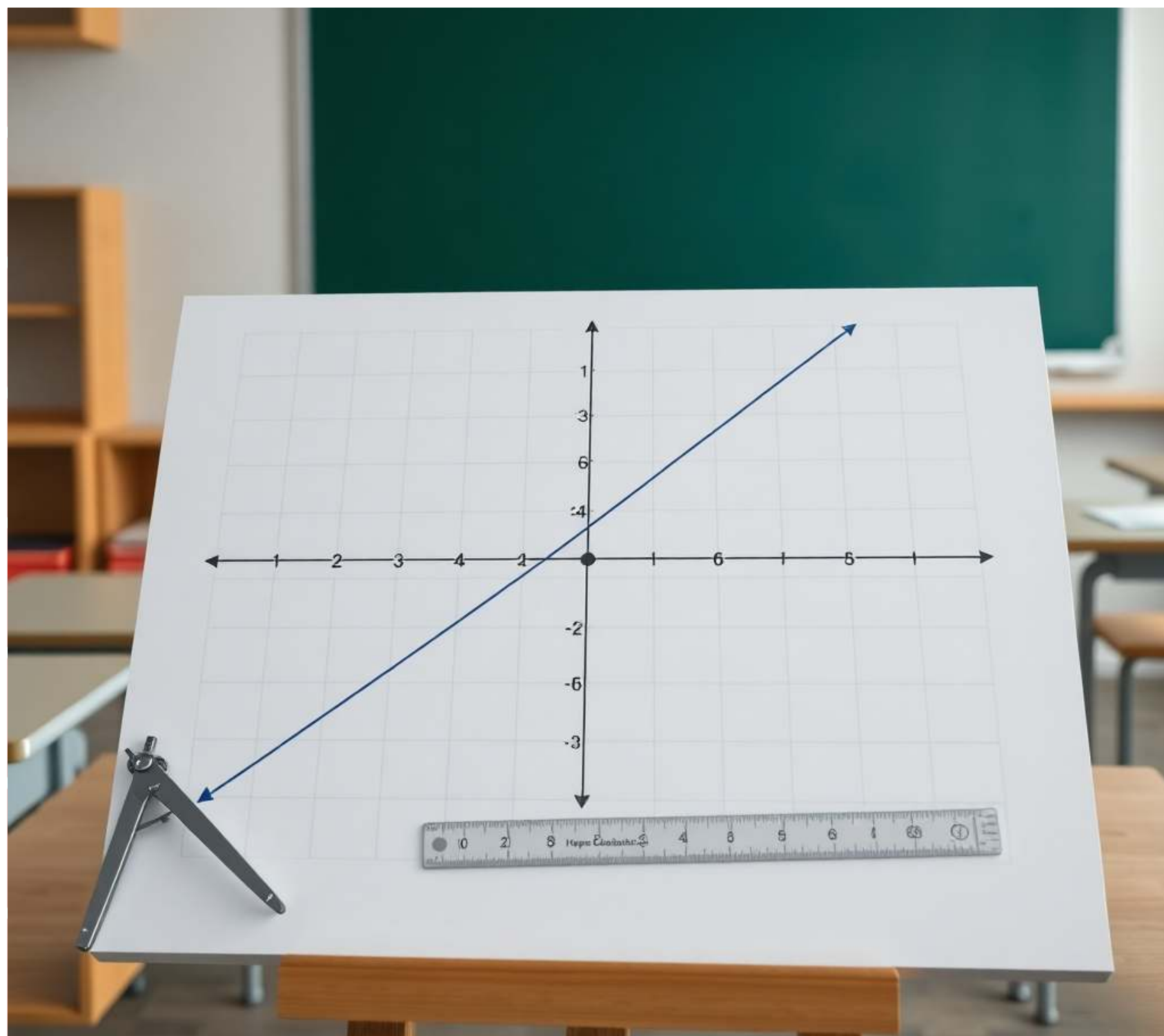


2

ветви имеет график
функции $y = k/x$

Свойства функции $y = k/x$

Точки для построения гиперболы при $k = 6$



Первые точки

Начните с положительных значений x : $(1; 6)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$ и $(6; 1)$. Они показывают, как при росте x значение y постепенно уменьшается.

Симметричные точки

Для отрицательных x получаются точки $(-1; -6)$, $(-2; -3)$, $(-3; -2)$ и $(-6; -1)$. Они отражают ту же зависимость, но расположены в других четвертях.

Связь координат

Если сравнить точки, видно: чем больше x по модулю, тем меньше y по модулю. Это удобно для быстрого построения плавной кривой без лишних вычислений.

Что видно на графике

По отмеченным точкам строят две отдельные ветви гиперболы. Они не соединяются между собой и постепенно приближаются к осям координат.

Сравнение значений функции при $k = 4$ и $k = -4$



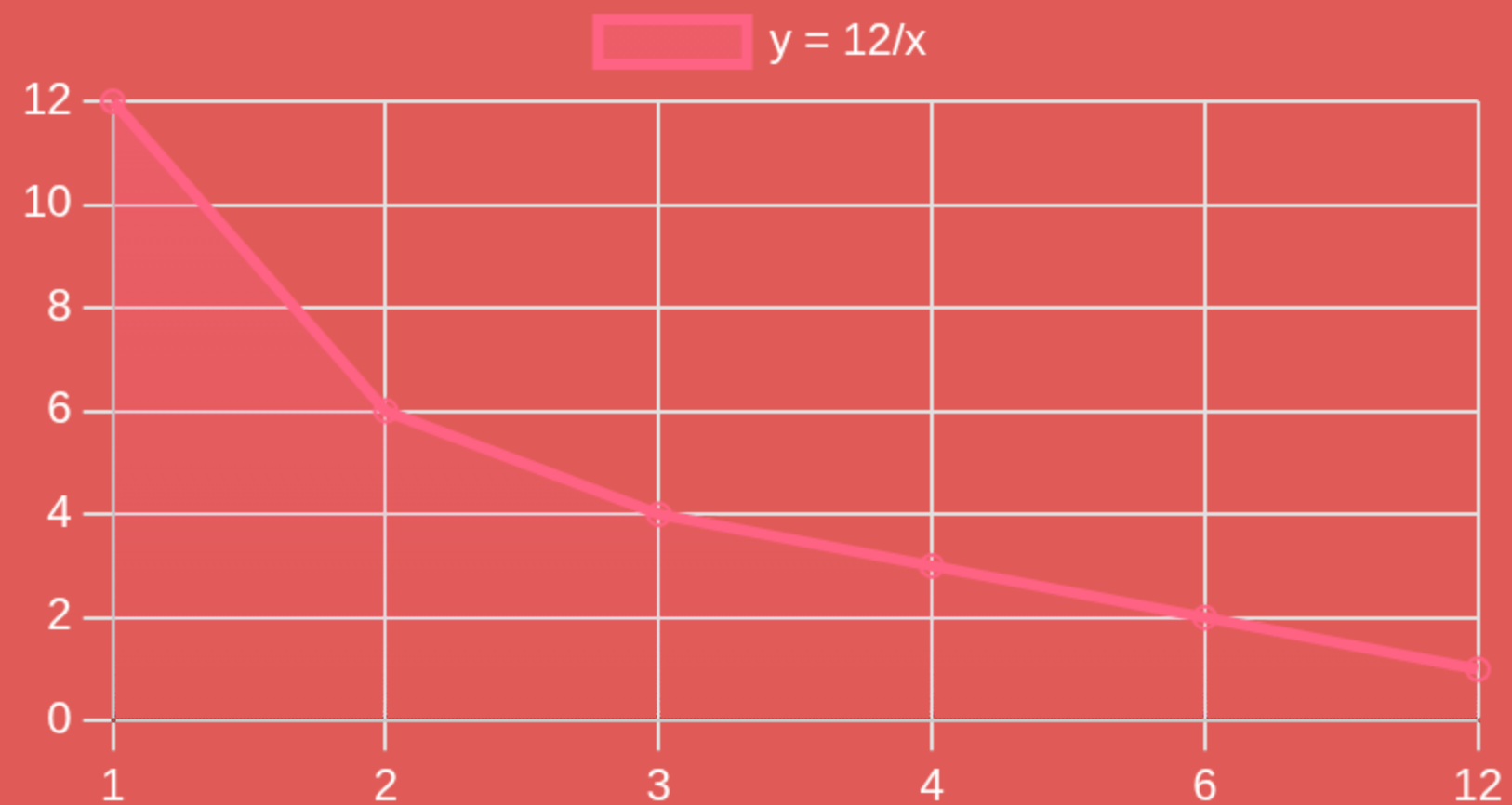
Таблица показывает, как меняются значения y при одинаковых x для двух разных знаков коэффициента.

При одинаковом модуле x модуль y совпадает, а знак y определяется знаком коэффициента k .

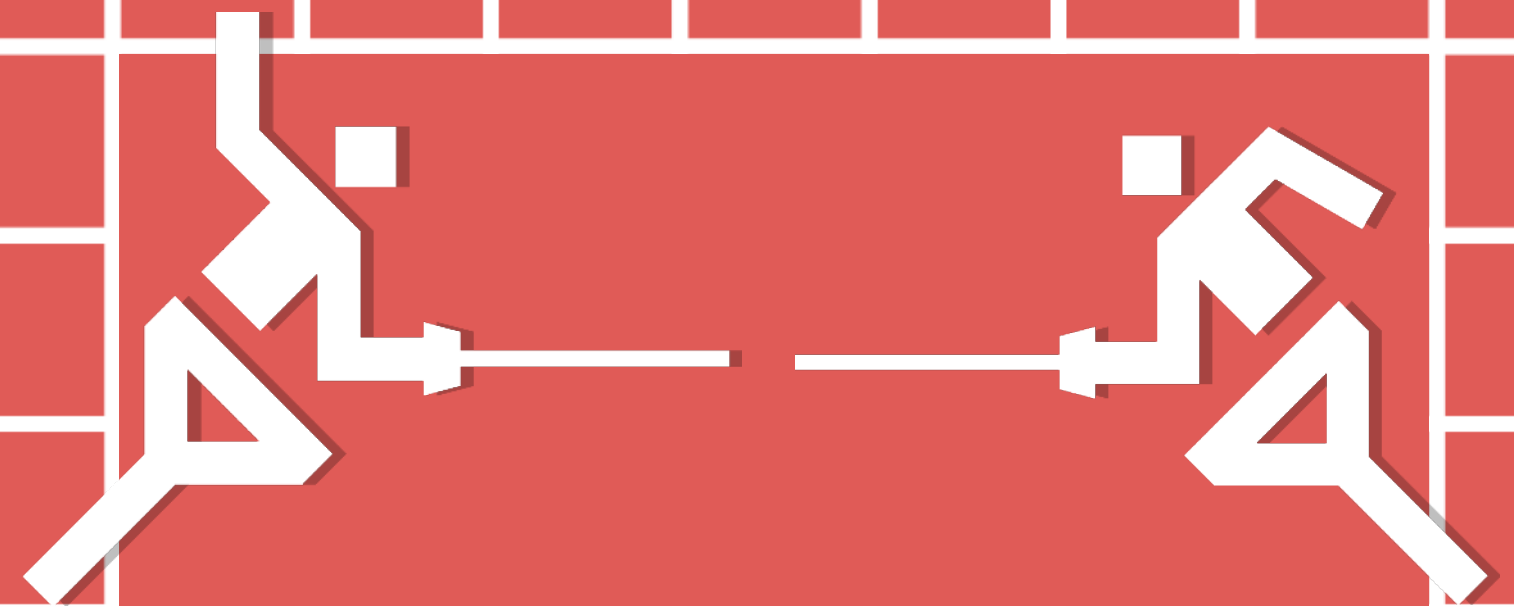
x	$k = 4$	$k = -4$
1	4	-4
2	2	-2
-1	-4	4

Значения вычислены по формуле $y = k/x$

Как меняются значения y при росте x



Вычисления по формуле $y = 12/x$

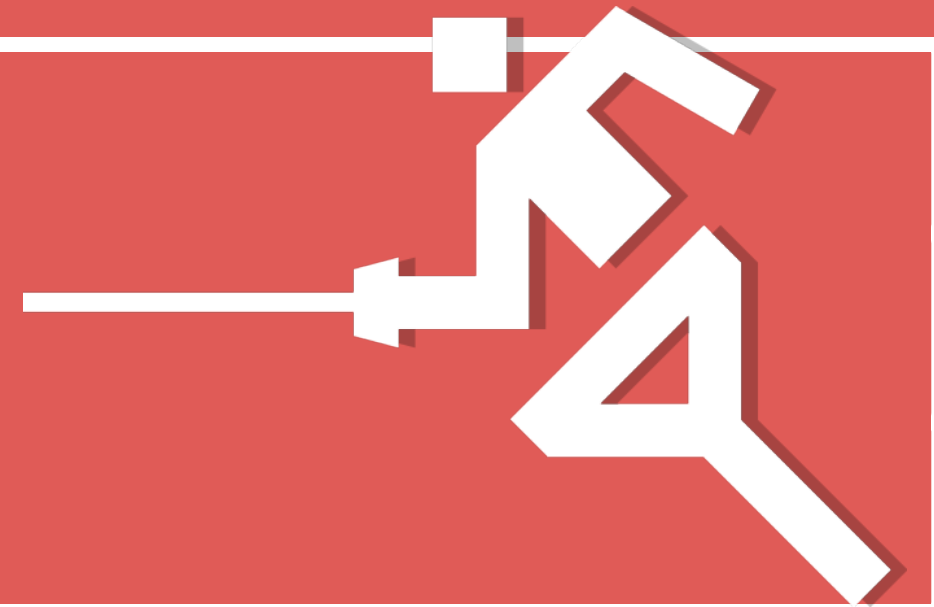


На графике хорошо видно, что уменьшение происходит неравномерно по абсолютной величине, но закономерно по отношению значений.

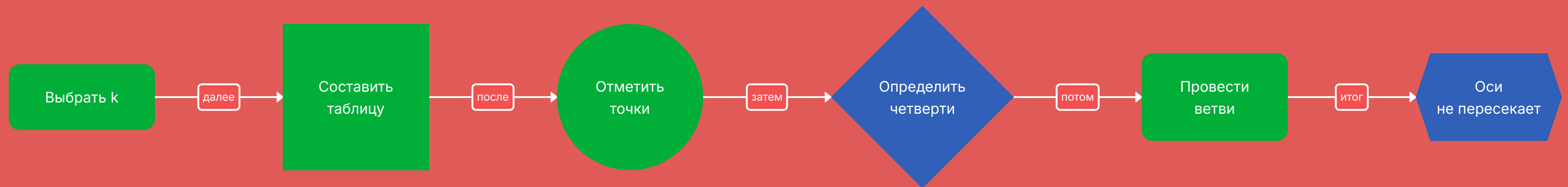
Если x увеличивается в несколько раз, y уменьшается во столько же раз. Произведение $x \cdot y$ остаётся постоянным.

Алгоритм построения графика $y = k/x$

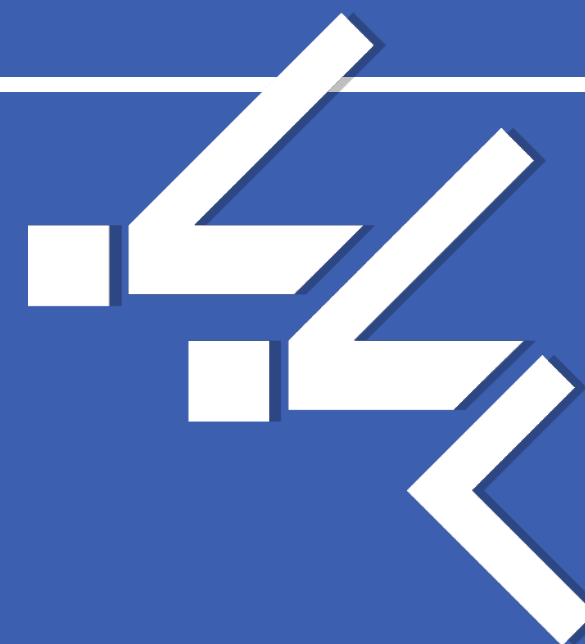
Последовательность построения по таблице значений и свойствам функции



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Почему график
не пересекает оси
координат



Ось y недоступна

При $x = 0$ формула перестаёт иметь смысл, поэтому на оси y у графика нет точек. Это ограничение связано с самим видом функции, а не с выбором координат.

Ось x тоже недоступна

Если $y = 0$, то должно выполняться $k/x = 0$, но при $k \neq 0$ это невозможно. Значит, график не может пройти через ось x .

Асимптоты графика

Оси координат являются асимптотами: ветви приближаются к ним всё ближе, но не пересекают. Именно поэтому график выглядит разорванным на две части.

Случай $k > 0$: ветви в I и III четвертях

1 Одинаковые знаки

Если коэффициент положительный, то x и y всегда имеют одинаковые знаки. Поэтому точки с положительными координатами появляются в I четверти, а с отрицательными — в III.

2 Удобно запомнить

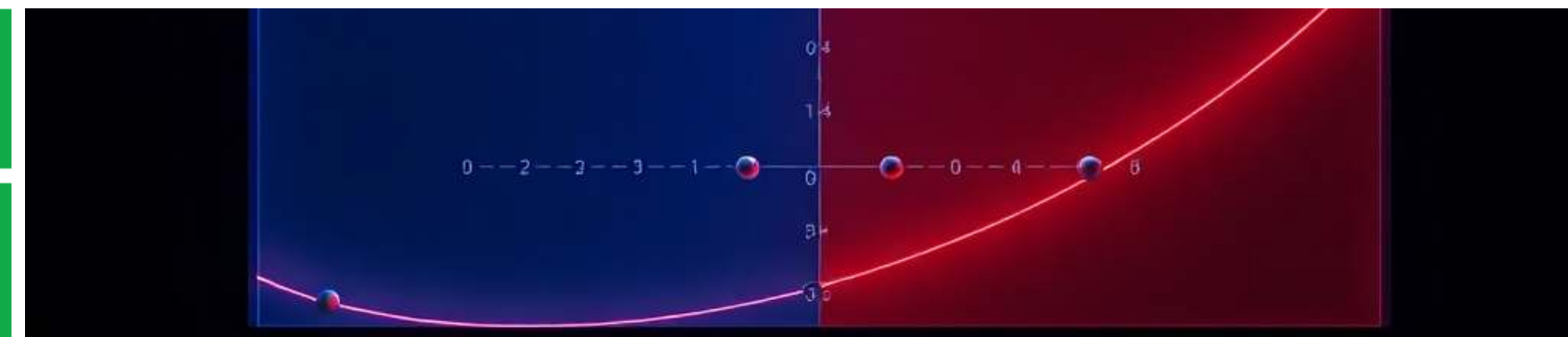
Достаточно проверить несколько значений таблицы, чтобы увидеть расположение ветвей. Для $k > 0$ график уходит в правый верхний и левый нижний углы плоскости.



Случай $k < 0$: ветви во II и IV четвертях

Когда знаки разные

Если коэффициент отрицательный, значения x и y имеют разные знаки. Тогда точки с положительным x получают отрицательный y , а точки с отрицательным x — положительный y . Из-за этого одна ветвь оказывается во II четверти, а другая — в IV.



Как это выглядит на плоскости

График тянется к левому верхнему и правому нижнему углам координатной плоскости. Ветви остаются отдельными, но сохраняют ту же форму гиперболы, что и при положительном коэффициенте.



Что важно заметить

Знак k меняет не саму идею обратной пропорциональности, а только расположение ветвей. Поэтому перед построением графика всегда сначала определяют знак коэффициента, а затем выбирают нужные четверти.



Основные свойства функции $y = k/x$



Свойство	$k > 0$	$k < 0$
Область определения	$x \neq 0$	$x \neq 0$
Область значений	$y \neq 0$	$y \neq 0$
Четверти	I, III	II, IV
Чётность и оси	нечётная; оси не пересекает	нечётная; оси не пересекает

Свойства функции $y = k/x$, определяемые формулой и знаком коэффициента k .

Свойства функции при разных знаках коэффициента k .

Ноль не входит ни в область определения, ни в область значений; знак k задаёт четверти, а нечётность означает симметрию относительно начала координат.

Нечётность и симметрия графика относительно начала координат



Равенство для противоположных аргументов

Для любой ненулевой x выполняется $f(-x) = -f(x)$. Это значит, что значение функции меняет знак, когда аргумент меняет знак, а сама зависимость сохраняет общий вид.



Пара точек-«зеркал»

Если точка $(a; b)$ лежит на графике, то точка $(-a; -b)$ тоже принадлежит ему. Такие пары удобно искать в таблице значений и использовать при построении.



Поворот на 180°

График можно представить как фигуру, которая совмещается сама с собой после поворота вокруг начала координат. Поэтому обе ветви расположены симметрично и выглядят одинаково.

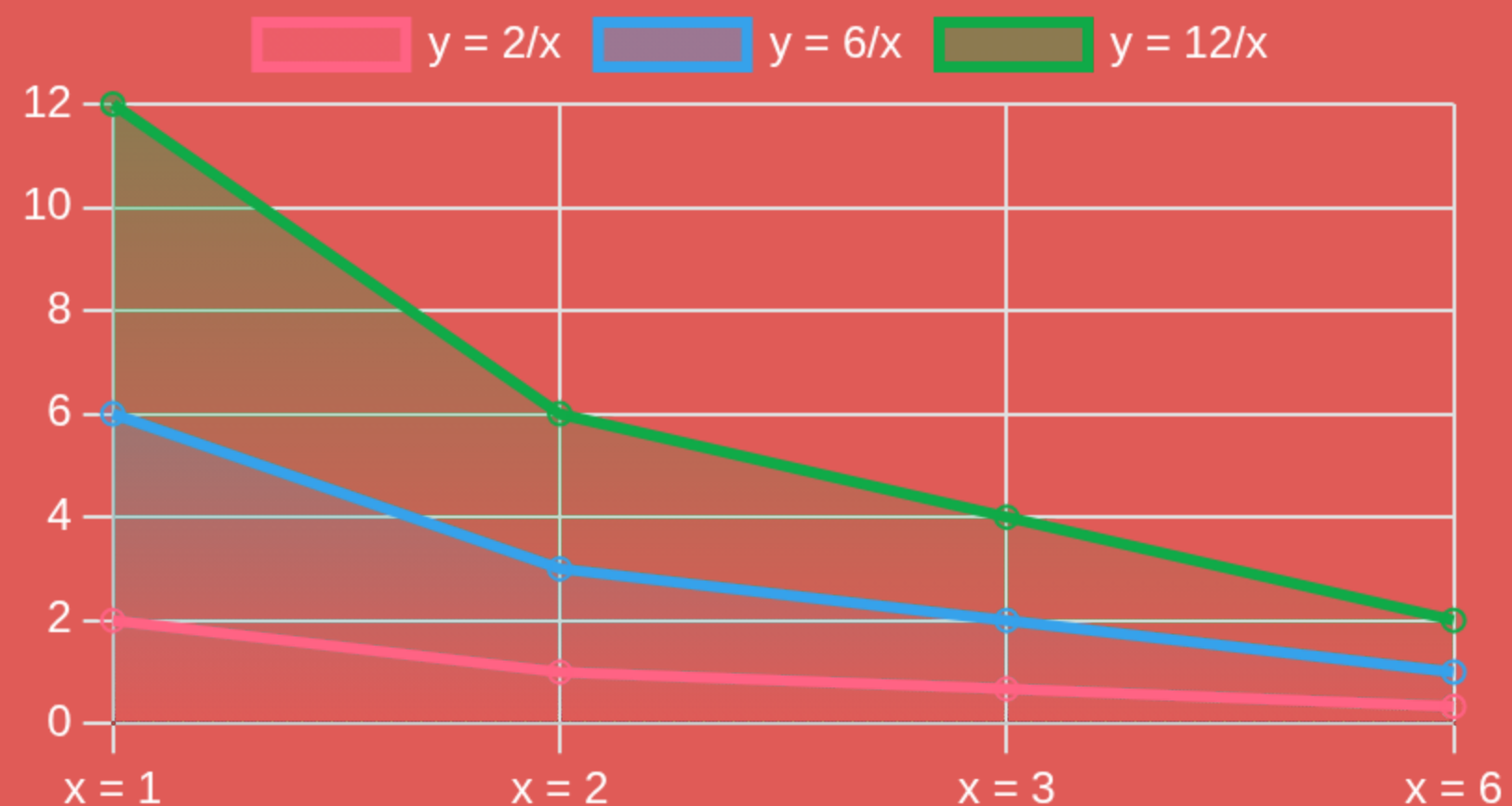


Одна зависимость — две ветви

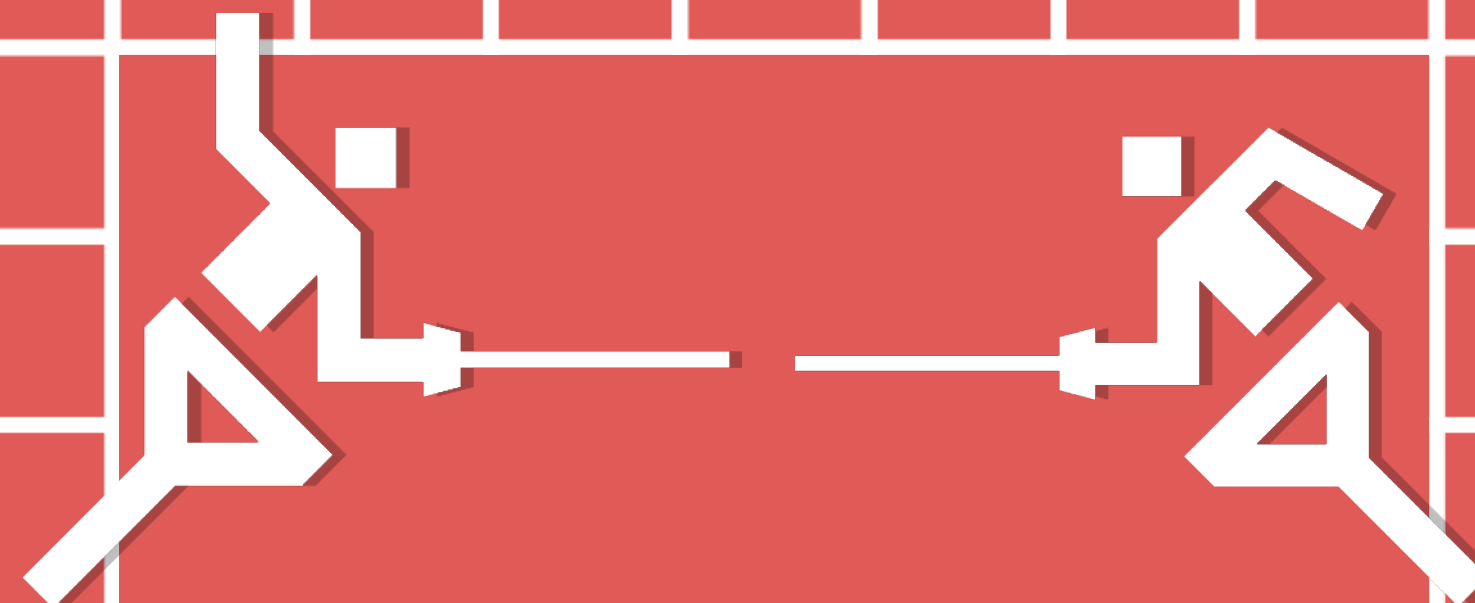
Нечётность объясняет, почему гипербола состоит из двух одинаковых частей. Левая и правая ветви не повторяют друг друга по отдельности, а образуют цельный симметричный график.



Как меняется график при разных значениях k



Вычисления по формуле $y = k/x$ для $x = 1, 2, 3, 6$.



На одном наборе точек видно, как увеличивается удалённость графика от осей при росте $|k|$.

Чем больше модуль k , тем выше значения y при одинаковом x и тем дальше ветви гиперболы от координатных осей.

При неизменном пути скорость и время связаны обратной пропорциональностью: чем быстрее движение, тем меньше времени требуется.

120

— столько километров составляет произведение скорости на время при постоянном расстоянии.

Расчёты по формуле $t = s/v$ при $s = 120$ км.

Пример из задачи на площадь прямоугольника

- 1** Площадь неизменна

Если площадь прямоугольника фиксирована, то увеличение одной стороны требует уменьшения другой. Иначе произведение сторон изменится, а значит, изменится и площадь фигуры.
- 2** Подходящие пары сторон

Для площади 24 см^2 можно подобрать несколько пар: 1 и 24, 2 и 12, 3 и 8, 4 и 6. Все они дают одинаковый результат при умножении.
- 3** Проверка произведением

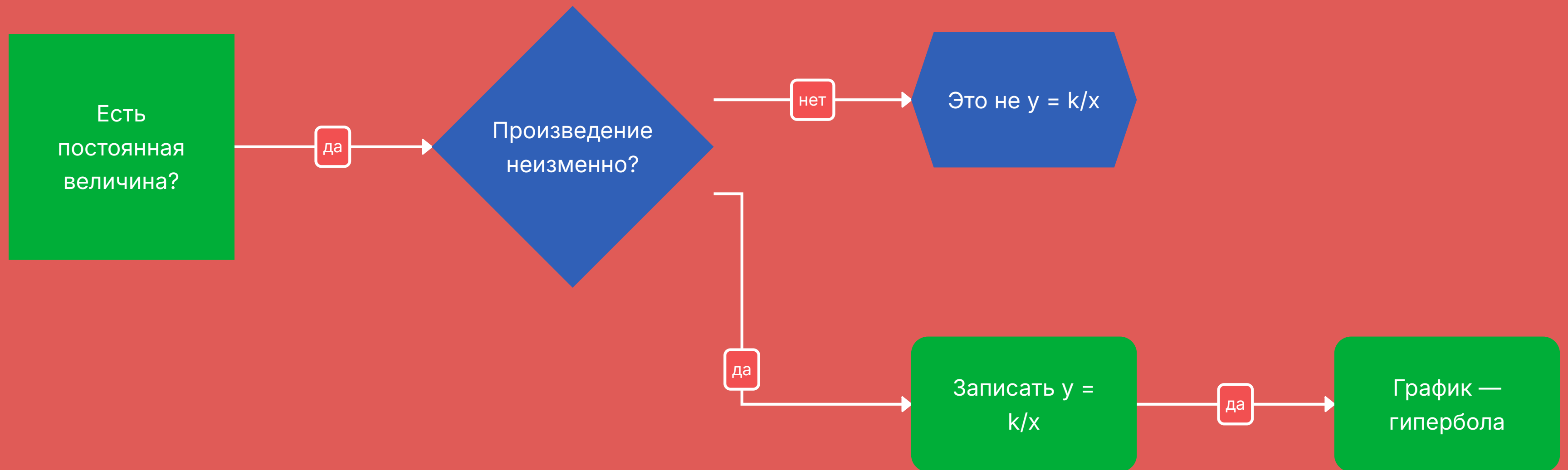
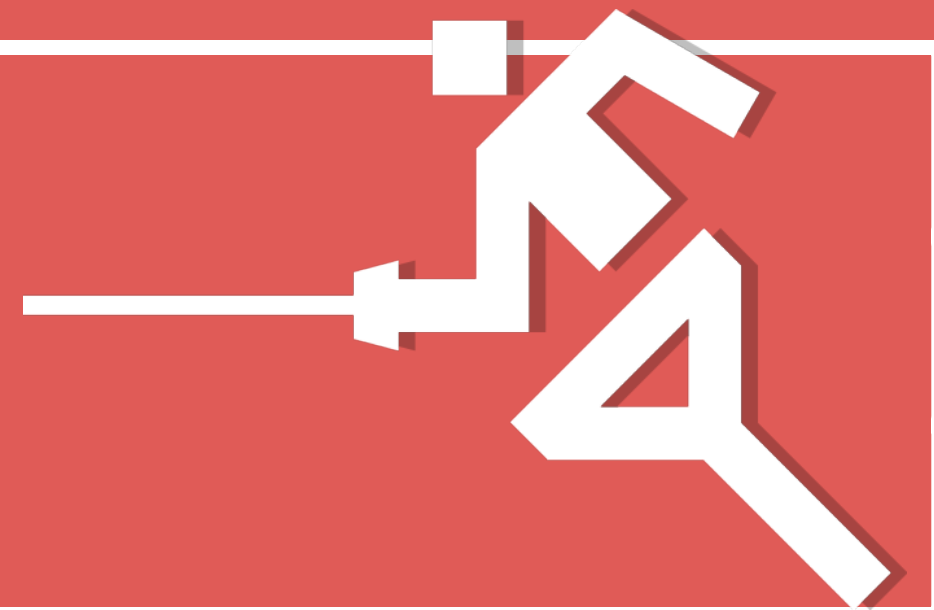
Каждая пара сторон удовлетворяет равенству $a \cdot b = 24$. Это удобно для проверки ответа: достаточно умножить стороны и сравнить результат с заданной площадью.
- 4** Вывод о зависимости

Если одна сторона растёт, другая уменьшается. Значит, между ними существует обратная пропорциональность, а не прямая зависимость или случайный набор чисел.

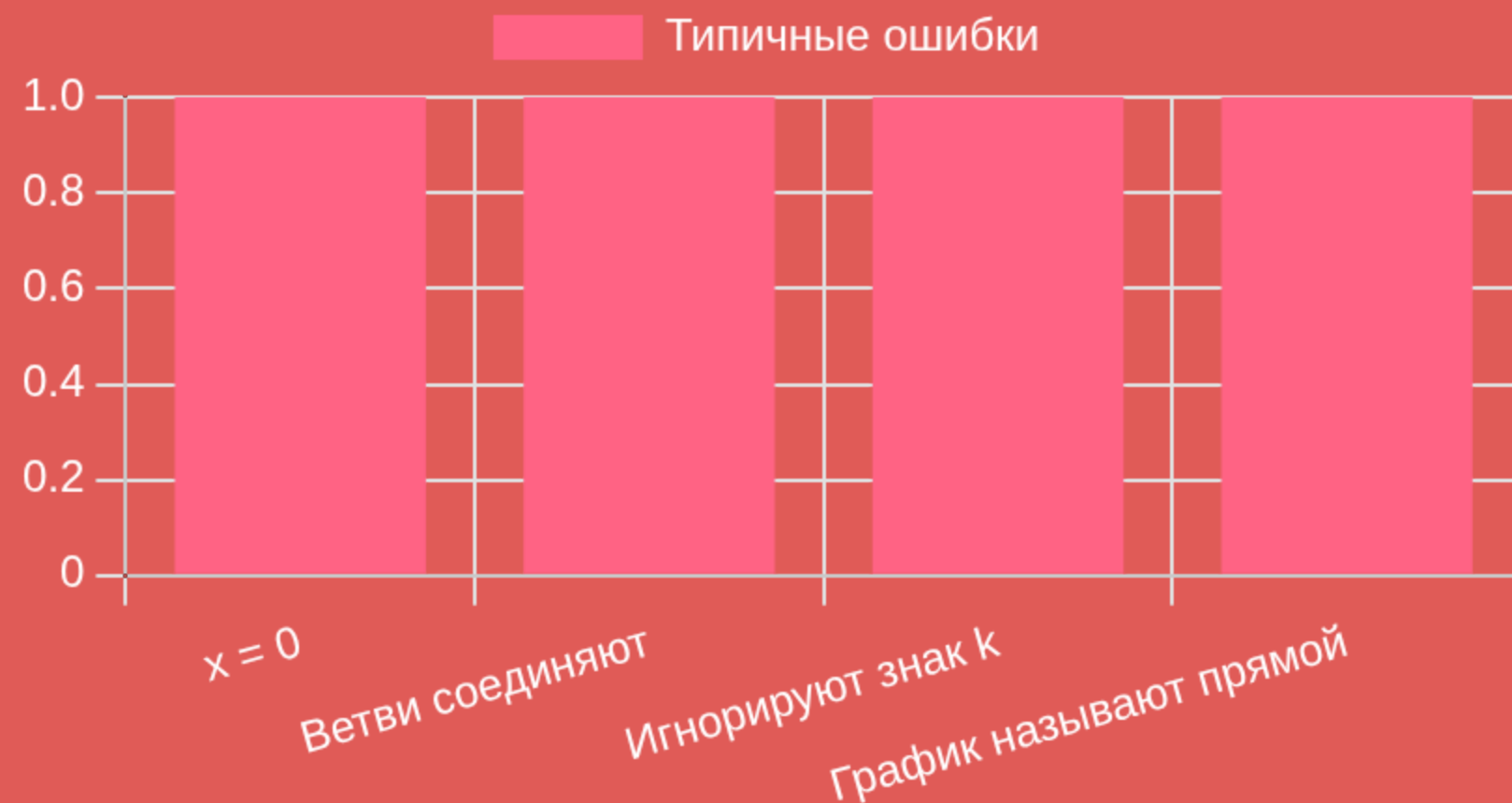


Как распознать обратную пропорциональность в задаче

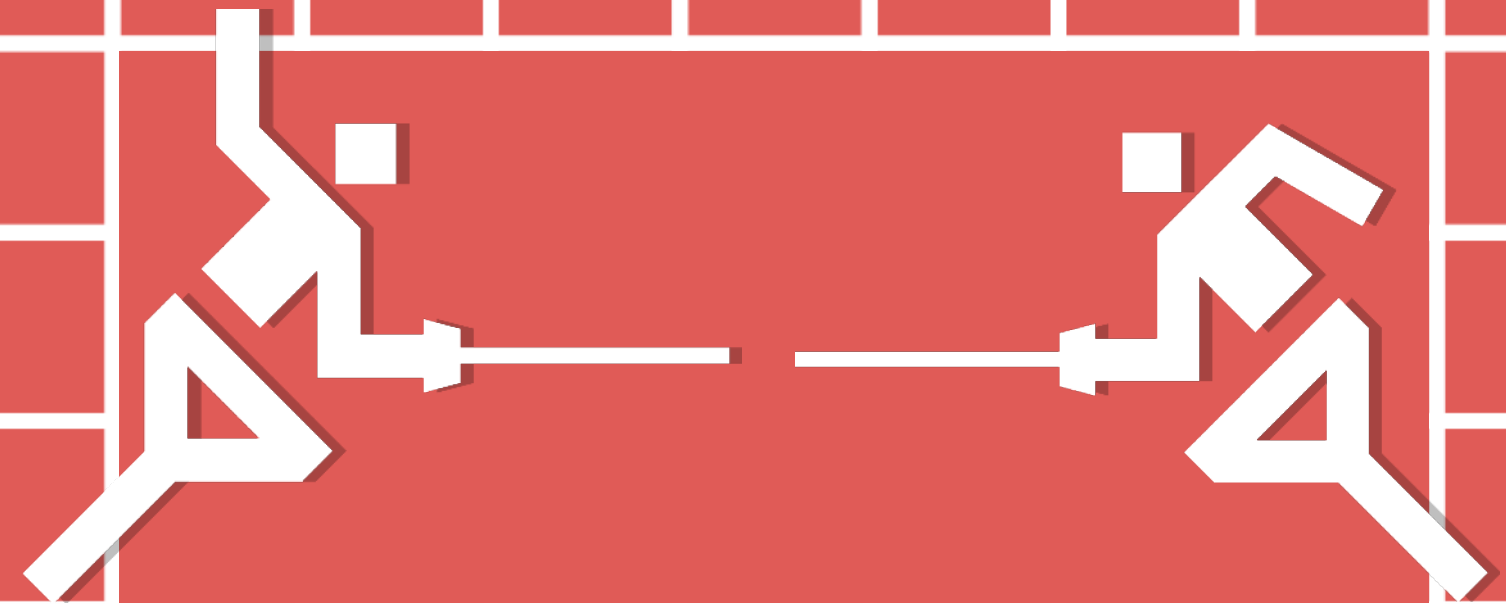
Алгоритм помогает отличить зависимость вида $y = k/x$ от других связей между величинами.



Типичные ошибки при изучении функции $y = k/x$



Обобщение типичных ошибок при построении и чтении графика $y = k/x$.



Эти ошибки легче заметить, если каждый шаг проверять по формуле, таблице значений и расположению ветвей на плоскости.

Главные причины ошибок — неверная подстановка, игнорирование знака k и смешение гиперболы с прямой.

Удобные точки для быстрого построения графика



Для разных значений k удобно брать
небольшое число целых x и сразу получать
точки для обеих ветвей.

Достаточно нескольких точек
с положительными и отрицательными x ,
чтобы быстро и точно построить гиперболу.

k	x	y
2	1, 2, 4	2, 1, $\frac{1}{2}$
4	1, 2, 4	4, 2, 1
-3	1, 2, 3	-3, - $\frac{3}{2}$, -1

Значения вычислены по формуле $y = k/x$.

Где ещё встречается обратная зависимость



Скорость и время

При одном и том же расстоянии более высокая скорость означает меньшее время в пути. Это один из самых наглядных примеров обратной пропорциональности в повседневных задачах.



Распределение работы

Если работа делится между несколькими людьми, то при увеличении числа исполнителей время выполнения обычно уменьшается. При одинаковой производительности произведение «люди × время» остаётся постоянным.



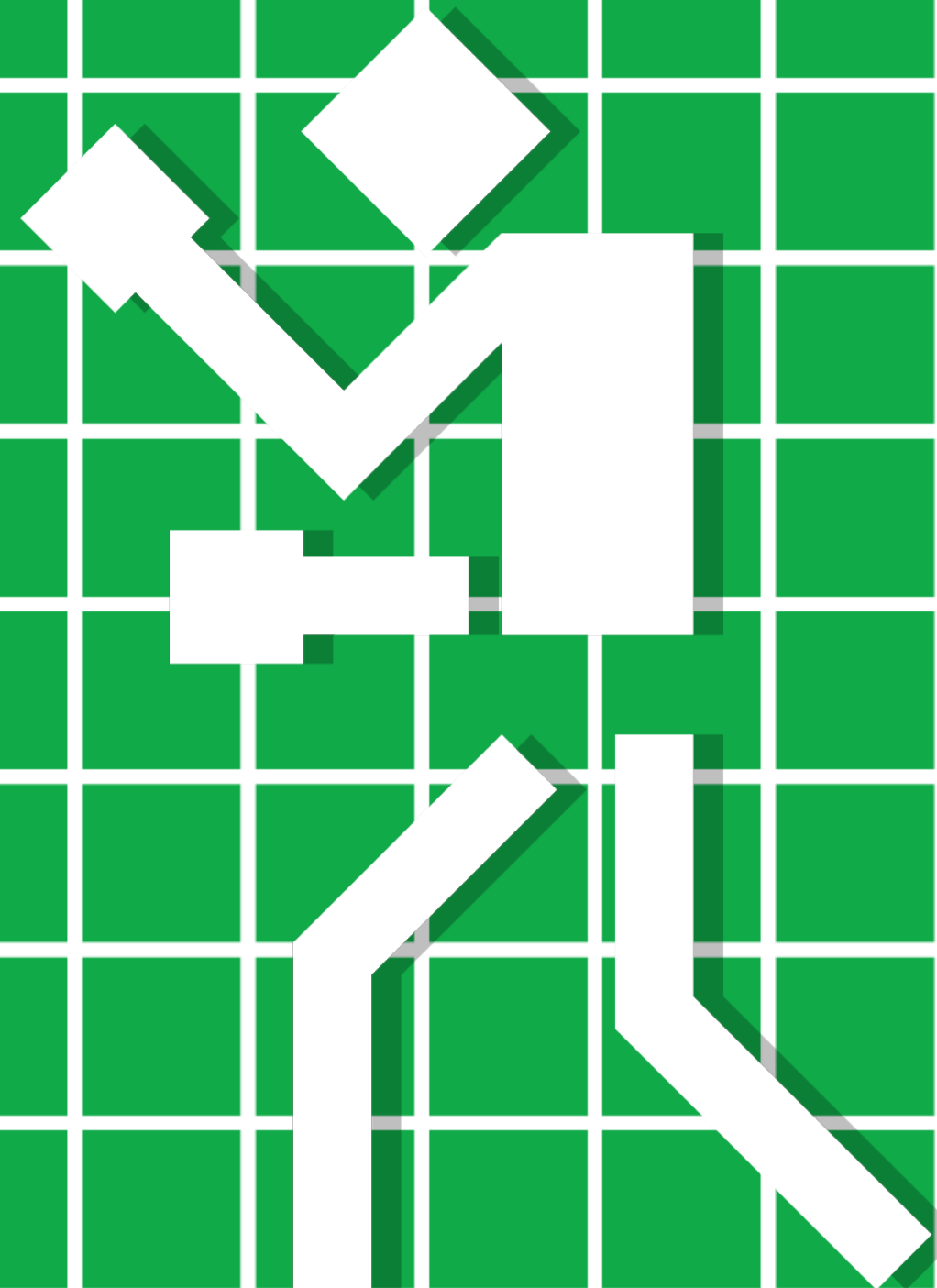
Упрощённые модели в физике

В некоторых школьных моделях давление и объём связаны обратной зависимостью. Такие задачи показывают, как одна величина растёт, когда другая уменьшается.



Постоянная площадь или объём

Если площадь фигуры или объём тела фиксированы, то размеры отдельных частей меняются обратно пропорционально. Это помогает быстро находить неизвестную сторону по известному произведению.



Функция $y = k/x$: формула, график и смысл

Функция $y = k/x$ показывает,
как из постоянного произведения
рождается гипербола с двумя ветвями.
Понимание её свойств помогает
уверенно читать графики и решать
задачи.

