

File Edit Search Help

Сфера, вписанная в цилиндрическую поверхность

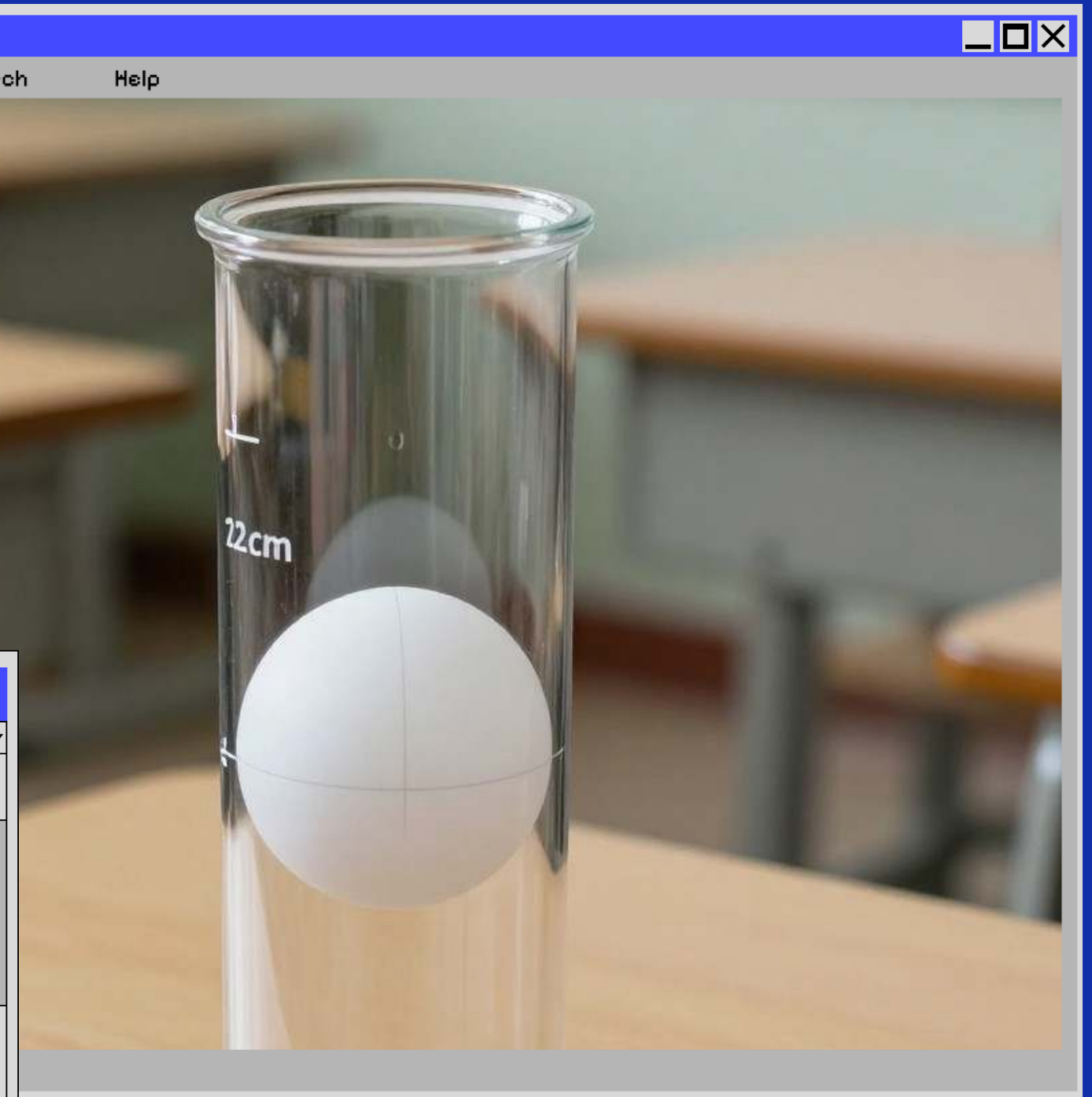
Разберём, когда внутри цилиндра возможно точное касание сферы и как это помогает решать задачи стереометрии.

Ok

Что изучается в этой теме

Ok

Цилиндрическая поверхность задаётся параллельными образующими, а сфера касается её изнутри при равенстве расстояния от центра сферы до каждой образующей радиусу сферы. Опираемся на базовые понятия окружности, радиуса, диаметра и осевого сечения.



Определение вписанной сферы

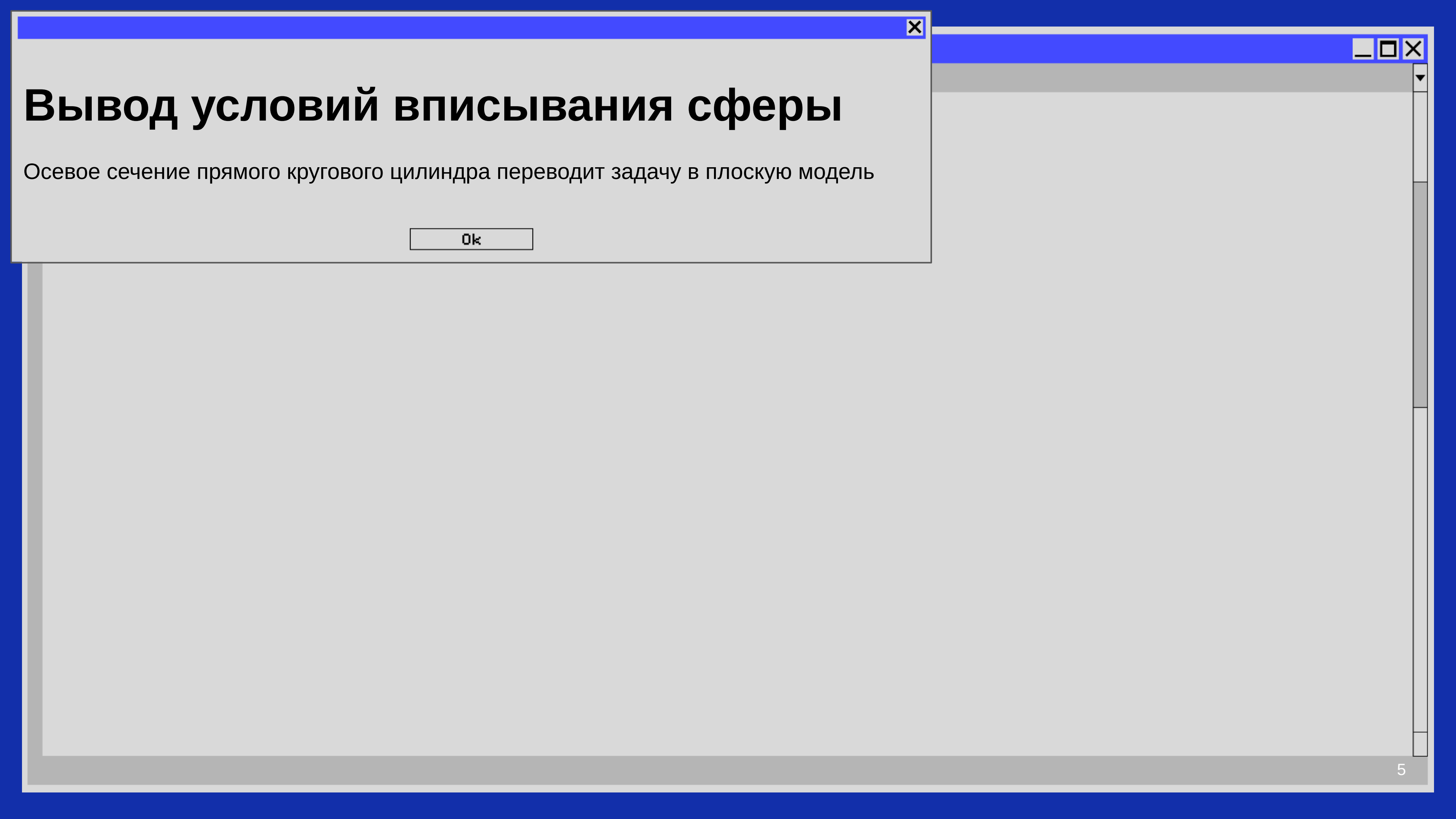
- 1 Сфера называется вписанной в цилиндрическую поверхность, если она касается её по всей линии соприкосновения и при этом не пересекает цилиндрическую поверхность.
- 2 Для прямого кругового цилиндра линия касания оказывается окружностью, а центр сферы в симметричной модели находится на середине оси цилиндра.
- 3 Радиус сферы равен расстоянию от её центра до боковой поверхности цилиндра, что делает условие касания проверяемым на геометрической схеме.

Когда вписанная сфера существует

Ok

- 1 Для прямого кругового цилиндра касание боковой поверхности определяется равенством радиусов основания и сферы: $R = r$, где R — радиус цилиндра, r — радиус сферы.
- 2 Если цилиндр рассматривается «с основаниями», то сфера должна также касаться плоскостей оснований: их расстояние равно диаметру сферы.

- 3 Отсюда следует второе условие $h = 2r$, где h — высота цилиндра, а $2r$ — диаметр вписанной сферы.
- 4 При нарушении хотя бы одного условия геометрия «не сходится»: сфера либо не дотягивается до нужной линии касания, либо пересекает границу цилиндра.



Вывод условий вписывания сферы

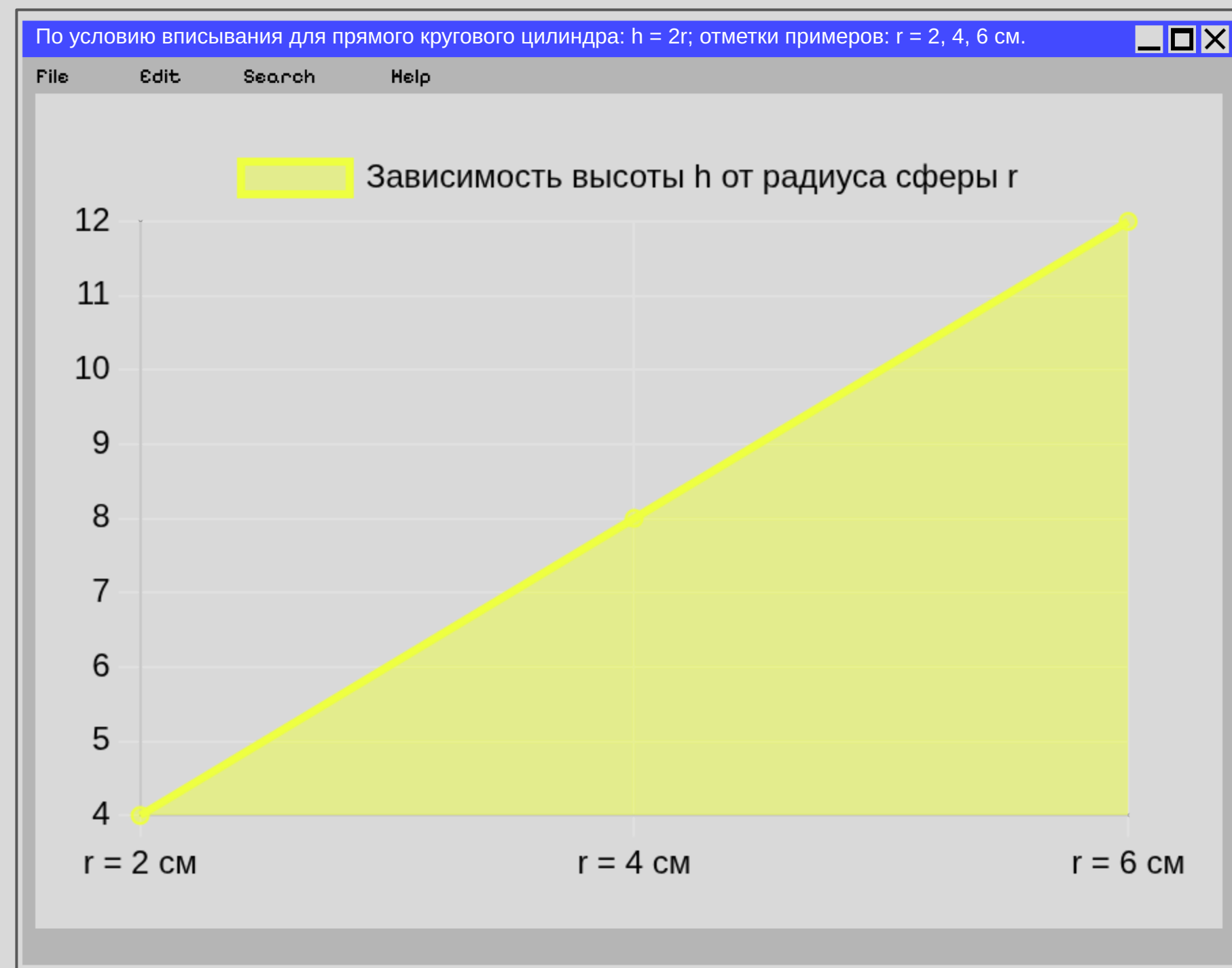
Осевое сечение прямого кругового цилиндра переводит задачу в плоскую модель

Ok

Связь радиуса и высоты цилиндра

Чтобы вписывание работало, высота должна масштабироваться вместе с радиусом: увеличение r приводит к удвоению h .

Линия показывает прямую пропорцию $h = 2r$: геометрическое условие превращается в однозначную связь размеров.



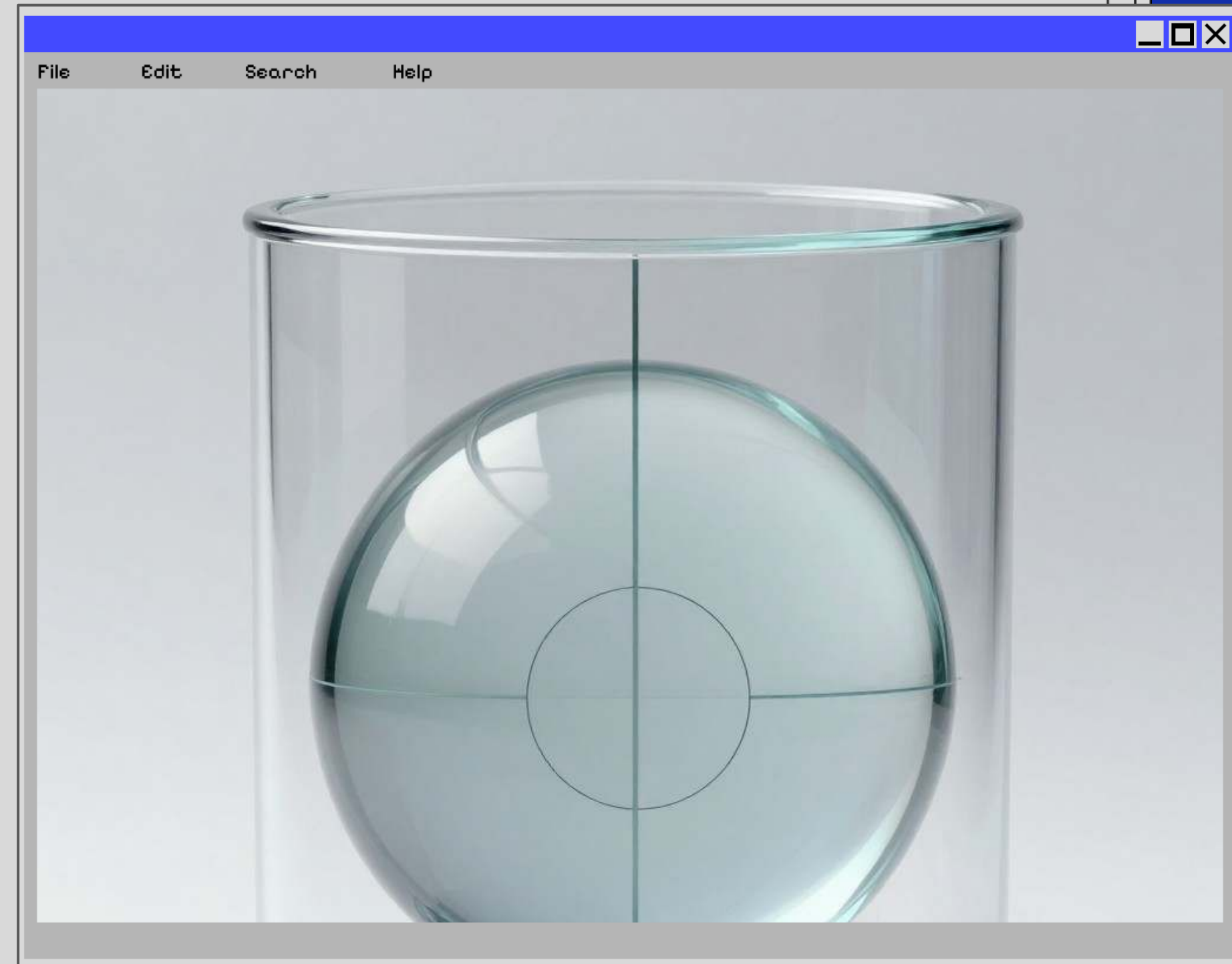
Осевое сечение как основная модель

Прямоугольник вместо пространства

Осевое сечение прямого кругового цилиндра — это прямоугольник. Именно в нём удобно искать окружность, которая «изнутри» отвечает сфере в пространстве, потому что сечение сохраняет радиальные и высотные размеры.

Что соответствует чему на схеме

На рисунке обычно отмечают цилиндр, ось, центр сферы, радиус сферы, высоту цилиндра и линию касания. Так становится ясно, какие расстояния должны быть равны, чтобы касание было полным.



3:2

Для прямого цилиндра при вписывании объём больше, а разность объясняется тем, как растягиваются размеры в третьем измерении.

Точное соотношение объёмов получается после подстановки $R = r$ и $h = 2r$ в формулы сферы и цилиндра.

Ok

Числовой пример для прямого кругового цилиндра

Проверим условия вписывания на конкретных размерах: радиусы равны, а высота равна диаметру сферы.

При вписывании сферы цилиндр всегда содержит больше объёма: часть цилиндра остаётся «пустой» вне сферы.

Вычисления по формулам стереометрии.

r (см)	R (см)	h (см)	Vсферы (π см ³)	Vцилиндра (π см ³)	Отношение
3	3	6	36	54	2 : 3

Ключевая геометрическая идея: расстояние до образующей



Центр на оси цилиндра

Если центр сферы лежит на оси прямого цилиндра, то симметрия гарантирует одинаковые расстояния от центра до всех образующих по окружности основания.

Ok



Радиус как расстояние до образующей

Расстояние от центра сферы до каждой образующей равно радиусу сферы. Поэтому сфера не может «оторваться» от цилиндрической поверхности в боковом направлении.

Ok



Следствие: касание по всей окружности

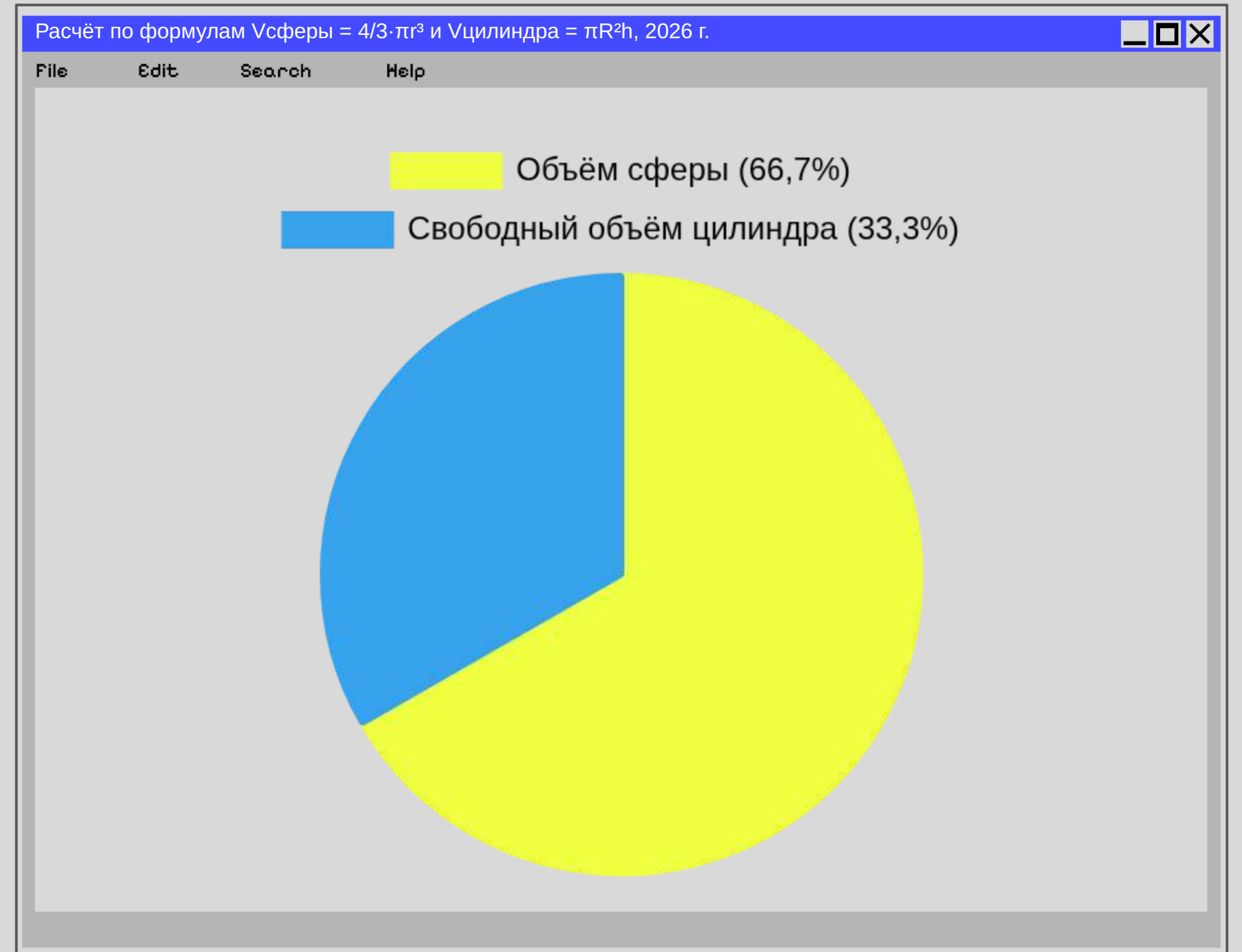
Поскольку это расстояние одинаково для любой образующей, сфера касается цилиндра по всей линии соприкосновения — в виде окружности, а не точечно.

Ok

Доля объёма сферы внутри цилиндра

При условии вписывания $R = r$ и $h = 2r$ объём сферы составляет $\frac{4}{3} \cdot \pi r^3$, а объём цилиндра — $2\pi r^3$, то есть $\frac{2}{3}$ от цилиндра.

Круговая диаграмма показывает: даже при «идеальном» касании внутри цилиндра остаётся треть объёма без сферы.



Наклонный цилиндр и ограничения модели

1

Наклонный цилиндр сохраняет параллельность образующих, но его ось не перпендикулярна основаниям, поэтому осевое сечение уже не даёт прежнего прямоугольника.

2

Из-за этого связь между высотой h и радиусом вписанной сферы нельзя использовать в виде $h = 2r$: расстояния до образующих меняются по направлению и требуют отдельного анализа.

3

Поэтому в школьных задачах фокус обычно держат на прямом круговом цилиндре, где осевое сечение переводит стереометрию в понятную плоскую модель с окружностью.

Алгоритм решения задач: от касания к параметрам

Логика решения основана на переводе пространственной схемы в осевое сечение и использовании условий касания для прямого цилиндра.

Ok

Типичные ошибки при решении

Путаница с описанной сферой

Иногда вписанную сферу ошибочно считают сферой, которая касается цилиндра снаружи. Для вписанной важна «внутренняя» касательная линия на боковой поверхности; у описанной геометрия обратная, и условия на параметры меняются.

Ok



Игнорирование высотного условия

При рассмотрении цилиндра с основаниями важно помнить условие $h = 2r$. Если его не использовать, задача превращается в частично неверную модель: сфера может удовлетворять касанию по диаметру, но не «дотягивается» до оснований и не охватывает нужное расстояние.

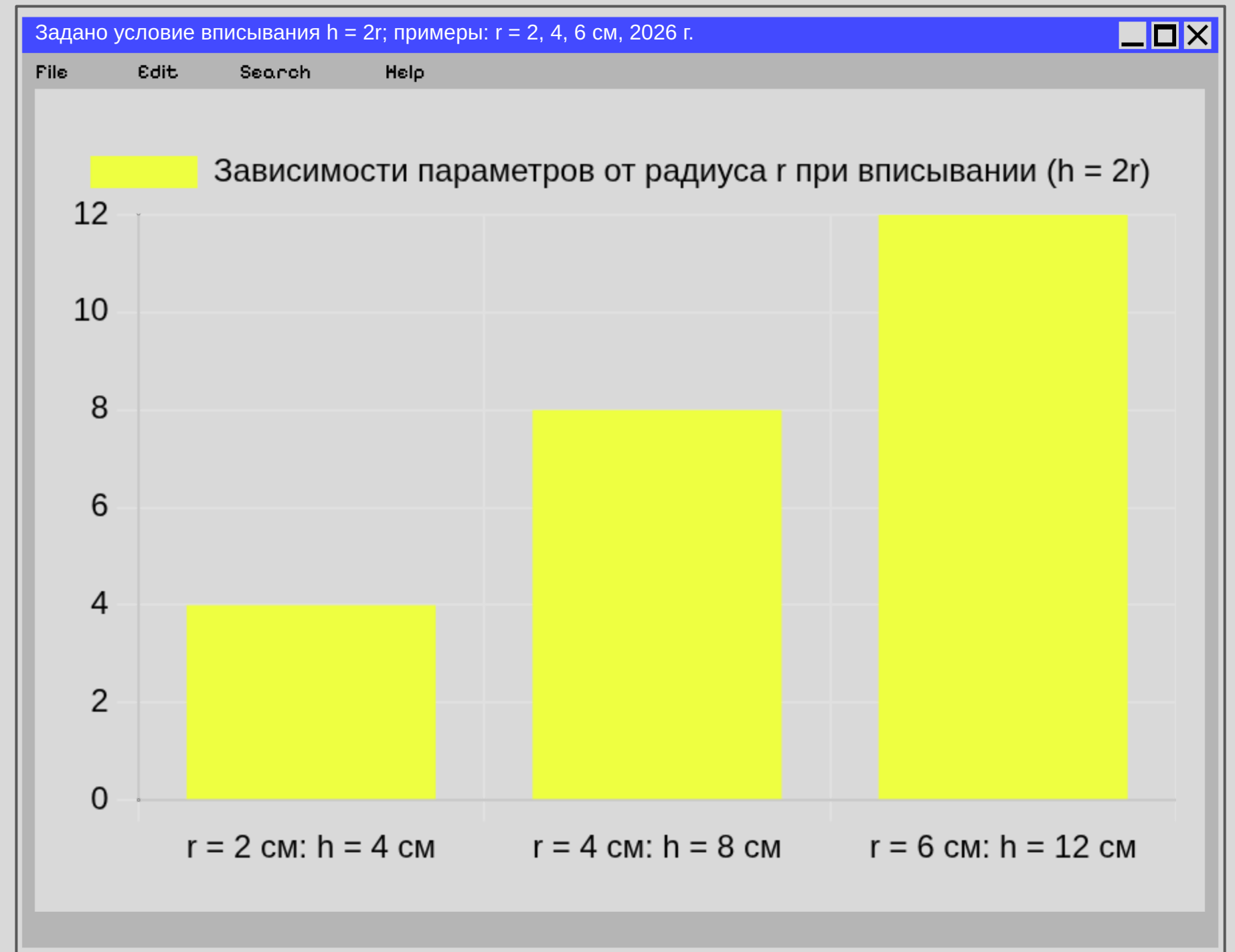
Ok



Как изменяются параметры при увеличении радиуса

При увеличении r высота прямого цилиндра растёт линейно: $h = 2r$, поэтому на числах видно простое удвоение.

Даже одна зависимость $h = 2r$ подчёркивает общую закономерность: чтобы масштабировать конструкцию, нужно отслеживать и линейные, и квадратичные, и кубические эффекты.



Связь с задачами на оптимизацию

Ok

- 1 Условие вписывания задаёт точные зависимости между размерами: как только известен радиус сферы r , фиксируются радиусы цилиндра R и высота h при прямом круговом цилиндре.
- 2 Это удобно в задачах оптимизации: можно сравнивать объёмы и площади поверхностей при одинаковых ограничениях, не меняя лишних параметров и избегая «пальцем в небо».
- 3 Зависимости $V_{\text{сферы}} \propto r^3$ и $S_{\text{сферы}} \propto r^2$ помогают оценивать, что именно будет расти быстрее при увеличении размеров конструкции и где появится перерасход материала.
- 4 Такая модель применима и практично: при подборе размеров резервуаров, упаковки цилиндрической формы или деталей с шарообразными элементами легче контролировать зазоры и эффективность.

Главные формулы и условия темы

Стандартные формулы стереометрии; 2026 г.

File Edit Search Help

Объект	Формула или свойство	Значение для задач
Сфера	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$	через r
Сфера	$S = 4\pi r^2$	через r
Цилиндр	$V = \pi R^2 h$	через R и h
Цилиндр	$S_{\text{бок}} = 2\pi R h$	через R и h
Прямой круговой цилиндр	$R = r, h = 2r$	условие вписывания

Используйте таблицу как «карманный справочник»: сначала определите вид цилиндра, затем примените условия касания и выберите формулы для объёма и площади.

В прямом круговом цилиндре касание связывает все ключевые размеры: достаточно найти один параметр, чтобы остальные выражались через r .

Задачи повышенной сложности

- 1 На продвинутом уровне требуется сначала проверить возможность вписывания: определить, совместимы ли заданные R и h с условиями $R = r$ и $h = 2r$, и лишь затем выполнять вычисления.
- 2 Встречаются задачи, где по известному объёму сферы нужно найти неизвестный радиус цилиндра: выражают r из $V_{\text{сферы}} = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$, после чего находят R и h по условиям касания.
- 3 Отдельный класс заданий — найти площадь боковой поверхности цилиндра при известном радиусе вписанной сферы: подставляют $R = r$ и $h = 2r$ в $S_{\text{бок}} = 2\pi R h$, получая итоговую формулу.

Практический смысл геометрической модели



Проверка «без зазоров»

Модель помогает мысленно проверить, касаются ли элементы по боковой поверхности и основаниям одновременно. Если условия $R = r$ и $h = 2r$ не выполняются, между телами появляется зазор или пересечение.



Оценка полезного объёма

Когда сфера занимает $2/3$ объёма цилиндра, оставшаяся треть — это свободное пространство внутри корпуса. Это полезно при оценке вместимости и рациональности размещения шарообразного элемента.



Контроль масштабирования

При изменении радиуса растут и высота, и геометрические характеристики поверхностей. Легко увидеть, что линейные размеры меняются иначе, чем площади и объёмы, и планировать расчёты заранее.



Связь с 3D-моделированием

В учебных проектах по трёхмерной геометрии модель служит «эталон» для тестирования построений: совпадение с осевым сечением означает корректность пропорций и касания.

Итоги темы

Ok

Главный результат: для прямого кругового цилиндра вписанная сфера существует при $R = r$ и $h = 2r$. Осевое сечение переводит задачу в прямоугольник с вписанной окружностью, а формулы объёма и площади завершают решение.